This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

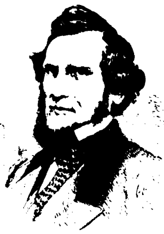
Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

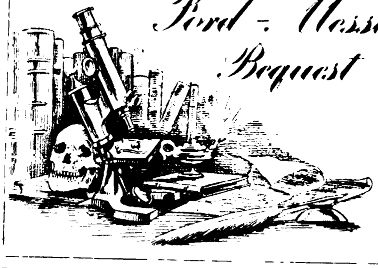
+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

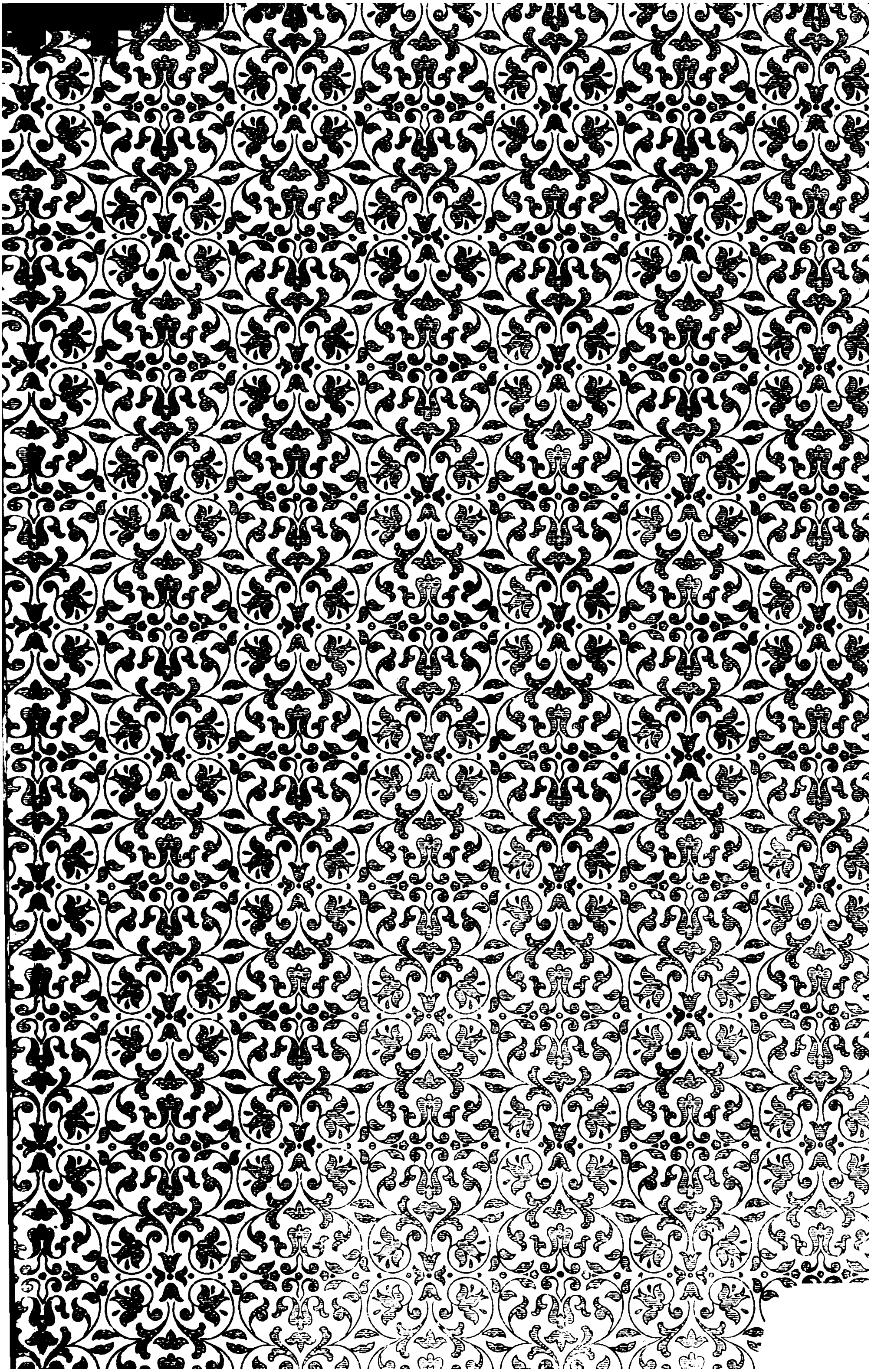
Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.



Library of the University of Michigan
Bought with the income
of the
Ford - Messer
Bequest



E F FABER



AS
182
.S14

BERICHTE

83663

ÜBER DIE

VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

MATHEMATISCH-PHYSISCHE CLASSE.

VIERUNDZWANZIGSTER BAND.

1872.

MIT 6 TAFELN UND 16 HOLZSCHNITTEN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

INHALT.

Seite

P. A. Hansen, Bemerkungen zu einem vor der permanenten Commission der europäischen Gradmessung am 21. Septbr. vorigen Jahres zu Wien gehaltenen Vortrage 1

P. A. Hansen, Darlegung einer unbedeutend scheinenden Umformung der Endgleichungen des »Supplements zu den Geodätischen Untersuchungen«, durch welche aber eine weit grössere Genauigkeit in den numerischen Werthen derselben erlangt wird. (Nebst einer Tafel für die Krümmungsmaasse auf dem Erdsphäroid). . 15

O. Schlömilch, Ueber eine besondere Gattung algebraischer Functionen 26

C. Bruhns, Einige Notizen über Kepler 30

Carl Neumann, Vorläufige Conjectur über die Ursachen der thermoelektrischen Ströme 49

P. A. Hansen, Ueber die Anwendung von Lichtbildern zur Beobachtung der Venusvorübergänge vor der Sonne 65

F. Zöllner, Ueber die electrische und magnetische Fernewirkung der Sonne. 116

F. Zöllner, Ueber das spectroskopische Reversionsfernrohr. (Mit einer Tafel) 129

H. C. Vogel, Ueber die Absorption der chemisch wirksamen Strahlen in der Atmosphäre der Sonne. Vorgelegt von F. Zöllner. . . 135

Prof. Schwalbe, Ueber Lymphbahnen der Netzhaut und des Glaskörpers. Aus dem physiol. Institute, vorgelegt von dem wirkl. Mitgliede C. Ludwig 142

Carl Neumann, Ueber das Elementargesetz derjenigen elektromotorischen Kräfte, welche in einem gegebenen Conductor hervorgebracht werden durch elektrische Ströme, sei es, dass diese Ströme in demselben Conductor, sei es, dass sie in irgend einem andern gegen jenen sich bewegenden Conductor stattfinden 144

Dr. Arnold Heller, Ueber die Blutgefässe des Dünndarmes. Aus dem phys. Institute. Vorgelegt von dem wirklichen Mitgliede C. Ludwig. (Mit einer Tafel) 165

Seite

P. A. Hansen, Zusatz zu der »Ueber die Anwendung von Lichtbildern zur Beobachtung der Venusvorübergänge vor der Sonne« betitelten Abhandlung 172

F. Zöllner, Zur Geschichte des Horizontalpendels. Mit 2 Holzschn. 183

Dr. H. Tappeiner, Ueber den Zustand des Blutstroms nach Unterbindung der Pfortader. — Aus der physiol. Anstalt in Leipzig. Vorgelegt von dem wirkl. Mitgliede C. Ludwig. Mit 14 Holzschnitten 193

Dr. Kronid Slavjansky, Die regressiven Veränderungen der Epithelialzellen in der serösen Hülle des Kanincheneies. Aus der physiol. Anstalt zu Leipzig. Vorgelegt von dem wirkl. Mitgliede C. Ludwig. (Mit 1 Tafel in Farbendruck) 247

Dr. N. Afonassiew, Welcher Bestandtheil des Erstickungsblutes vermag den diffundirbaren Sauerstoff zu binden. Aus dem phys. Institute zu Leipzig. Vorgelegt von dem wirklichen Mitgliede C. Ludwig. 253

Eilhard Wiedemann, Ueber die elliptische Polarisation des Lichtes und ihre Beziehungen zu den Oberflächenfarben der Körper. Vorgelegt von dem wirkl. Mitgliede W. Hankel 263

F. Zöllner, Ueber den Zusammenhang von Sternschnuppen und Cometen 310

F. Zöllner, Ueber die durch strömendes Wasser erzeugten electrischen Ströme 317

O. Schlömilch, Ueber bedingt-convergirende Reihen. 327

Dr. J. Michel, Zur näheren Kenntniss der Blut- und Lymphbahnen der Dura mater cerebralis. Aus dem physiol. Institute zu Leipzig. Vorgelegt von dem wirkl. Mitgliede C. Ludwig. Mit 1 Tafel in Farbendruck 331

L. Gerlach, Ueber die Bestimmung der Minerale des Blutserums durch directe Fällung. Aus dem physiol. Institute zu Leipzig. Vorgelegt von dem wirkl. Mitgliede C. Ludwig 349

C. Bruhns, Mittheilung über die Ermittelung der Coordinaten der Pleissenburg und verschiedener Thürme in Bezug auf die Leipziger Sternwarte, und über die Construction eines Basisapparates 352

C. Bruhns, Ueber die von Herrn Dr. L. R. Schulze abgeleiteten Elemente des Cometen. I. 1830 370

Protector der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

Ehrenmitglieder.

Seine Excellenz der Minister des Königlichen Hauses, Freiherr *Johann Paul von Falkenstein.*

Seine Excellenz der Staatsminister des Cultus und öffentlichen Unterrichts, Herr *Carl Friedrich von Gerber.*

Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Professor *Heinrich Leberecht Fleischer* in Leipzig, Secretär der philol.–histor. Classe.

– Professor *Hermann Brockhaus* in Leipzig, stellvertretender Secretär der philol.–histor. Classe.

– Geheimer Hofrath *Eduard Albrecht* in Leipzig.

– Professor *Conrad Bursian* in Jena.

– —— *Georg Curtius* in Leipzig.

– —— *Adolf Ebert* in Leipzig.

Se. Exc. Herr Geheimer Rath *Hans Conon von der Gabelentz* in Altenburg.

Herr Geheimer Hofrath und erster Universitäts-Oberbibliothekar *Ernst Gotthelf Gersdorf* in Leipzig.

– Domherr und Geheimer Hofrath *Gustav Hänel* in Leipzig.

Herr Professor *Gustav Hartenstein* in Jena.
- Professor und zweiter Universitäts-Oberbibliothekar *Christoph Ludolf Ehrenfried Krehl* in Leipzig.
- —— *Ludwig Lange* in Leipzig.
- Hofrath *Karl Nipperdey* in Jena.
- Professor *Johannes Adolph Overbeck* in Leipzig.
- Geheimer Regierungsrath *Friedrich Ritschl* in Leipzig.
- Geheimer Rath *Wilhelm Roscher* in Leipzig.
- Professor *Georg Voigt* in Leipzig.
- —— *Moritz Voigt* in Leipzig.

Se. Exc. Herr Geheimer Rath *Karl Georg von Wächter* in Leipzig.
Herr Professor *Friedrich Zarncke* in Leipzig.

Ordentliche auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Classe.

Herr Professor *Johann Gustav Droysen* in Berlin.
- —— *Hermann Alfred von Gutschmid* in Kiel.
- —— *Moritz Haupt* in Berlin.
- Geheimer Justiz- und Oberappellationsgerichtsrath *Andreas Ludwig Jacob Michelsen* in Schleswig.
- Professor *Theodor Mommsen* in Berlin.
- Hofrath *Hermann Sauppe* in Göttingen.
- Professor *Gustav Seyffarth* in New-York.
- —— *Karl Bernhard Stark* in Heidelberg.

Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Geheimer Medicinalrath *Ernst Heinrich Weber* in Leipzig, Secretär der mathem.-phys. Classe.
- Geheimer Hofrath *Wilhelm Gottlieb Hankel* in Leipzig, stellvertretender Secretär der mathem.-phys. Classe.
- Professor *Carl Bruhns* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Moritz Wilhelm Drobisch* in Leipzig.

Herr Professor *Gustav Theodor Fechner* in Leipzig.
- Hofrath *Carl Gegenbaur* in Jena.
- Geheimer Regierungsrath *Peter Andreas Hansen* in Gotha.
- Professor *Johann August Ludwig Wilhelm Knop* in Leipzig
- —— *Hermann Kolbe* in Leipzig.
- —— *Rudolph Leuckart* in Leipzig.
- Geheimer Hofrath *Carl Friedrich Wilhelm Ludwig* in Leipzig.
- Geheimer Bergrath *Karl Friedrich Naumann* in Dresden.
- Professor *Carl Neumann* in Leipzig.
- Oberbergrath *Ferdinand Reich* in Freiberg.
- Bergrath *Theodor Scheerer* in Freiberg.
- Professor *Wilhelm Scheibner* in Leipzig.
- Hofrath *August Schenk* in Leipzig.
- —— *Oskar Schlömilch* in Dresden.
- —— *Gustav Wiedemann* in Leipzig.
- Professor *Johann Carl Friedrich Zöllner* in Leipzig.

Ordentliche auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Classe.

Herr Professor *Heinrich d'Arrest* in Kopenhagen.
- —— *Heinrich Richard Baltzer* in Giessen.
- Hofrath *Otto Funke* in Freiburg.
- Professor *Wilhelm Hofmeister* in Tübingen.
- Hofrath *Mathias Jacob Schleiden* in Frankfurt a/M.
- Professor *Samuel Friedrich Nathanael Stein* in Prag.
- —— *Alfred Wilhelm Volkmann* in Halle.
- Geheimer Hofrath *Wilhelm Weber* in Göttingen.

Verzeichniss

der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1872 eingegangenen Schriften.

Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Monatsbericht d. Königl. Preuss. Akad. d. Wiss. zu Berlin. 1871. Sept. — Dec. 1872. Jan. — Juli.

Denkschriften d. Kaiserl. Akad. d. Wiss. Mathematisch-naturwissensch. Cl. Bd. 31. Wien 1872.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wissenschaften. Philos.-histor. Cl. LXVIII. Bd. 2—4. Heft. LXIX. Bd. 1—3. Heft. Wien 1871.

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Mathem.-naturwiss. Cl. Erste Abth. LXIV. Bd. Zweite Abth. LXIV. Bd. Wien. 1871.

Anzeiger d. Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Math.-naturwiss. Cl. Jahrg. VIII. 1871. No. 26 u. 29. Jahrg. IX. 1872. No. 1—20.

Fontes rerum austriacarum. Zweite Abth. Diplomataria et Acta. XXXV. Bd. Wien 1871.

Archiv für österreich. Geschichte. 47. Bd. 2. Hälfte. Wien 1871.

Verhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. 1871. No. 11—18. 1872. No. 1—11.

Jahrbuch der k. k. geologischen Reichsanstalt. 1871. Bd. XXI. No. 3 u. 4. 1872. Bd. XXII. No. 1—3. Wien.

Mittheilungen d. k. k. geograph. Gesellschaft in Wien. 14. Bd. (Der neuen Folge 4. Bd.) 1871. Wien 1871.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Jahrg. 1871. Bd. XXI. Wien 1871.

Ergebnisse der in den Ländern der Ungar. Krone am Anfange d. J. 1870 vollzogenen Volkszählung sammt Nachweisung der nutzbaren Hausthiere. Pest 1871.

Mittheilungen aus dem Jahrbuche der königl. ungarischen geologischen Anstalt. Bd. I. Heft 1. Bd. II. Heft I. Pest 1872.

A magyar Királyi Földtani Intézet Évkönyve. I. II. Kötet. Pest 1871. 1872.

Az Erdélyi Muzeum-Egylet Évkönyvei. Hatodik Kötet. Elsö Füzet. Szerkesztette Brassai Sámuel. Kolozsvártt 1872.

Abhandlungen der philosoph. - philolog. Classe d. k. bayer. Akad. d. Wissensch. 12. Bd. 3. Abth. (In d. Reihe d. Denkschriften d. XLV. Bd.) München 1871.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Classe der k. bayer. Akad. d. Wissensch. zu München. 1871. Heft 5. 6. 1872. Heft 1. München 1871. 1872.

Ueber die Geschichtschreibung unter dem Kurfürsten Maximilian I. Vortrag am 27. März u. s. w gehalten von J. Friedrich. München 1872.

Abhandlungen der mathem.-physikal. Cl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. 11. Bd. 1. Abth. (In d. Reihe d. Denkschriften d. XL. Bd.) München 1871.

Sitzungsberichte der mathem.-physikal. Cl. der k. bayerischen Akad. d. Wissensch. zu München. 1871. Heft 3. 1872. Heft 1. München 1871. 1872.

Die Aufgabe des chemischen Unterrichts gegenüber den Anforderungen der Wissenschaft u. Technik. Rede gehalten am 25. Juli 1871 u. s. w. von E. Erlenmeyer. München 1871.

Dreizehnte Plenar-Versammlung d. histor. Commission bei der k. bayer. Akad. d. Wissensch. Bericht d. Secretariats.

Verzeichniss von 4093 teleskopischen Sternen zwischen 9° und 15° Declination, welche in den Münchener Zonen-Beobachtungen vorkommen, reducirt auf den Anfang des J. 1850 u. s. w. Auf öffentl. Kosten herausgeg. von J. v. Lamont. XII. Supplementband u. s. w. München 1872.

Catalogus codd. latinorum bibliothecae regiae Monacensis. Secundum Andr. Schmelleri indices composuerunt C. Halm, G. Laubmann, G. Meyer. T. I. P. II. Codd. num. 2501—5250 complectens Monachi 1871.

Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Bd. XVI, vom Jahre 1871. Göttingen 1872.

Nachrichten von der königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität aus d. J. 1871. Göttingen 1871.

Zeitschrift des k. sächs. statistischen Bureau's. 1872. XVIII. Jahrg. No. 1—4. Dresden.

Dritter Jahresbericht des Landes-Medicinal-Collegiums über das Medicinalwesen im Königreiche Sachsen auf d. J. 1869 Dresden 1872.

Jahresbericht der Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Dresden. Juni 1869—Mai 1870. September 1871—April 1872. Dresden 1870. 1872.

Vierteljahrsschrift der astronom. Gesellsch. VI. Jahrg. 1871. 4. Heft. VII. Jahrg. 1872. 1. Heft. 3. Heft. Leipzig 1871. 1872.

Resultate aus den meteorologischen Beobachtungen, angestellt an 25 k. sächs. Stationen im J. 1869. Von C. Bruhns. Leipzig 1871.

Monatliche Uebersichten der Resultate aus den meteorologischen Beobachtungen auf den k. sächs. Stationen im J. 1871. Titelblatt und Bogen 4 bis 7. S. XXIII—LII.

Monatliche Berichte über die Resultate aus den meteorologischen Beobachtungen an den k. sächs. Stationen im J. 1871. Dresden 1872. — Dieselben im J. 1872. Dresden 1872. Bogen 1 und 2.

Neues Lausitzisches Magazin. 48. Bd. 2. (Doppel-) Heft. — 49. Bd. 1. Hälfte. Görlitz 1871. 1872.

Zeitschrift f. d. gesammten Naturwissenschaften, redig. von C. G. Giebel. Bd. XXXVIII, oder Neue Folge Bd. IV. Berlin 1871.

Lotos, Zeitschrift für Naturwissenschaften. 21. Jahrg. Prag 1871.

Die Fortschritte der Physik im J. 1868, dargestellt von der physikal. Gesellschaft zu Berlin. Jahrgang XXIV. Berlin 1872.

Namen- und Sach-Register zu den Fortschritten der Physik. Bd. I bis XX. Berlin 1872.

Protocolle der Verhandlungen der zweiten Conferenz der Commission für die Vorberathung der Beobachtung des Venusdurchganges von 1874. Berlin, 20—28. März 1871. 2 Exx.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Vierter Jahrg. (1871). No. 18. Fünfter Jahrg. (1872). No. 1—14. Berlin 1872.

Verhandlungen der Berliner Medicin. Gesellschaft aus den Jahren 1867 und 68. Berlin 1871. — Aus den Jahren 1869, 1870 und 71. Berlin 1872.

Schriften d. königl. physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. XII. Abth. 1. 2. Königsberg 1871—72. — Jahrg. XIII. Abth. 1. Königsberg 1872.

Bericht über die Sitzungen der naturforschenden Gesellschaft zu Halle im J. 1870.

Einundzwanzigster Jahresbericht der Naturhistorischen Gesellschaft zu Hannover. 1870—71. Hannover 1871.

Schriften der Universität zu Kiel aus d. J. 1871. Bd. XVIII. Kiel 1872.

Jahresbericht d. physikal. Vereins zu Frankfurt a/M. f. d. Rechnungsjahr 1870—1871. Frankf. a/M. 1872.

Jahrbuch des Vereins v. Alterthumsfreunden im Rheinlande. Heft L. u. LI. Bonn 1871.

Vicus Aurelii oder Oehringen zur Zeit der Römer. Von O. Keller. Fest-Programm zu Winckelmanns Geburtstage am 9. Dec. 1871. Bonn 1871.

Sitzungsberichte der physikal.-medicin. Societät zu Erlangen. Heft 3. Mai 1870—Aug. 1871. Erlangen 1871.

Verhandlungen der physikal.-medicin. Gesellschaft in Würzburg. Neue Folge. Bd. II. Heft 4. Bd. III. Heft 1. 2. Würzburg 1872.

Abhandlungen der Naturhistorischen Gesellschaft zu Nürnberg. V. Bd. Nürnberg 1872.

Dritter Bericht des botanischen Vereins in Landshut über die Vereinsjahre 1869—71.

XXVIII. & XXIX. Jahresbericht der Pollichia, eines naturwissenschaftlichen Vereins der Rheinpfalz. Dürkheim a. d. H. 1871.

Elfter und zwölfter Bericht über die Thätigkeit des Offenbacher Vereins für Naturkunde im Vereinsjahre 1869/70 und 1870/71. Offenbach a/M. 1870. 1871.

Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol und Vorarlberg. Dritte Folge. 16. Heft. Innsbruck 1871.

Mittheilungen des histor. Vereines für Steiermark. 19. Heft. Graz 1871.

Beiträge zur Kunde steiermärk. Geschichtsquellen. 8. Jahrg. Graz 1871.

Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. 15. Jahrg. Heft 1—4. 16. Jahrg. Heft 1—4. Zürich 1870. 1871.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern aus d. J. 1870. No. 711—744. Bern 1871.

Basler Chroniken, herausgeg. von d. histor. Gesellschaft in Basel. 1. Bd. Leipzig 1872.

Jahresbericht d. Naturforschenden Gesellschaft Graubündens. Neue Folge. Jahrg. 16 (1870—71). Chur 1872.

Neue Denkschriften d. allgem. Schweizer. Gesellschaft für d. gesammte Naturwissenschaft. Bd. 24 oder 3. Decade, Bd. 4. Zürich 1871.

Nederlandsch Meteorologisk Jaarboek voor 1869, uitgegeven door het Kon. Nederl. Meteorologisk Instituut. Jaarg. 21. Deel 2. — voor 1870. Jaarg. 22. Deel 1. Utrecht 1870.

Programma van de Hollandsche Maatschappij d. Wetenschappen te Haarlem. Voor het Jaar 1869. — voor het Jaar 1870. — voor het Jaar 1871.

Die künstlich dargestellten Mineralien nach G. Rose's krystallo-chemischem Mineralsysteme geordnet, von C. W. C. Fuchs. Eine v. d. Holländ. Ges. d. Wiss. in Haarlem am 20. Mai 1871 gekrönte Preisschrift. (Natuurkund. Verhandelingen, 3de Verzameling. Deel I.) Haarlem 1872.

Verslag van het Verhandelde in de algemeene Vergadering van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap van Kunsten en Wetenschappen gehouden 1871. Utrecht 1871.

Aanteekeningen van het Verhandelde in de Sectie-Vergaderingen van het Provinciaal Utrechtsch Genootschap u. s. w. ter Gelegenheid van de algemeene Vergadering, gehouden in het Jaar 1870. Utrecht 1870.

Leven en Werken van Willem Jansz. Blaeu, door P. J. H. Baudet. Uitgegeven door het Provinc. Utrechtsch Gen. van K. en W. Utrecht 1871.

Memoria Ludov. Casp. Valckenarii. Scripsit Io. Theod. Bergmann. Ed. Soc. art. et doctr. Rheno-Trajectina. Rheno-Trajecti 1871.

Processen-Verbaal van de gewone Vergaderingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen te Amsterdam. Afd. Natuurkunde, Mei 1870 — April 1871.

Nederlandsch Kruidkundig Archief. Versl. en Mededeel. d. Nederl. Botan. Vereen. Ser. 2. Deel 1. St. 1. Nijmegen 1871.

Verhandelingen rakende de natuurlijke en geopenbaarde Godsdienst, uitgeg. door Teylers Godgeleerd Genootschap. Nieuwe Serie. Deel 2. Haarlem 1871. Bes. Titel: Moral und Religion nach ihrem gegenseitigen Verhältniss geschichtlich u. philosophisch erörtert von O. Pfleiderer, Dr. u. Prof. d. Theol. zu Jena. Von der Teyler'schen Theolog. Gesellschaft gekrönte Preisschrift. Harlem 1871.

Archives Néerlandaises des sciences exactes et naturelles publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. T. VI. Livr. 4 et 5. T. VII. Livr. 1. 2. 3. La Haye 1871. 1872.

Elfde Jaarlijksch Verslag betr. de Verpleging en het Onderwijs in het Nederlandsch Gasthuis voor Ooglijders, door F. C. Donders. Mei 1870. Utrecht 1870.

Publications de l'Institut Royal Grand-Ducal de Luxembourg. Section des sciences naturelles et mathématiques. Tome XII. Luxembourg 1872.

Bullettino dell' Instituto di Corrispondenza archeologica per l'anno 1872. No. I — XII, Gennajo — Dicembre 1872. Roma.

Elenco de' Partecipanti dell' Instituto di Corrispondenza archeologica alla fine dell' anno 1872.

Memorie dell' Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Vol. XVI. S. 1 — 563. Vol. XVII. S. 1—188. Venezia 1871. 1872.

Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. Tomo XVI, Serie III, Disp. V — X. Venezia 1870 — 1871. — Tomo I, Serie IV, Disp. I — IX, Venezia 1871 — 72.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di scienze matematiche e naturali. Vol. XII. III. della Serie III. Fasc. II. III. IV. Milano 1871—72.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di lettere e scienze morali e politiche. Vol. XIII. III della Serie III. Fasc. II. Milano 1871.

R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Ser. II. Vol. III. Fasc. XVI—XX e ultimo. Vol. IV. Fasc. I—XX e ultimo. Vol. V. Fasc. I—VII. Milano 1870—1872.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. VII, Disp. 1—7. Torino 1871—72.

Atti della Fondazione scientifica Cagnola. Vol. V. Parte II, che abbraccia l'anno 1870. Parte III, che abbraccia l'anno 1871. Nebst Titel und Index zu Vol. V.

Il nuovo Cimento. Giornale di Fisica ecc. Ser. 3. S. V—VI. Gennajo 1871 —72. Pisa 1871.

Publicazioni del Circolo Geografico Italiano. Anno 1872. Secondo bimestre, Marzo ed Aprile. Torino 1872.

Le condizioni sociali dei nostri tempi, memoria letta all' Accademia di scienze e lettere di Palermo dal Consigliere Giuseppe di Menza. Palermo 1872.

Philosophical Transactions of the Roy. Society of London. Vol. 160 (1870) P. 2, Vol. 161 (1871) P. 1. London 1870—71.

Proceedings of the Roy. Society of London. Vol. XIX. No. 124—129. London 1871.

Catalogue of scientific Papers, 1800—1863, compiled and published by the R. Society of London. Vol. V. (Pra. — Tiz.) London 1871.

The Royal Society. 30th Nov. 1870.

Proceedings of the Royal Institution of Great Britain. Vol. VI. Part 3 & 4. (No. 54 & 55.) London 1871.

Memoirs of the R. Astronomical Society. Part I, Vol. 39, 1870—71. London. 1871.

A general Index to the first thirty-eight Volumes of the Memoirs of the R. Astron. Soc. London 1871.

Transactions of the R. Society of Edinburgh. Vol. 26. Part 2 & 3.

Proceedings of the Roy. Society of Edinburgh. Session 1870—71. Vol. VII. No. 82 & 83.

The Journal of the R. Dublin Society. No. 40. Dublin 1871.

Journal of the R. Geological Society of Ireland. Vol. 13. P. 1. (oder (2) Vol. 3. P. 1.) 1870/71.

Transactions and Proceedings of the R. Society of Victoria. Vol. IX. Part 2. Melbourne 1869.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences, belles-lettres et arts de Lyon. Classe des lettres. Tome XIV. Paris et Lyon 1868—1869.

Mémoires de l'Académie des sciences, belles-lettres et arts de Lyon. Classe des sciences. Tome XVIII. Lyon et Paris. 1870—71.

Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Tome I. Cahier 1 et 2. 1854 et 1855. Tome II. Cah. 1 et 2. 1861 et 1863. Tome III. Cah. 1 et 2. 1864 et 1865. Tome IV. Cah. 1 et 2. 1866. Tome V. Cah. 1, 2 (pag. 65—184) et 3 (pag. 279—394) 1867. Tome VII (pag. 145—445, nebst Index) 1868. Tome VIII. Cah. 1, 2 et 3. 1870 et 1872. Bordeaux.

Mémoires de la Société Nationale des sciences naturelles de Cherbourg. T. XVI. (Deuxième Série. T. VI.) Paris 1871—72.

Thermochemiske Undersøgelser. Undersøgelser over Basernes Neutralisationsvarme, ved Jul. Thomsen. (Vidensk. Selsk. Skr., 5 Række, naturvidensk. og mathem. Afd. Bd. 9. No. 5.) Kjøbenhavn 1871.

Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Ny Följd, Bd. 7, H. 2. Bd. 8. Bd. 9, Delen 1. (1868—1870.)

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar. Årgången 26—27. Stockholm 1870—71.

Lefnadsteckningar öfver Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens efter År 1854 aflidna Ledamöter. Bd. I. H. 2. Stockholm 1872.

Nova Acta Regiae Societatis scientiarum Upsaliensis. Ser. III. Vol. VIII. Fasc. 1. Upsala 1871.

Sveriges geologiska Undersökning. Tolfte Häftet. Bladen 42—45. — Och Nägra. Ord. Till Upplysning 43—45. Stockholm 1871.

Prodoljenie swoda zakonow Rossiïskoi Imperiï; izdannago w 1857 godu. Ćast' I. Ćast' II. Sankpeterburg 1871.

Mémoires de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. VIIe Sér. Tome XVI. No. 9—14. Tome XVII. No. 1—12 et dernier. Tome XVIII. No. 1—7. St.-Pétersbourg 1871. 1872.

Bulletin de l'Académie Impériale des sciences de St.-Pétersbourg. Tome XVI. No. 2—6 et dernier. Tome XVII. No. 1—3. St.-Pétersbourg 1871. 1872.

Jahresbericht am 27. Mai 1871 dem Comité der Nicolai-Hauptsternwarte abgestattet vom Director der Sternwarte. (Aus dem Russischen übersetzt.) St. Petersburg 1871.

Tabulae quantitatum Besselianarum pro annis 1875 ad 1879 computatae. Ed. Otto Struve, speculae Pulcoviensis Director. (Contin. tabularum annis 1861 et 1867 editarum.) Petropoli 1871.

Repertorium für Meteorologie, herausg. von der Kais. Akad. d. Wissensch., redig. von H. Wild. Bd. II. Heft 2. St. Petersburg 1872.

Compte-Rendu de la Commission Impériale Archéologique pour l'année 1869. St.-Pétersbourg 1870. — Der dazu gehörige Atlas. St. Pétersbourg 1870.

Trudy Imperatorskago S. Peterburgskago Botanićeskago Sada. Tom I. Wypusk I. S. Peterburg 1871.

Bulletin de la Société Impériale des Naturalistes de Moscou. Année 1871. No. 1—4. Année 1872. No. 1. Moscou 1871. 1872.

Izwjestia Kazanskago Universiteta. 1866. Tom II. Kazan 1866. 6 Hefte. — 1867. Tom III. Kazan 1867 u. 1868. 6 Hefte (5. u. 6. zusammen). — 1868. Tom IV. Kazan 1868 u. u. 1869. 6 Hefte (3. u. 4., 5. u. 6. zusammen). — 1869. Tom V. Kazan 1869. 4 Hefte.

Ućenya Zapiski Kazanskago Universiteta po otdjeleniu fiziko-matematićeskich i medicinskich nauk. 1864. Heft I u. II. Kazan 1865.

Ućenya u. s. w. po otdjeleniu istoriko-filologićeskich i politiko-juridićeskich nauk. 1864. Heft I u. II. Kazan 1866.

Izwjestia i Ućenya Zapiski Kazanskago Universiteta. 1869. Heft 5. — 1870. Heft 1 u. 2. — 1871. Heft 1. 2. 3. Kazan 1871.

Teoria woln', proischodæśćich ot postupatel'nago wnješnago dawlenia. Poćetnago ćlena Kazanskago Universiteta A. Popowa. Kazan 1868.

Zapiski Noworossiïskago Obśćestwa Estestwonspytateleï. Tom 1. Odessa 1872.

Zapiski u. s. w. 1. Priloženie k Tomu I. Odessa 1872

Zapiski u. s. w. 2. Priloženie k Tomu I. Odessa 1872.

Λόγος κατ' ἐντολὴν τῆς ἀκαδημαϊκῆς Συγκλήτου ἐκφωνηθεὶς ἐν τῷ ἱερῷ τῆς Μητροπόλεως ναῷ ὑπὸ Νικηφόρου Καλογέρα τῇ 30 Ἰανουαρίου 1872, ἑορτῇ τῶν τριῶν ἱεράρχων, τελεσθέντος τοῦ μνημοσύνου ὑπὲρ τῶν εὐεργετῶν καὶ συνδρομητῶν τοῦ Πανεπιστημίου. Ἀθήνησιν 1872. –

Κρίσις τοῦ Βουτσιναίου ποιητικοῦ ἀγῶνος τοῦ ἔτους 1871. *Ἀναγνωσθεῖσα ἐν τῇ μεγάλῃ Αἰθούσῃ τοῦ ἐν Ἀθήναις ἐθνικοῦ Πανεπιστημίου ὑπὸ τοῦ εἰσηγητοῦ Γ. Μιστριώτου. Ἀθήνησι*, 1871.

Λόγος ἐκφωνηθεὶς τῇ κῇ Νοεμβρίου 1871 *ἡμέρᾳ τῆς ἐπισήμου ἐγκαθιδρύσεως τῶν νεῶν ἀρχῶν τοῦ ἐθνικοῦ Πανεπιστημίου ὑπὸ τοῦ πρώην πρυτανέως Κ. Βουσάκη, τακτικοῦ καθηγητοῦ τῆς φυσιολογίας, παραδιδόντος τὴν πρυτανείαν τῷ διαδόχῳ αὐτοῦ, Εὐθυμίῳ Καστόρχῃ τακτικῷ καθηγητῇ τῆς λατινικῆς φιλολογίας. Ἀθήνησι*, 1872.

Ἡ ἐγκαινίασις τῆς β' περιόδου τῶν Ὀλυμπίων τῇ 1 *Νοεμβρίου* 1870 *ἐν Ἀθήναις.*

Κατάλογος τῶν ἀρχαίων νομισμάτων χωρῶν, ἐθνῶν, πόλεων καὶ βασιλέων τοῦ Ἀθήνησιν ἐθνικοῦ νομισματικοῦ Μουσείου, κατατεταγμένων καὶ περιγεγραμμένων ὑπὸ Ἀχιλλέως Ποστολάκα, ἐκδοθεὶς δαπάνῃ τοῦ ἐθνικοῦ Πανεπιστημίου. Τόμος α'. Ἀφ' Ἱσπανίας μέχρι τῶν τῆς Μακεδονίας βασιλέων, μετὰ πέντε λιθογραφικῶν πινάκων. Ἀθήνησιν ΑΩΟΒ' (1872).

Περὶ τῆς ἀρχῆθεν κοινωνίας τῶν Ἑλλήνων πρὸς τοὺς Ἰτάλους καὶ Ῥωμαίους καὶ τῆς ἐντεῦθεν ἐπενεργείας αὐτῶν πρὸς ἐκπολιτισμὸν τούτων. Ὑπὸ Εὐθυμίου Καστόρχη. Ἀθήνησι. 1872. Angehängt ist: *Τὰ τῆς τελετῆς τῶν ἀποκαλυπτηρίων τοῦ ἀνδριάντος τοῦ ἀοιδίμου Πατριάρχου Γρηγορίου τοῦ Ε γενομένης τῇ* 25 *Μαρτίου τοῦ* 1872. *Ἐν Ἀθήναις*, 1872).

Annals of the Lyceum of Nat. Hist. in the City of New-York. Vol. IX, 13. Vol. X, 1—7. 1870—72.

Proceedings of the Lyceum of Nat. Hist. in the City of New-York. 1870. Fol. 1—15.

Transactions of the American Philosophical Society held at Philadelphia. New Series. Vol. XIV. Part III. Philadelphia 1871.

Proceedings of the American Philosophical Society held at Philadelphia, No. 86. 87. (Vol. XII.) Philadelphia 1871.

Proceedings of the American Association for the advancement of science. Meeting 19, August 1870. Cambridge 1871.

Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences. New Series. Vol. X. Part I. Cambridge & Boston 1868.

Bulletin of the Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College in Cambridge. Vol. III. No. 1.

Report on the Brachyopoda by W. H. Dall.

Annual Report of the Trustees of the Museum of Comparative Zoölogy at Harvard College in Cambridge for 1870. Boston 1871.

Analytical Alphabet for the Mexican and Central-American Languages by H. Berendt. Publ. by the American Ethnological Society. New-York 1869.

Washington Observations for 1869. Appendix. Washington 1871.

Archives of Science and Transactions of the Orleans County Society of Natural Sciences. Vol. I. No. 1—3. Oct. 1870 — April 1871. Newport, Orleans Co. Vermont. 2 Exx.

Bulletin of the Wisconsin Academy of Sciences, Arts and Letters. No. 2—5. Madison 1871.

Preliminary Report of the U. S. Geological Survey of Montana and adjacent Territory by F. V. Hayden. Washington 1872.

Report of the Superintendent of the U. S. Coast Survey for the year 1868. Washington 1871.

A Letter concerning Deep-Sea Dredgings, addressed to Prof. B. Peirce, Superintendent U. St. Coast Survey, by Louis Agassiz. Cambridge 2|12 1871. Zwei Exx.

Report of the Commissioner of Agriculture for the year 1870 and 1871.

Report of the Commissioner of Agriculture on the Diseases of Cattle in the U. S. Washington 1871.

Special Report on Immigration by Edw. Young. Bureau of Statistics. 1871. Washington 1872.

Transaction of the Wisconsin State Agricultural Society. Vol. 8. 1869. Vol. 9. 1870. Madison Wisc.

Annual Report of the Board of Regents of the Smithsonian Institution for the year 1870. Washington 1871.

Journal of the American Oriental Society. Vol. X. No. 1. New Haven 1872.

Circular No. 3. War Departement, Surgeon General's Office, Washington 17|8 1871. Report of Surgical Cases in the Army. Washington 1871.

Observations made at the magnetical and meteorological Observatory at Batavia. Published by order of the Government of Netherlands-India. Vol. I. Batavia 1871.

Sociedad de Naturalistas colombianos. Catálogo de los Objetos enviados a la exposicion nacional de 1871. Bogota 1871.

Exposicion nacional del 20|7 de 1871. Ensayo descriptivo de las Palmas de S. Martin, Catálogo de las Colecciones mineralójica i geolójica del Estado S. de Antiquia, i Informe de los Exploradores del Territorio de S. Martin. Bogota 1871.

Einzelne Schriften.

Historische Nachrichten der Familie von Malortie von 1132—1872. Zusammengestellt von Ernst von Malortie und als Manuscript gedruckt 1872. Hannover.

Die Echinoiden der österreich.-ungar. oberen Tertiärablagerungen. Von Gust. Laube. Wien 1871.

Die unseren Culturpflanzen schädlichen Insekten von Gust. Künstler. Wien 1871.

Ueber die Weizenverwüsterin Chlorops taeniopus Meig. und über die Mittel zu ihrer Bekämpfung von Max Nowicki. Wien 1871.

Grundlagen des Vogelschutzgesetzes von G. Ritter v. Frauenfeld. Wien 1871.

Sendschreiben an Herrn Prof. Dr. Fr. Zarncke über einen getauften Juden Paulus Aemilius und was mit ihm zusammenhängt, von R. Gosche. Guben 1872.

Meteorologische Beobachtungen angestellt in Dorpat im J. 1866 und im J. 1870 von A. v. Oettingen.

Icones selectae Hymenomycetum nondum delineatorum, editae ab Elia Fries. Holmiae 1867. 6 Hefte mit Kupfertafeln.

Minnesteckning öfver Erik Gustaf Geijer af F. F. Carlson. Stockholm 1871.

On some Elementary Principles in Animal Mechanics, No. 4, by Sam. Haughton.

On the Constituent Minerals of the Granits of Scotland, by Sam. Haughton.

Observations on Metalliferous Deposits and on Subterranean Temperature, by W. J. Henwood. Vol. I. II. Penzauce 1871.

Observations of Comets from B. C. 611 — A. D. 1640 extracted from the Chinese Annals by John Williams. London 1871.

Report of a visit to the Sioux and Ponka Indians on the Missouri River. July 1872. Philadelphia.

Bericht über die im J. 1872 den Herzogl. Sammlungen des Schlosses Friedenstein zugegangenen Geschenke.

SITZUNG AM 15. FEBRUAR 1872.

P. A. Hansen, *Bemerkungen zu einem vor der permanenten Commission der europäischen Gradmessung am 21. September vorigen Jahres zu Wien gehaltenen Vortrage.*

In der am 21. September vorigen Jahres zu Wien stattgefundenen Sitzung der permanenten Commission der europäischen Gradmessung hat im Auftrage des Herrn General-Lieutenant z. D. *Baeyer* Herr *Weingarten* einen Vortrag gehalten, in welchem unter anderm einer Arbeit von mir (Supplement zu den geodätischen Untersuchungen im IX. Bde der Abhandlungen der K. S. Ges. der Wiss.) sehr starke Fehler zur Last gelegt werden. Die permanente Commission hat, ohne ein Wort des Bedenkens hinzuzufügen, und ohne dass, wie es scheint, eine Berathung darüber stattgefunden, diesem Vortrag durch Aufnahme desselben in ihr Protocoll ihre Sanction ertheilt. Die erhobenen Angriffe sind zwar zunächst an die Adresse des Herrn Prof. *Scheibner* in Leipzig gerichtet, welcher als der Verfasser eines in der Vierteljahrschrift der astronomischen Gesellschaft enthaltenen Referats über meine Arbeit bezeichnet wird. Allein selbstverständlich kann einem Referenten, wenn er über den wissenschaftlichen Inhalt einer Schrift getreu berichtet, nicht die Vertretung aller einzelnen darin enthaltenen Sätze und Resultate obliegen. Da nun die Anschuldigungen, die in jenem Vortrage meiner Arbeit gemacht worden sind, jedes Grundes entbehren und ihre Unrichtigkeit sich sehr leicht erkennen lässt, so könnte ich sie gänzlich unbeachtet lassen und würde kein Wort der Entgegnung darauf vorbringen, wenn sie blos dem Herrn *Weingarten* zur Last fielen, gleichwie ich bisher die meisten seiner Angriffe ihrer Gehaltlosigkeit wegen unberücksichtigt gelassen habe.

Aber im gegenwärtigen Falle ist die Sachlage wesentlich eine andere. Es ist nicht Herr *Weingarten* allein, welcher gegen mich auftritt, sondern er hat im Auftrage des Herrn General-

Lieutenant z. D. *Baeyer* gehandelt. Die permanente Commission, die ihrer Bestimmung zufolge das wissenschaftliche Organ der europäischen Gradmessung sein soll, und namhafte Männer zu ihren Mitgliedern zählt, hat unter dem Vorsitze des k. k. Feldmarschall-Lieutenants Herrn *v. Fligely*, durch Aufnahme des Vortrages in ihre Protocolle, Vorlesung derselben in der allgemeinen Conferenz und Veröffentlichung durch den Druck sich an dieser Angelegenheit betheiligt. Diese Umstände gebieten mir mich zu rechtfertigen.

Es handelt sich um die Reduction der Winkel eines auf dem abgeplatteten Revolutionsellipsoid liegenden sphäroidischen Dreiecks auf die eines sphärischen von denselben Seiten.

In der »Supplement zu den geodätischen Untersuchungen u. s. w.« benannten Abhandlung, die den Schriften der Königl. Sächsischen Gesellschaft d.W. zu Leipzig einverleibt, aber, wie alle Abhandlungen dieser Gesellschaft, auch für sich erschienen ist, habe ich eine neue, sehr einfache Formel zu obigem Zwecke gegeben, die für jede krumme Oberfläche gilt. Sie ist, soweit sie hier in Betracht kommt, die folgende:

$$\delta A = -3\frac{\Delta}{40}\left\{2p' + q' + r'\right\} - \frac{\Delta}{480}F\left\{2p + q + r\right\}$$

und es bedeuten daselbst Δ die Fläche des Dreiecks, $p+1$, $q+1$, $r+1$ die Krümmungsmaasse der Oberfläche in den Winkelpunkten (oder Eckpunkten) des Dreiecks, $p'+1$ das Krümmungsmaass in der normalen Projection des Schwerpunkts des Dreiecks, und $q'+1$, $r'+1$ die Krümmungsmaasse sehr nahe in den ersten Drittheilungspunkten der an dem Winkel A anliegenden Dreiecksseiten. Es ist ferner

$$F = 4 - a^2 + 3\,(b^2 + c^2)$$

wenn a, b, c die Dreiecksseiten sind.

Diese Formel schliesst sich in ihrer Form der ursprünglichen *Gauss*ischen an, giebt in ihrer Anwendung auf das Revolutionsellipsoid von kleiner Excentricität und manche andere Oberflächen die Winkelreductionen δA, δB, δC bis auf Grössen achter Ordnung (ausschliesslich) genau, und liefert in numerischer Beziehung diese Winkelreductionen drei Mal genauer, als die von Herrn *Weingarten* empfohlene Transformation meiner früheren Formel.

In Bezug auf das Revolutionsellipsoid, dessen Excentricität e eine Grösse der ersten Ordnung ist, haben die oben mit p', q', r' etc. benannten Functionen die folgenden Ausdrücke:

$$p' = -(e^2 + \tfrac{1}{2}e^4)\cos 2\bar{\delta} + e^4(3\cos^2 2\bar{\delta} - 1)$$
$$q' = -(e^2 + \tfrac{1}{2}e^4)\cos 2\bar{\beta}_{,} + e^4(3\cos^2 2\bar{\beta}_{,} - 1)$$
$$r' = -(e^2 + \tfrac{1}{2}e^4)\cos 2\bar{\gamma}_{,} + e^4(3\cos^2 2\bar{\gamma}_{,} - 1)$$
$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

wo $\bar{\delta}$, $\bar{\beta}_{,}$, $\bar{\gamma}_{,}$ etc. die reducirten Polardistanzen der betreffenden Punkte auf dem Ellipsoid sind. Man kann diese Functionen ein für alle Mal in Eine Tafel bringen, die die reducirte Polardistanz zum Argument hat, und welcher die numerischen Werthe des betreffenden Differentialquotienten hinzugefügt werden müssen, damit man sie auf verschiedene Werthe von e anwenden kann. In der Anwendung der obigen Formel für δA sind deshalb nur die betreffenden Werthe von $\bar{\delta}$, $\bar{\beta}_{,}$, etc. zu berechnen, wofür ich in der angezogenen Abhandlung sehr einfache Formeln gegeben habe, deren Anwendung geringe Mühe verursacht.

Es ergiebt sich leicht, bis zu welchem Grade der Genauigkeit diese Bögen berechnet werden müssen. Da in allen solchen Formeln zur Reduction der Winkel die Dreiecksseiten als Grössen erster Ordnung zu betrachten sind, so ist die Dreiecksfläche Δ eine Grösse zweiter Ordnung, und da ausserdem auch e^2 eine solche Grösse ist, so folgt, dass $\bar{\delta}$, $\bar{\beta}_{,}$, etc. bis auf Grössen vierter Ordnung (ausschliesslich) genau berechnet werden müssen, um in der That die Winkelreductionen δA, δB, δC bis auf Grössen achter Ordnung genau zu erhalten.

Wenden wir uns nach diesen Erklärungen zu dem oben genannten, vor der permanenten Commission gehaltenen *Baeyer-Weingarten*'schen Vortrag, so finden wir zuerst darin, abgesehen von einigen vorher vorkommenden Fehlern, die folgenden zwei Stellen:

»Es ist bekannt, dass die Aufgabe: die reducirte Breite »eines Punktes zu finden, der eine durch ihre Endpunkte »gegebene geodätische Linie in gegebenem Verhältnisse »theilt, *) zu den transcendenten gehört, und dass die Lösung

*) Ich wüsste nicht, dass diese Aufgabe früher vorgekommen wäre.

»derselben in einer gewünschten Annäherung nur durch an-»gemessene Reihenentwickelungen zu ermöglichen ist. Es »muss daher jedem Kundigen sofort auffallen, dass »die von Herrn *Hansen* mitgetheilte Lösung nur die Anwen-»dung sphärisch trigonometrischer Formeln verlangt. Und »in der That beruht dieselbe auf einem, durch die ganzen »mitgetheilten Entwickelungen sich hindurch ziehenden Irr-»thum.«

Und weiter unten:

»Der erste Fehler der *Hansen*'schen Berechnungsweise »besteht nun darin, dass für das Complement der reducirten »Breite des Theilpunktes einer geodätischen Linie *AB* auf »dem Revolutionsellipsoid, die Poldistanz desjenigen Punktes »genommen wird, der die reducirte geodätische Linie (die »Seite des correspondirenden Kugeldreiecks *A′B′*) in dem »nämlichen Verhältnisse theilt. Dieser Fehler ist von einer »Ordnung, die durch die Multiplication des Quadrats e^2 der »Excentricität des Sphäroids mit einer Grösse von der Ord-»nung der getheilten Seitenlänge gegeben wird; daher, »wenn, wie es am angeführten Orte geschehen ist, *e* von der »Ordnung der Dreiecksseiten angenommen wird, von der »dritten Ordnung. Seine Vernachlässigung ist, der Ver-»sicherung auf Seite 336 Zeile 6 von oben allerdings zuwi-»der, unstatthaft.«

Um das Unzusammenhängende der im vorstehenden Citat enthaltenen Schlüsse zu zeigen, werde ich mein Verfahren ausführlich erklären.

Zu jedem Dreieck, welches man auf irgend einem beliebigen Revolutionsellipsoid zwischen den. Endpunkten einer geodätischen Linie und einem der beiden Pole dieses Ellipsoids bilden kann, lässt sich mit geometrischer Strenge ein Corollardreieck auf der Kugel construiren, dessen zwei Seiten den reducirten Polardistanzen der Endpunkte der geodätischen Linie auf dem Ellipsoid, und dessen dritte Seite der reducirten Länge dieser geodätischen Linie gleich sind. Die beiden an dieser Seite anliegenden Winkel des Corollardreiecks sind den betreffenden Winkeln des sphäroidischen Dreiecks überdies gleich. Hieraus folgt ohne Weiteres, dass man für jeden beliebigen Theil- oder Verlängerungspunkt der geodätischen Linie die reducirte Polardistanz, und die Winkel derselben mit der geodäti-

schen Linie, durch sphärisch-trigonometrische Rechnung strenge erhält, wenn man im Voraus die dem Theil- oder Verlängerungspunkt zukommende Länge der reducirten geodätischen Linie berechnet hat.

Die Berechnung der reducirten Länge einer geodätischen Linie hängt freilich von einer transcendenten Gleichung ab, aber diese kann, wenigstens wenn die Excentricität e des Ellipsoids klein ist, in eine nach den geraden Potenzen von e fortschreitende, stark convergirende Reihe aufgelöst werden, deren Coefficienten aus trigonometrischen Functionen der Azimuthe und reducirten Polardistanzen der Endpunkte der geodätischen Linie bestehen.

Man kann also die ganze Aufgabe durch Anwendung sphärischer, trigonometrischer Ausdrücke neben der Excentricität e mit jeder beliebigen Genauigkeit lösen, und dass dieses sich so verhält, kann nur Unkundigen auffallen.

Sei σ die Länge irgend einer geodätischen Linie und χ die reducirte Länge derselben, dann giebt die Reihenentwickelung der oben erwähnten transcendenten Gleichung, wenn man bei den beiden ersten Gliedern derselben stehen bleibt,

$$\chi = \sigma + \tfrac{1}{2} e^2 \sigma \left\{ \sin^2 \tfrac{1}{2}(k + k') - \sin k \cos k' \cos^2 \tfrac{1}{2}(l - l') \right\}$$

wo k und k' die reducirten Polardistanzen der Endpunkte der geodätischen Linie, und l und l' die Azimuthe an diesen Endpunkten bezeichnen. Da in dem Falle, um welchen es sich hier handelt, σ von der ersten Ordnung ist, so ist das letzte Glied der vorstehenden Gleichung von der dritten Ordnung, und da diese Gleichung ausserdem bis auf Grössen der fünften Ordnung genau ist, so reicht sie zu dem hier zu erreichenden Zweck vollständig aus.

Sei nun n irgend eine Zahl, die kleiner als Eins ist, dann ist $n\sigma$ irgend ein Theil der geodätischen Linie σ, und wenn $\chi_{,}$ die reducirte Länge der Linie $n\sigma$ bezeichnet, die denselben Anfangspunkt hat wie σ, so ist $\chi_{,}$ bis auf Grössen fünfter Ordnung durch die Gleichung

$$\chi_{,} = n\sigma + \tfrac{1}{2} n\sigma e^2 \left\{ \sin^2 \tfrac{1}{2}(k + k_{,}) - \sin k_{,} \sin k \cos^2 \tfrac{1}{2}(l - l_{,}) \right\}$$

gegeben, in welcher $k_{,}$ und $l_{,}$ reducirte Polardistanz und Azimuth des Endpunkts von $n\sigma$ bedeuten, während k und l wieder dasselbe in Bezug auf den Anfangspunkt bezeichnen. Da aber σ eine Grösse erster Ordnung ist, so sind auch die Unterschiede

$k - k'$ und $180^0 + l - l'$, folglich aus mehrerem Grunde die Unterschiede $k - k_,$ und $180^0 + l - l_,$, Grössen der ersten Ordnung. Setzt man daher

$$k' - k_, = \delta k,\ l' - l_, = \delta l$$

so sind auch δk und δl Grössen erster Ordnung, und die Entwickelung des Coefficienten des letzten Gliedes der vorstehenden Gleichung für $\chi_,$ giebt

$$\begin{aligned}\sin^2\tfrac{1}{2}(k + k_,) - \sin k \sin k_, \cos^2\tfrac{1}{2}(l - l_,) = \\ \sin^2\tfrac{1}{2}(k + k') - \sin k \sin k' \cos^2\tfrac{1}{2}(l - l') \\ - \tfrac{1}{2}\delta k (\cos k \sin k' - \sin k \cos k' \cos (l - l')) \\ + \tfrac{1}{2}\delta l \sin k \sin k' \sin (l - l')\end{aligned}$$

Es wird folglich bis auf Grössen fünfter Ordnung

$$\begin{aligned}\chi_, = n\chi - \tfrac{1}{2} n \sigma e^2 \delta k (\cos k \sin k' - \sin k \cos k' \cos (l - l')) \\ + \tfrac{1}{2} n \sigma e^2 \delta l \sin k \sin k' \sin (l - l')\end{aligned}$$

und da hier die beiden letzten Glieder von der vierten Ordnung sind, so ist bis auf Grössen vierter Ordnung

$$\chi_, = n\chi.$$

Ein anderer, sehr einfacher Beweis dieses Satzes, von welchem weiter unten Gebrauch gemacht werden wird, lässt sich wie folgt führen. Aus dem Art. 23 der »Geodätischen Untersuchungen« ergiebt sich ohne Weiteres, dass bis auf Grössen fünfter Ordnung χ auch durch den folgenden Ausdruck gegeben ist,

$$\chi = \sigma + (K - K')\sigma - B \cos (2\varphi + \sigma) \sin \sigma$$

wenn wieder σ als eine Grösse erster Ordnung betrachtet wird. In dieser Gleichung sind die Coefficienten K, K', B Grössen der zweiten Ordnung, und φ ist durch die Gleichung

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} k \cos l$$

gegeben. Aus der obigen Gleichung ergiebt sich nun sogleich mit fernerer Uebergehung der Glieder fünfter Ordnung,

$$\chi_, = n\chi + B \sin 2\varphi (\sin^2 n\sigma - n \sin^2 \sigma)$$

also bis auf Grössen vierter Ordnung

$$\chi_, = n\chi$$

wie oben.

Dies ist der Satz, den ich in meiner Abhandlung angewandt und als hinreichend genau bezeichnet habe, und dass er in der That hinreichend genau ist, habe ich durch die vorstehenden Entwickelungen ausser Zweifel gesetzt. Diesen Satz wende ich zur Berechnung der oben bezeichneten reducirten

Polardistanzen an, und da der übrige Theil der Berechnung von $\bar{\beta}_{,}$ und $\bar{\gamma}_{,}$ vollkommen strenge ist und keine schädlichen Divisionen vorkommen, so erhalte ich wenigstens diese beiden Polardistanzen bis auf Grössen vierter Ordnung, folglich völlig ausreichend genau.

Es ist dies der Satz, von welchem in dem *Baeyer-Weingarten*'schen Vortrage gesagt wird: »Der erste Fehler der *Hansen*'»schen Berechnungsweise besteht nun darin...... Dieser »Fehler ist..... von der dritten Ordnung.«

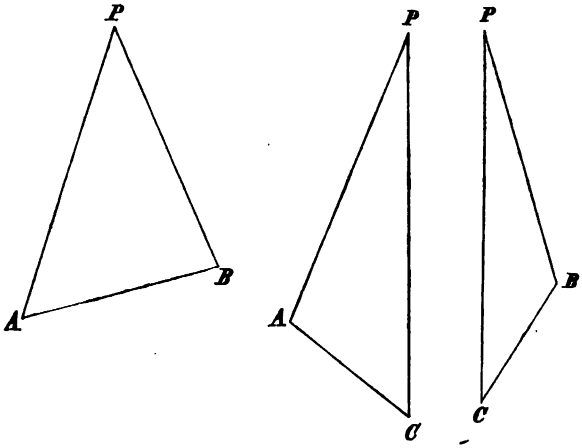
Diese Aussprüche sind also dahin abzuändern, dass nicht ich, sondern meine Herren Kritiker, zu welchen ich auch die permanente Commission zählen muss, selbst einen Fehler begangen haben.

In dem *Baeyer-Weingarten*'schen Vortrage heisst es ferner: »Der nächste Fehler (in *Hansen*'s Arbeit) beruht in der Meinung, »dass auch den drei nach dem Pol P reichenden sphäroidischen »Dreiecken ABP, ACP, BCP, die über den drei Seiten eines »sphäroidischen Dreiecks ABC construirt werden können, drei »Kugeldreiecke $A'B'P'$, $A'C'P'$, $B'C'P'$ correspondiren, die »den Pol P' der Kugel zur gemeinschaftlichen Ecke haben, und »deren Basen durch ein sphärisches Dreieck $A'B'C'$ gegeben »werden, dessen Seiten die correspondirenden reducirten geo-»dätischen Linien des sphäroidischen Dreiecks sind, welche Mei-»nung aus der zur Berechnung angegebenen Figur des § 33 des »Supplements hervorleuchtet, u. s. w.« Ferner: »Die von ihm »aufgestellten, in Beziehung auf das Sphäroid unrichtigen Rela-»tionen liefern jedoch nur die Werthe von Poldistanzen, die mit »der zu behandelnden Frage in keinerlei Beziehung stehen, und »die von denjenigen, die ermittelt werden sollen, wiederum um »Grössen von der dritten Ordnung verschieden sind.«

Also die Werthe von Polardistanzen, die ich bekomme, stehen mit der zu behandelnden Frage in keinerlei Beziehung, aber sie stehen mit denjenigen, die ermittelt werden sollen, (also zu denjenigen, die die zu behandelnde Frage verlangt,) in solcher Beziehung, dass sie von denselben um Grössen dritter Ordnung verschieden sind. Dies verstehe, wer es kann!

Um die Verwirrung, welche sich durch das ganze vorstehende

Citat hindurchzieht, zu entfernen, diene das Folgende. Wenden wir das oben erklärte Corollardreieck auf der Kugel auf drei geodätische Linien an, die auf dem Ellipsoid das sphäroidische Dreieck *ABC* bilden, so erhalten wir die folgenden drei sphärischen Dreiecke:



Hier sind die Seiten *AP*, *BP*, *CP*, die jede zwei Mal vorkommen, je einander gleich, und ausserdem den reducirten Polardistanzen der Eckpunkte *A*, *B*, *C* des sphäroidischen Dreiecks auf dem Ellipsoid gleich. Die Seiten *AB*, *AC*, *CB* sind die reducirten Längen der gleichbenannten Seiten des sphäroidischen Dreiecks, und die Winkel der vorstehenden Dreiecke an *A*, *B*, *C* sind die sphäroidischen Azimuthe, oder deren Complemente, der Seiten des sphäroidischen Dreiecks. Legt man nun das zweite der vorstehenden Dreiecke so auf das erste, dass die Punkte *P* und *A*, und das dritte so an das zweite, dass die Punkte *P* und *C* einander decken, so werden die Punkte *B* des ersten und dritten Dreiecks einander nicht vollständig decken, obgleich die beiden mit *PB* benannten Seiten einander gleich sind. Legt man hingegen die Dreiecke so auf einander, dass entweder die Punkte *P*, *A*, *B*, oder die Punkte *P*, *B*, *C* einander decken, so werden bez. entweder die Punkte *C* des zweiten und dritten Dreiecks, oder die Punkte *A* des ersten und zweiten Dreiecks einander nicht vollständig decken. Die Ursache davon ist, dass die Winkel an *P* in den Corollardreiecken denen der ent-

sprechenden sphäroidischen Dreiecke nicht gleich sind. In den sphäroidischen Dreiecken sind die Winkel APB, APC, CPB den Längenunterschieden der Eckpunkte desselben gleich, und bezeichnen wir diese der Reihe nach mit λ'', λ', λ, so ist nothwendiger Weise

$$\lambda + \lambda' - \lambda'' = 0.$$

Bezeichnet man dagegen mit ω'', ω', ω die Winkel an P in den Corollardreiecken, so findet zwischen diesen eine ähnliche Gleichung nicht statt. Man kann aber immer drei kleine Winkel oder Kreisbögen $\varDelta\omega''$, $\varDelta\omega'$, $\varDelta\omega$ so bestimmen, dass $\lambda'' = \omega'' - \varDelta\omega''$, $\lambda' = \omega' - \varDelta\omega'$, $\lambda = \omega - \varDelta\omega$ werden, und hierauf bekommt man in Folge der obigen Gleichung

$$(\omega + \omega' - \omega'') - (\varDelta\omega + \varDelta\omega' - \varDelta\omega'') = 0.$$

Untersuchen wir diese Gleichung in Bezug auf den vorliegenden Fall.

Den allgemeinen, in eine unendliche Reihe aufgelösten Ausdruck für $\varDelta\omega$ giebt die Gleichung (25) des Art. 23 der »Geodätischen Untersuchungen«; nimmt man hievon nur das Glied niedrigster Ordnung auf, welches zu unserm Zwecke ausreicht, so wird allgemein

$$\varDelta\omega = \tfrac{1}{4} e^2 \chi \sin k_0$$

wo χ die reducirte Länge der betreffenden geodätischen Linie, und k_0 die Polardistanz derselben in dem Punkt, in welchem sie den Meridian rechtwinklig schneidet, bedeuten. Da im gegenwärtigen Falle χ stets von der ersten Ordnung ist, so ist der vorstehende Ausdruck für $\varDelta\omega$ von der dritten Ordnung; er ist überdies bis auf Grössen fünfter Ordnung genau.

Bezeichnen wir nun die reducirten Polardistanzen der Eckpunkte A, B, C des sphäroidischen Dreiecks bez. mit k, k', k'', die reducirten Längen der Seiten AB mit χ'', AC mit χ', BC mit χ, und, wie ich immer gethan habe, die nach einerlei Richtung gezählten Azimuthe der Dreiecksseiten an A mit α'', α'; die an B mit $\alpha_{\prime}$, $\alpha_{\prime}''$; die an C mit $\alpha_{\prime\prime}$, $\alpha'_{\prime\prime}$; so wie die entsprechenden Werthe von k_0 für die geodätische Linie AB mit k_0''; für AC mit k'_0; für BC mit k_0, so geben die Corollardreiecke die Gleichungen:

$$\sin k_0'' = \sin k \ \sin \alpha''$$
$$\sin k_0' = \sin k \ \sin \alpha'$$
$$\sin k_0 = \sin k'' \sin \alpha_{\prime\prime}$$

$$\frac{\sin\chi''}{\sin\omega''} = \frac{\sin k'}{\sin\alpha''}, \quad \frac{\sin\chi'}{\sin\omega'} = \frac{\sin k''}{\sin\alpha'}, \quad \frac{\sin\chi}{\sin\omega} = \frac{\sin k'}{\sin\alpha_{,,}}$$

woraus man erkennt, dass auch ω'', ω', ω Grössen der ersten Ordnung sind. Durch Hülfe dieser Bezeichnungen und Relationen giebt der obige allgemeine Ausdruck von $\Delta\omega$ in seiner Anwendung auf das hier in Rede stehende Dreieck,

$$\begin{aligned}\Delta\omega &= \tfrac{1}{2}e^2\omega \sin k' \sin k''\\ \Delta\omega' &= \tfrac{1}{2}e^2\omega' \sin k \sin k''\\ \Delta\omega'' &= \tfrac{1}{2}e^2\omega'' \sin k \sin k'\end{aligned}$$

welche Ausdrücke auch von der dritten Ordnung und bis auf Grössen von der fünften Ordnung genau sind. Setzt man hierauf

$$\begin{aligned}\sin k &= \sin k' + u'\\ \sin k &= \sin k'' + u''\end{aligned}$$

so sind u' und u'' Grössen der ersten Ordnung und man bekommt, mit blosser Berücksichtigung der ersten Potenzen von u' und u'',

$$\begin{aligned}\Delta\omega + \Delta\omega' - \Delta\omega'' = \tfrac{1}{2}e^2(\omega + \omega' - \omega'')\sin k' \sin k''\\ + \tfrac{1}{2}e^2(\omega' u' - \omega'' u'')\sin k'\end{aligned}$$

oder

$$\omega + \omega' - \omega'' = \tfrac{1}{2}e^2\frac{\omega' u' - \omega'' u''}{1 - \tfrac{1}{2}e^2 \sin k' \sin k''}\sin k'$$

d. i. = einer Grösse vierter Ordnung. Durch die Annahme

$$\omega + \omega' - \omega'' = 0$$

die meiner Berechnung der reducirten Polardistanz der normalen Projection des Schwerpunkts des sphäroidischen Dreiecks ABC zu Grunde liegt, ist also nur eine Grösse vierter Ordnung, das ist eine erlaubte Grösse, übergangen worden. Da nemlich ausser der Anwendung der beiden bis auf Grössen vierter Ordnung richtigen Sätze

$$\begin{aligned}\chi_{,} &= n\chi\\ \omega + \omega' - \omega'' &= 0\end{aligned}$$

auch die Berechnung der eben genannten Polardistanz nach meinem Verfahren strenge ausgeführt wird und wieder keine schädlichen Divisionen vorkommen, so wird auch diese Polardistanz durch mein Verfahren bis auf Grössen vierter Ordnung richtig erhalten, und die Herren Kritiker, welche meinten, mir auch hier einen Fehler aufbürden zu können, haben wieder selbst gefehlt.

In meiner Abhandlung habe ich zwar die vorstehenden Auseinandersetzungen weggelassen, aber diess ist nicht in der

Meinung geschehen, die mir in dem obigen Citat aus dem *Baeyer-Weingarten*'schen Vortrag untergelegt wird, sondern in der Meinung, dass jeder die oben bewiesenen Sätze selbst ohne Mühe würde finden können, zumal sie so nahe liegen, dass sie jedem Kundigen sofort einleuchten und vor einem solchen kaum besonderer Beweise bedürfen; in Bezug auf meine oben genannten Herren Kritiker habe ich mich freilich darin geirrt.

Es ist noch ein Punkt vorhanden, von welchem ich meine, dass eine Erörterung nicht überflüssig sein möchte. Man weiss, dass in den numerischen Werthen von Grössen, die in analytischer Beziehung zu derselben Ordnung gezählt werden müssen, eine grosse Verschiedenheit stattfinden kann, und dass es demzufolge nicht unmöglich ist, dass Grössen, die, analytisch betrachtet, übergehbar sind, in der numerischen Anwendung der betreffenden Resultate nicht ganz unerheblich werden. Zur Untersuchung, wie dieser Punkt sich im gegenwärtigen Falle gestaltet, eignet sich in Bezug auf die reducirte Polardistanz der normalen Projection des Schwerpunkts besonders der Umstand, dass dieselbe auf verschiedene Arten durch mein Verfahren berechnet werden kann, und die Wirkung der übergangenen Glieder sich dadurch äussern muss, dass die verschiedenen Berechnungsarten verschiedene Werthe dieser Polardistanz hervorbringen werden.

Man kann bei dieser Berechnung von jedem beliebigen der drei Dreieckswinkel ausgehen und jedes Mal die Berechnung auf zweifache Weise ausführen, nemlich ein Mal das eine und ein anderes Mal das andere der beiden Dreiecke benutzen, in welche nach meinem Verfahren das Dreieck ABC zerlegt wird. Ich habe diese Rechnungen für drei der grössten Dreiecke, auf welche meine Formel überhaupt anwendbar ist, und von denen das eine am Pol, das zweite nahe in der Mitte zwischen Pol und Aequator, das dritte aber am Aequator liegt, ausgeführt und die folgenden Resultate bekommen, die ich, um Bruchtheile der Secunde erhalten zu können, mit sechsstelligen Logarithmen berechnet habe, obgleich man zur Ermittelung von δA, δB, δC mit Logarithmen von einer kleineren Anzahl von Stellen ausreicht.

Dreieck des Art. 40 des »Supplements u. s. w.«

Beiläufige Werthe der Polardistanzen der Eckpunkte des Dreiecks

45° 0′, 58° 24′, 42° 16′.

Beiläufige Seitenlängen

20° 2′, 17° 0′, 15° 0′.

Beiläufige Fläche 2° 12′.

Vom Eckpunkt A ausgehend, $\bar{\delta}$ = 48° 7′ 38″,4 *)

= 48 7 38 ,8

» » B » $\bar{\delta}$ = 48 7 37 ,4

= 48 7 38 ,4

» » C » $\bar{\delta}$ = 48 7 37 ,0

= 48 7 38 ,4

Dreieck des Art. 42. **)

Beiläufige Polardistanzen der Eckpunkte

0° 0′, 20° 0′, 18° 49′.

Beiläufige Seitenlängen

18° 0′, 18° 49′, 20° 0′.

Beiläufige Fläche 2° 44′.

Vom A ausgehend, $\bar{\delta}$ = 11° 29′ 4′,3

= demselben Werthe.

» B » $\bar{\delta}$ = 11 29 2 ,6

= 11 29 2 ,6

» C » $\bar{\delta}$ = 11 29 3 ,4

= 11 29 3 ,8

Dreieck des Art. 46.

Beiläufige Polardistanzen der Eckpunkte

74° 45′, 90° 0′, 90° 0′.

Beiläufige Seitenlängen

19° 33′, 18° 0′, 18° 0′.

Beiläufige Fläche 2° 37′.

---

*) In der Abhandlung steht durch Schreib- oder Druckfehler 48° 47′ 40″ statt 48° 7′ 40″. Die Rechnungen dort sind mit dem richtigen Werthe ausgeführt.

**) Bei diesem Dreieck scheint im Mst. eine Verwechselung der zu den Seiten b und c gehörigen Grössen vorgekommen zu sein. Die dortigen Rechnungen sind richtig.

Vom A ausgehend, $\bar{\delta} = 84^0\,53'\,21'',3$
$= $ demselben Werthe
» B oder C » $\bar{\delta} = 84\;\;53\;\;18\;,2$
$= 84\;\;53\;\;20\;,0$

Man sieht hieraus, welch' einen geringen Einfluss die oben erklärten Uebergehungen auf den Werth von $\bar{\delta}$ äussern. Der grösste Unterschied in den erhaltenen Werthen ist

im ersten, nahe inmitten zwischen Pol und Aequator liegenden Dreiecke . . . . $= 1'',8$
im zweiten, am Pole liegenden Dreiecke . . $= 1'',7$
und im dritten, am Aequator liegenden Dreiecke $= 3'',1$

Zur Untersuchung der numerischen Werthe der Fehler, die durch die Uebergehung der Glieder vierter und höherer Ordnung in der Gleichung $\chi_{,} = n\chi$, in den reducirten Polardistanzen $\bar{\beta}_{,}$ und $\bar{\gamma}_{,}$ begangen werden können, dient vorzüglich die Gleichung für $\chi_{,}$, auf welche der obige zweite Beweis geführt hat. Da man leicht findet, dass mit Uebergehung der höheren Potenzen von e in B der Maximalwerth dieses Coefficienten $B = \frac{1}{4}e^2$ ist, so sind die übergangenen Glieder vierter Ordnung höchstens $=$

$$\tfrac{1}{4}e^2(\sin{}^2 n\sigma - n\sin{}^2\sigma)$$

und dieser Maximalwerth findet statt, wenn $\varphi = \pm 45^0$ ist. Da nun für das Erdellipsoid, in Secunden ausgedrückt,

$$\tfrac{1}{4}e^2 = 344''$$

und für den grössten Werth von σ, bei welchem meine Formel für die Winkelreductionen anwendbar ist, höchstens $\sigma = 20^0$ angenommen werden darf, ferner sehr nahe $n = \frac{1}{2}$ ist, so findet man durch den vorstehenden Ausdruck den grösstmöglichen Unterschied in χ, der je erhalten werden kann, $= 9''$, und da das Extrem, welches bei der Ableitung dieses Werthes in Betracht gezogen worden ist, in der Anwendung wohl nie vorkommen wird, so wird der wirklich stattfindende Unterschied stets $< 9''$ sein. Gehen wir hievon zu $\bar{\beta}_{,}$ und $\bar{\gamma}_{,}$ über, so ist zu erwägen, dass der Fehler in diesen Polardistanzen im Allgemeinen kleiner ist, als der in $\chi_{,}$, oder wenigstens nie grösser werden kann.

Um die Bedeutung der im Vorstehenden ermittelten numerischen Unterschiede richtig zu würdigen, müssen die folgenden Betrachtungen hinzugezogen werden. Denkt man sich ein auf

dem Erdsphäroid liegendes sphäroidisches Dreieck, dessen Fläche durch $2^0\,40'$ ausgedrückt wird, so findet man, dass für dieses Dreieck im ungünstigsten Falle $11''$ Aenderung im Werthe von $\bar{\delta}$ nur $0'',001$ in den Winkelreductionen hervorbringt. Die Polardistanzen $\bar{\beta}_{\prime}$ und $\bar{\gamma}_{\prime}$ muss man um $22''$ ändern, um $0'',001$ Aenderung in den Winkelreductionen hervorzubringen. Die ungünstigsten Fälle treten je ein, wenn $\bar{\beta}_{\prime}$ oder $\bar{\gamma}_{\prime}$ oder $\bar{\delta} = 45^0$ sind. Für grössere oder kleinere Werthe dieser Bögen ist die Wirkung geringer und wird sowohl im Pole wie im Aequator verschwindend; im Uebrigen ist sie der Fläche des Dreiecks proportional. Seien z. B. in einem ähnlichen Dreieck wie oben die grösste Seitenlänge $= 10^0$, so wird die Fläche nur den vierten Theil der oben angenommenen betragen, folglich eine Aenderung von $44''$ in $\bar{\delta}$, oder eine Aenderung von $88''$ in $\bar{\beta}_{\prime}$ oder $\bar{\gamma}_{\prime}$ erst eine Aenderung von $0'',001$ in den Winkelreductionen hervorbringen. In einem solchen Dreieck, welches schon zu den grossen gezählt werden muss, werden die beiden oben erklärten Uebergehungen von Gliedern der vierten Ordnung in $\bar{\delta}$ verschwindende Abweichungen hervorbringen, und die Fehler in $\bar{\beta}_{\prime}$ und $\bar{\gamma}_{\prime}$ werden $< 2''$ sein.

Man erkennt hieraus, dass die oben gefundenen Unterschiede in den Werthen von $\bar{\delta}$, $\bar{\beta}_{\prime}$, $\bar{\gamma}_{\prime}$ gänzlich bedeutungslos sind. Es giebt daher, auch in numerischer Beziehung, mein Verfahren mehr als ausreichend genaue Werthe der hier erforderlichen Krümmungsmaasse.

Es folgt aus den vorhergehenden Auseinandersetzungen, dass der vor der permanenten Commission der europäischen Gradmessung gehaltene *Baeyer-Weingarten*'sche Vortrag durchaus verfehlt ist und die mir darin aufgebürdeten Fehler nicht vorhanden sind, wie man auch schon aus den genauen Werthen der Winkelreductionen, die aus meiner Formel hervorgehen, hätte schliessen können. Ob nun das Centralbureau von meiner Formel Gebrauch machen will oder nicht, das ist eine ganz gleichgültige Sache, denn der Werth irgend einer Formel wird weder durch das Eine vergrössert, noch durch das Andere verkleinert.

Ich schliesse diesen Aufsatz mit der Erklärung, dass wenn es Herrn *Weingarten* gefallen sollte, seine Angriffe auf meine Arbeiten auf eigene Hand fortzusetzen, ich fernerhin denselben nicht die geringste Beachtung schenken werde.

P. A. Hansen, *Darlegung einer unbedeutend scheinenden Umformung der Endgleichungen des »Supplements zu den Geodätischen Untersuchungen«, durch welche aber eine weit grössere Genauigkeit in den numerischen Werthen derselben erlangt wird.*

(Nebst einer Tafel für die Krümmungsmaasse auf dem Erdsphäroid.)

Die Formeln für die Reduction der Winkel eines auf beliebiger Oberfläche liegenden sphäroidischen Dreiecks, auf die Winkel eines ebenen oder sphärischen Dreiecks von denselben Seiten, welche ich in der in der Ueberschrift genannten Abhandlung gegeben habe, zeichnen sich nicht blos durch ihre einfache Form und leichte Behandlung bei der Anwendung, sondern auch dadurch aus, dass sie in Bezug auf das Erdsphäroid die numerischen Werthe der Winkelreductionen drei Mal genauer geben, als eine vorher veröffentlichte Transformation meiner früheren Formel. *)

Ich habe aber kürzlich gefunden, dass man durch eine kleine Umformung dieser Formeln, die auf den ersten Anblick unbedeutend erscheint und in der That die analytische Genauigkeit derselben nicht ändert, wenigstens bei der Anwendung der Formel auf das Erdsphäroid eine fast absolute Genauigkeit erhält. Diese Umformung werde ich jetzt erklären, mich aber dabei nur mit der Endformel für die Reduction der

---

*) S. Reflexionen über die Reduction der Winkel eines sphäroidischen Dreiecks von kleinen Seiten auf die Winkel des ebenen oder sphärischen Dreiecks von denselben Seiten, von *P. A. Hansen*, in den Berichten der Königl. Sächs. Ges. d. Wiss. Math.-phys. Classe. Sitzung am 8. Mai 1869. Ferner

P. A. Hansen, Geodätische Untersuchungen u. s. w., Referat von W. S. n der Vierteljahrschrift der Astr. Gesellschaft, V. Heft III.

sphäroidischen Winkel auf die sphärischen, das ist mit der Gleichung

$$-\delta A = \frac{3\,\Delta}{40}(2p' + q' + r')$$
$$+ \frac{\Delta}{480}F(2p + q + r)$$

wo

$$F = 4 - a^2 + 3\,(b^2 + c^2)$$

ist, beschäftigen, da die analogen Umformungen der übrigen Formeln daraus von selbst folgen.

Die Ausdrücke für die Krümmungsmaasse δ, $\gamma_,$, $\beta_,$, α, β, γ, die ich in den Artt. 17—19 des »Supplements zu den geodätischen Untersuchungen« gegeben habe, sind mit Uebergehung der Glieder zweiter und höherer Ordnung die folgenden:

$$\begin{aligned}
\delta &= \eta + \tfrac{2}{3}\theta k + \tfrac{1}{3}\theta'(h + h')\\
\gamma_, &= \eta + \tfrac{1}{3}\theta k + \tfrac{1}{3}\theta' h\\
\beta_, &= \eta + \tfrac{1}{3}\theta k + \tfrac{1}{3}\theta' h'\\
\alpha &= \eta\\
\beta &= \eta + \theta k \quad + \theta' h\\
\gamma &= \eta + \theta k \quad + \theta' h'
\end{aligned}$$

aus welchen man ohne Mühe sogleich die Gleichungen erhält:

$$\begin{aligned}
\gamma_, + \beta_, - \delta &= \alpha\\
3\,(\gamma_, + \beta_,) &= 4\alpha + \beta + \gamma\\
3\,(\gamma_, - \beta_,) &= \beta - \gamma
\end{aligned}$$

welche

$$\begin{aligned}
3\delta &= \alpha + \beta + \gamma\\
3\gamma_, &= 2\alpha + \beta\\
3\beta_, &= 2\alpha \quad + \gamma
\end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned}
\alpha &= -\delta + \gamma_, + \beta_,\\
\beta &= 2\delta + \gamma_, - 2\beta_,\\
\gamma &= 2\delta - 2\gamma_, + \beta_,
\end{aligned}$$

geben, woraus unter anderm

$$2\alpha + \beta + \gamma = 2\delta + \gamma_, + \beta_,$$

bis auf Grössen zweiter Ordnung folgt. Da nun $\delta = 1 + p'$, $\gamma_, = 1 + r'$, $\beta_, = 1 + q'$, $\alpha = 1 + p$, $\beta = 1 + q$, $\gamma = 1 + r$ sind, so kann diese Gleichung auch

$$2p + q + r = 2p' + q' + r'$$

geschrieben und, ohne Verletzung der analytischen Genauigkeit, das Glied

$$-\frac{\Delta}{480}\left(a^2 - 3\left(b^2 + c^2\right)\right)\left(2p + q + r\right)$$

welches in dem oben angeführten Ausdruck für $-\delta A$ enthalten ist, in

$$-\frac{\Delta}{480}\left(a^2 - 3\left(b^2 + c^2\right)\right)\left(2p' + q' + r'\right)$$

abgeändert werden. Der Ausdruck für $-\delta A$ geht nach dieser Abänderung in

$$-\delta A = \frac{\Delta}{480} F'\left(2p' + q' + r'\right)$$

$$+ \frac{\Delta}{120}\left(2p + q + r\right)$$

wo

$$F' = 36 - a^2 + 3\left(b^2 + c^2\right)$$

ist, über. Dieser Ausdruck ist die beabsichtigte Umformung des obigen, und man kann die übrigen Endformeln der angeführten Abhandlung auf analoge Weise umformen.

Um zu zeigen, welche Genauigkeit dieser Ausdruck in seiner Anwendung auf das Erdsphäroid gewährt, habe ich die Prüfungsdreiecke des »Supplements u. s. w.« nach demselben berechnet und die folgenden Resultate erhalten.

1) Das Dreieck des Art. 40 des »Supplements«, dessen Seiten

$20^0\ 2',\ 17^0\ 0',\ 15^0\ 0',$

reducirte Polardistanzen der Eckpunkte

$45^0\ 0',\ 58^0\ 24',\ 42^0\ 16',$

Fläche $= 2^0\ 12'$ sind, gab

$\delta A = -1'',407,\ \delta B = -3'',503,\ \delta C = -0'',968$

und da die strenge berechneten Werthe dieser Reductionen

$-1'',406,\quad -3'',505,\quad -0'',968$

sind, so werden die Unterschiede

$+0'',001,\quad -0'',002,\quad 0'',000.$

Nach der oben zuerst angeführten Formel, die im »Supplement« angewandt worden ist, ergeben sich die Unterschiede

$+0'',002,\quad -0'',001,\quad +0'',003$

und nach der *Weingarten*'schen Transformation meiner früheren Formel, zufolge der Berechnung von *W. S.* *), sind sie

*) Nach Entfernung eines in dieser Transformation ursprünglich vorhanden gewesenen und von dem Verf. derselben später eingeräumten Fehlers. S. das obige Citat.

$+ 0'',010, \quad + 0'',004, \quad + 0'',012.$

2) Das Dreieck des Art. 42, dessen Seitenlängen

$18^0\ 0', \quad 18^0\ 49', \quad 20^0\ 0',$

reducirte Polardistanzen der Eckpunkte

$0^0\ 0', \quad 20^0\ 0', \quad 18^0\ 49',$

Fläche = $2^0\ 44'$, gab durch die neue Formel

$\delta A = + 20'',923, \quad \delta B = + 19'',588, \quad \delta C = + 19'',677.$

Strenge berechnet wurden

$+ 20'',922, \quad + 19'',586, \quad + 19'',675;$

Unterschiede

$- 0'',001, \quad - 0'',002, \quad - 0'',002;$

Unterschiede im Supplement

$+ 0'',015, \quad + 0'',014, \quad + 0'',012;$

Unterschiede der *Weingarten*'schen Transf.

$+ 0'',039, \quad + 0'',038, \quad + 0'',035.$

3) Das Dreieck des Art. 44, dessen Seitenlängen

$19^0\ 1', \quad 19^0\ 1', \quad 19^0\ 1',$

reducirte Polardistanzen der Eckpunkte

$11^0\ 0', \quad 11^0\ 0', \quad 11^0\ 0',$

Fläche = $2^0\ 46'$, gab

$\delta A = \delta B = \delta C = + 22'',106$

strenge berechnet wurde . . .	$+ 22'',106$
Unterschied	$0'',000$
Unterschied im Supplement . .	$+ 0'',016$
Unterschied der *Weing.* Transf. .	$+ 0'',044$

4) Das Dreieck des Art. 45

dessen Seitenlängen alle	$= 16^0\ 0'$
reducirte Polardistanzen alle . .	$= 9^0\ 15'$
Fläche	$= 1^0\ 57'$

gab

$\delta A = \delta B = \delta C = + 15'',605$

strenge berechnet wurde . . .	$+ 15\ ,604$
Unterschied	$- 0\ ,001$
Unterschied im Supplement . .	$+ 0\ ,006$
Unterschied der *Weing.* Transf. .	$+ 0\ ,013$

5) Das Dreieck des Art. 46, dessen Seitenlängen

$19^0\ 33', \quad 18^0\ 0', \quad 18^0\ 0',$

reducirte Polardistanzen der Eckpunkte

$$71^0\,45',\quad 90^0\,0',\quad 90^0\,0',$$

Fläche = 2° 37′, gab

$$\delta A = -20'',414,\quad \delta B = \delta C = -21'',047$$

und da die strenge berechneten Werthe

$$-20'',415,\qquad -21'',051$$

sind, so werden die Unterschiede

$$-0'',001,\qquad -0'',004;$$

Unterschiede des Supplements

$$-0'',009,\qquad -0'',011;$$

Unterschiede der *Weingarten*'schen Transformation

$$-0'',037\qquad -0'',033.$$

6) Das Dreieck des Art. 47, dessen Seitenlängen

$$18^0\,37',\quad 12^0\,0',\quad 12^0\,0',$$

reducirte Polardistanzen der Eckpunkte

$$90^0\,0',\quad 80^0\,40',\quad 99^0\,20',$$

Fläche = 1° 14′, gab

$$\delta A = -9'',987,\quad \delta B = \delta C = -9'',995$$

und da die strenge berechneten Werthe

$$-9'',988,\qquad -9'',995$$

sind, so werden die Unterschiede

$$-0'',001,\qquad 0'',000,$$

Unterschiede des Supplements

$$-0'',001,\qquad -0'',002,$$

Unterschiede der *Weingarten*'schen Transformation

$$-0'',011,\qquad -0'',016.$$

7) Das Dreieck des Art. 48, dessen Seitenlängen

$$16^0\,42',\quad 12^0\,0',\quad 14^0\,0',$$

reducirte Polardistanzen der Eckpunkte

$$40^0\,0',\quad 51^0\,24',\quad 35^0\,18',$$

Fläche = 1° 27′, gab

$$\delta A = +1'',453,\quad \delta B = +0'',275,\quad \delta C = +1'',921;$$

die strenge berechneten Werthe sind

$$+1'',454,\quad +0'',275,\quad +1'',921;$$

folglich die Unterschiede

$$+0'',001,\quad 0'',000,\quad 0'',000,$$

Unterschiede des Supplements

$$+ 0'',002, \quad + 0'',002, \quad + 0'',001,$$

Unterschiede der *Weingarten*'schen Transformation

$$+ 0'',006, \quad + 0'',006, \quad + 0'',004.$$

Zu diesem letzten Dreieck ist zu bemerken, dass sich im »Supplement« bei der Berechnung der zu δC gehörigen Werthe von $\bar{\beta}_{,}$ und $\bar{\gamma}_{,}$, durch Verwechselung zweier Zahlen ein Rechenfehler eingeschlichen hat. Statt der Angaben des »Supplements«

$$\bar{\beta}_{,} = 36^0\ 33'\ 42'', \quad \bar{\gamma}_{,} = 40^0\ 37'\ 16''$$

muss es heissen

$$\bar{\beta}_{,} = 36^0\ 32'\ 58'', \quad \bar{\gamma}_{,} = 40^0\ 40'\ 4'';$$

diese Unterschiede bringen indess in δC nur einen Unterschied von $0'',002$ hervor.

Auch im Dreiecke des Art. 46 habe ich einen Rechenfehler vermuthet, da der Unterschied in $\delta B = \delta C$ abweichend von allen übrigen auf $0'',004$ steigt. Meine Nachrechnungen haben aber keinen Fehler entdecken lassen.

Ich bin daher etwas weiter gegangen und habe das gleichschenklige Dreieck des Art. 46, durch Verlängerung des durch dessen Eckpunkt A gehenden Meridians bis an den Aequator, in zwei gleiche und ähnliche rechtwinklige, sphäroidische Dreiecke zerlegt. Die Dimensionen des einen dieser beiden Dreiecke sind

$\bar{\alpha} = 74^0 45' 29'',9682,$	$\bar{\beta} = 90^0$	$\bar{\gamma} = 90^0$
$\alpha' = 0$	$\alpha_{,} = 90$	$\alpha_{,,} = 270$
$\alpha'' = 326\ 41\ 6\ ,7844,$	$\alpha_{,}'' = 148$	$\alpha_{,,}' = 180$
$A = 33\ 18\ 53\ ,2155,$	$B = 58$	$C = 90$
$a = 9\ 46\ 15\ ,7074,$	$b = 15\ 11' 30'',8864,$	$c = 18$
$\lambda = 9\ 46\ 15\ ,7074,$	$\lambda' = 0$	$\lambda'' = \lambda$

Im sphärischen Dreieck von denselben Seiten bekam ich hiemit die Winkel und die Fläche

$$\begin{aligned} A + \delta A &= 33^0\ 18'\ 43'',008 \\ B + \delta B &= 57\ \ 59\ \ 49\ ,537 \\ C + \delta C &= 89\ \ 59\ \ 49\ ,565 \\ \hline \Delta &= 1^0\ 18'\ 22'',110 \end{aligned}$$

woraus

$$\delta A = -\ 10'',208, \quad \delta B = -\ 10^0,463, \quad \delta C = -\ 10'',435$$

folgen. Die Formeln des »Supplements« geben nun, in Verbin-

dung mit der oben umgeformten Formel für δA, die folgenden Zahlenwerthe. Für die ganze Rechnung geltend und den obigen Bezeichnungen conform:

$$a' = 9^0\,48'\,13'' \qquad a^2 = 0{,}02908$$
$$b' = 15\;\;14\;\;30 \qquad b^2 = 0{,}07030$$
$$c' = 18\;\;\;3\;\;33 \qquad c^2 = 0{,}09869$$
$$\mu'' = 4^0\,53'\,42'', \;\; \mu''' = 10^0\,38'\,45''$$
$$\bar{\delta} = 84^0\,54'\,0''$$

ferner 1) für δA

$$\mu = \;6^0\;\;3'\,37'', \;\; \mu' = \;5^0\;\;5'\;\;6''$$
$$\bar{\gamma}_, = 79\;\;50\;\;46\;, \;\; \bar{\beta}_, = 59\;\;50\;\;36$$
$$F' = 36{,}478 \qquad \begin{cases} -\;9'',228 \\ -\;0'',980 \end{cases}$$
$$\delta A = -\;10'',208$$

2) für δB

$$\mu = \;6^0\;\;5'\,36''$$
$$\bar{\gamma}_, = 84\;\;50\;\;30\;, \;\; \bar{\beta}_, = 90^0\;0'\;0''$$
$$F' = 36{,}313 \qquad \begin{cases} -\;9'',446 \\ -\;1'',017 \end{cases}$$
$$\delta B = -\;10'',463$$

3) für δC

$$\mu' = \;5^0\;\;7'\,55''$$
$$\bar{\gamma}_, = 90^0\;0'\;0'', \;\; \bar{\beta}_, = 84\;\;52\;\;5$$
$$F' = 36{,}499 \qquad \begin{cases} -\;9'',417 \\ -\;1\;,017 \end{cases}$$
$$\delta C = -\;10'',434$$

Die Vergleichung dieser Resultate mit den oben strenge berechneten Werthen von δA, δB, δC giebt die Unterschiede

$$0'',000, \quad 0'',000, \quad -\;0'',001$$

d. i. vollständige Uebereinstimmung.

Man erkennt aus dem Obigen, wie sehr die hier angegebene Umformung meiner Formel die Genauigkeit derselben erhöht. Bei kleineren Dreiecken, als die hier zur Prüfung angewandten sehr grossen Dreiecke, kann man die Genauigkeit der Formel für absolut halten.

Wir haben oben gesehen, dass die beiden Functionen $2p' + q' + r'$ und $2p + q + r$ im Allgemeinen einander bis auf Grössen zweiter Ordnung gleich sind; es ist leicht, den Unterschied derselben bis auf Grössen vierter Ordnung durch die oben angezogenen Gleichungen des »Supplements u. s. w.« zu berechnen. Die Gleichungen der Artt. 17 und 18 geben

$$\begin{aligned}2\delta+\beta_{,}+\gamma_{,} = {} & 4\eta + 2\theta k + \theta'(h+h') + \tfrac{5}{9}\lambda k^2 + \tfrac{5}{9}\lambda' k(h+h') \\ & + \tfrac{1}{18}\lambda''(3h^2 + 4hh' + 3h'^2) + \tfrac{1}{9}\mu k^3 + \tfrac{1}{6}\mu k^2(h+h') \\ & + \tfrac{1}{54}\mu'' k(5h^2 + 8hh' + 5h'^2) + \tfrac{1}{54}\mu'''(h^3 + 2h^2h' + 2hh'^2 + h'^3) \\ & - \tfrac{2}{9}\eta\theta k(h^2 + hh' + h'^2) + \tfrac{1}{6}\eta\theta k^2(h+h') \\ & + \tfrac{2}{3}y(2\theta k + \theta'(h+h')) + \tfrac{2}{3}x\theta'(h-h') \\ & + \tfrac{1}{3}u(\theta k + \theta' h) + \tfrac{1}{3}u'(\theta k + \theta' h')\end{aligned}$$

und die Gleichungen des Art. 19

$$\begin{aligned}2\alpha+\beta+\gamma = {} & 4\eta + 2\theta k + \theta'(h+h') + \lambda k^2 + \lambda' k(h+h') \\ & + \tfrac{1}{2}\lambda''(h^2 + h'^2) + \tfrac{1}{3}\mu k^3 + \tfrac{1}{2}\mu' k^2(h+h') \\ & + \tfrac{1}{2}\mu'' k(h^2 + h'^2) + \tfrac{1}{6}\mu'''(h^3 + h'^3) \\ & - \tfrac{1}{3}\eta\theta k(h^2 + h'^2) + \tfrac{1}{6}\eta\theta' k^2(h+h')\end{aligned}$$

woraus sogleich der allgemeine Ausdruck

$$\begin{aligned}2p' + q' + r' = {} & 2p + q + r - \tfrac{4}{9}\lambda k^2 - \tfrac{4}{9}\lambda' k(h+h') \\ & - \tfrac{1}{9}\lambda''(3h^2 - 2hh' + 3h'^2) - \tfrac{2}{9}\mu k^3 \\ & - \tfrac{1}{3}\mu' k^2(h+h') - \tfrac{1}{27}\mu'' k(11h^2 - 4hh' + 11h'^2) \\ & - \tfrac{1}{27}\mu'''(4h^3 - h^2h' - hh'^2 + 4h'^3) \\ & + \tfrac{1}{9}\eta\theta k(h-h')^2 \\ & - \tfrac{2}{3}y(2\theta k + \theta'(h+h')) + \tfrac{2}{3}x\theta'(h-h') \\ & + \tfrac{1}{3}u(\theta k + \theta' h) + \tfrac{1}{3}u'(\theta k + \theta' h')\end{aligned}$$

entsteht, welcher im Allgemeinen bis auf Grössen vierter Ordnung genau ist. Wenden wir diesen auf das Revolutionsellipsoid von kleiner Excentricität an, wodurch dessen Genauigkeit um zwei Ordnungen erhöht wird, so geben die Gleichungen der »Geodätischen Untersuchungen« mit wenig Mühe

$$\begin{aligned}(2p' + q' + r') = {} & (2p + q + r) - \tfrac{1}{6}e^2\cos^2\bar{\alpha}(a^2 + 2b^2 + 2c^2) \\ & + \tfrac{1}{6}e^2\sin^2\bar{\alpha}(3b^2\cos^2\alpha' - 2bc\cos\alpha'\cos\alpha'' + 3c^2\cos^2\alpha'') \\ & - \tfrac{1}{162}(2p-q-r)(17a^2 + 36b^2 + 36c^2) - \tfrac{11}{162}(q-r)(b^2-c^2) \\ & + \tfrac{2}{3}(2p-q-r)y + \tfrac{2}{3}(q-r)x \\ & - \tfrac{1}{6}(2p-q-r)(u+u') + \tfrac{1}{6}(q-r)(u-u')\end{aligned}$$

wo wieder α' und α'' die Azimuthe der Dreiecksseiten b und c am Eckpunkt A sind.

Substituirt man noch die aus dem »Supplement u. s. w.« zu entnehmenden bezüglichen Werthe von x, y, u, u', nemlich

$$x = -\tfrac{1}{20}(b^2 - c^2)$$
$$y = \tfrac{1}{540}(7a^2 + 4b^2 + 4c^2)$$
$$u = \tfrac{2}{135}(3a^2 - 6b^2 + 8c^2)$$
$$u' = \tfrac{2}{135}(3a^2 + 8b^2 - 6c^2)$$

so wird schliesslich

$$\begin{aligned}(2p'+q'+r') = (2p+q+r) &- \tfrac{4}{9}e^2\cos^2\bar{\alpha}\,(a^2+2b^2+2c^2)\\ &+\tfrac{4}{9}e^2\sin^2\bar{\alpha}(3b^2\cos^2\alpha' - 2bc\cos\alpha'\cos\alpha'' + 3c^2\cos^2\alpha'')\\ &-\tfrac{1}{9}(2p-q-r)(a^2+2b^2+2c^2)\\ &-\tfrac{1}{3}(q-r)(b^2-c^2)\end{aligned}$$

bis auf Grössen sechster Ordnung genau.

Man könnte aus dieser Formel durch das von mir früher gegebene Verfahren die Azimuthe eliminiren, allein da dadurch die Genauigkeit eher vermindert als vergrössert werden würde, so unterlasse ich diese Elimination. Unbestimmt kann das Glied, welches die Azimuthe enthält, nie werden, obgleich diess nebst vielen andern Ungereimtheiten behauptet worden ist.

Es ist übrigens zu der vorstehenden Formel zu bemerken, dass sie keine grössere Genauigkeit in der Anwendung gewährt, als die übrigen, blos auf die Krümmungsmaasse p, q, r oder α, β, γ gegründeten Formeln für δA. Sie kann daher nur bei kleinen Dreiecken angewandt werden, während bei grösseren die directe Berechnung von p', q', r', so wie ich sie in dem »Supplement u. s. w.« gegeben habe, angewandt werden muss.

Mit dem Argument:

Reducirte Polardistanz

giebt die nachfolgende Tafel für ein Revolutionsellipsoid, dessen halbe grosse Achse = 1, und dessen Excentricität

$$e = 0{,}0816968$$

ist, das um die Zahl 1 verminderte Krümmungsmaass, unter der Bezeichnung p. Diese Tafel giebt also überhaupt unmittelbar die in der obigen Formel für δA, oder δB, oder δC enthaltenen, mit p', q', r', p, q, r bezeichneten Grössen.

Die mit »Var.« überschriebene Columne giebt die Veränderung von p, die einer Aenderung von

0,00001

in der Excentricität entspricht, weshalb die Tafel auch für andere Excentricitäten, als die oben angeführte anwendbar ist:

Tafel für die Krümmungsmaasse des Revolutionsellipsoids.

Arg.	p	Diff.	Var.	Arg.	p	Diff.	Var.
0°,0	−0,0066744	10	−16,3	21°,0	−0,0049693	784	−12,2
0 ,5	66734	31	16,3	21 ,5	48909	798	12,0
1 ,0	66703	50	16,3	22 ,0	48111	814	11,8
1 ,5	66651	71	16,3	22 ,5	47297	828	11,6
2 ,0	66582	90	16,3	23 ,0	46469	842	11,4
2 ,5	66492	111	16,3	23 ,5	45627	856	11,2
3 ,0	66381	131	16,3	24 ,0	44771	869	11,0
3°,5	−0,0066250	151	−16,2	24°,5	−0,0043902	883	−10,8
4 ,0	66099	172	16,2	25 ,0	43019	896	10,6
4 ,5	65927	191	16,1	25 ,5	42123	909	10,4
5 ,0	65736	211	16,1	26 ,0	41214	922	10,1
5 ,5	65525	231	16,0	26 ,5	40292	934	9,9
6 ,0	65294	250	16,0	27 ,0	39358	946	9,7
6 ,5	−0,0065044	270	−16,0	27°,5	−0,0038412	958	−9,5
7 ,0	64774	290	15,9	28 ,0	37454	969	9,2
7 ,5	64484	309	15,8	28 ,5	36485	980	9,0
8 ,0	64175	329	15,7	29 ,0	35505	991	8,7
8 ,5	63846	348	15,6	29 ,5	34514	1002	8,5
9 ,0	63498	367	15,5	30 ,0	33512	1012	8,2
9°,5	−0,0063131	387	−15,4	30°,5	−0,0032500	1022	−8,0
10 ,0	62744	406	15,3	31 ,0	31478	1032	7,7
10 ,5	62338	424	15,2	31 ,5	30446	1042	7,5
11 ,0	61914	443	15,1	32 ,0	29404	1051	7,2
11 ,5	61471	462	15,0	32 ,5	28353	1059	7,0
12 ,0	61009	480	14,9	33 ,0	27294	1068	6,7
12°,5	−0,0060529	499	−14,8	33°,5	−0,0026226	1075	−6,5
13 ,0	60030	516	14,7	34 ,0	25151	1083	6,2
13 ,5	59514	535	14,6	34 ,5	24068	1091	6,0
14 ,0	58979	553	14,4	35 ,0	22977	1098	5,7
14 ,5	58426	570	14,3	35 ,5	21879	1105	5,4
15°,0	57856	588	14,2	36 ,0	20774	1111	5,1
15°,5	−0,0057268	606	−14,1	36°,5	−0,0019663	1117	−4,9
16 ,0	56662	622	13,9	37 ,0	18546	1123	4,6
16 ,5	56040	640	13,8	37 ,5	17423	1129	4,3
17 ,0	55400	657	13,6	38 ,0	16294	1134	4,0
17 ,5	54743	673	13,5	38 ,5	15160	1139	3,8
18 ,0	54070	689	13,3	39 ,0	14021	1143	3,5
18°,5	−0,0053381	706	−13,2	39°,5	−0,0012878	1147	−3,2
19 ,0	52675	722	13,0	40 ,0	11731	1151	2,9
19 ,5	51953	738	12,8	40 ,5	10580	1154	2,7
20 ,0	51215	753	12,6	41 ,0	9426	1157	2,4
20 ,5	50462	769	12,4	41 ,5	8269	1160	2,1
21 ,0	−0,0049693		−12,2	42 ,0	−0,0007109		−1,8

Arg.	p	Diff.	Var.	Arg.	p	Diff.	Var.
42⁰,0	−0,0007109	1162	−1,8	66⁰,0	+0,0044848	867	+11,0
42 ,5	5947	1165	1,5	66 ,5	45715	854	11,2
43 ,0	4782	1166	1,2	67 ,0	46569	840	11,4
43 ,5	3616	1167	0,9	67 ,5	47409	825	11,6
44 ,0	2449	1168	0,6	68 ,0	48234	811	11,8
44 ,5	1281	1169	0,3	68 ,5	49045	795	12,0
45 ,0	−0,0000112	1169	0,0	69 ,0	49840	780	12,2
45⁰,5	+0,0001057	1168	+0,3	69⁰,5	+0,0050620	765	+12,4
46 ,0	2225	1168	0,6	70 ,0	51385	749	12,6
46 ,5	3393	1167	0,9	70 ,5	52134	734	12,8
47 ,0	4560	1166	1,2	71 ,0	52868	717	13,0
47 ,5	5726	1165	1,5	71 ,5	53585	701	13,2
48 ,0	+0,0006891	1163	1,7	72 ,0	54286	684	13,3
48⁰,5	+0,0008054	1160	+2,0	72⁰,5	+0,0054970	668	+13,5
49 ,0	9214	1158	2,3	73 ,0	55638	651	13,7
49 ,5	10372	1155	2,6	73 ,5	56289	633	13,9
50 ,0	11527	1151	2,8	74 ,0	56922	616	14,0
50 ,5	12678	1148	3,1	74 ,5	57538	598	14,2
51 ,0	13826	1144	3,4	75 ,0	58136	580	14,3
51⁰,5	+0,0014970	1139	+3,7	75⁰,5	+0,0058716	563	+14,5
52 ,0	16109	1134	4,0	76 ,0	59279	545	14,6
52 ,5	17243	1129	4,3	76 ,5	59824	526	14,8
53 ,0	18372	1124	4,6	77 ,0	60350	508	14,9
53 ,5	19496	1118	4,9	77 ,5	60858	489	15,0
54 ,0	20614	1112	5,1	78 ,0	61347	471	15,1
54⁰,5	+0,0021726	1105	+5,4	78⁰,5	+0,0061818	451	+15,2
55 ,0	22831	1098	5,7	79 ,0	62269	432	15,3
55 ,5	23929	1092	6,0	79 ,5	62701	413	15,4
56 ,0	25021	1084	6,2	80 ,0	63114	394	15,5
56 ,5	26105	1076	6,5	80 ,5	63508	374	15,6
57 ,0	27181	1068	6,7	81 ,0	63882	355	15,7
57⁰,5	+0,0028249	1060	+7,0	81⁰,5	+0,0064237	335	+15,8
58 ,0	29309	1051	7,2	82 ,0	64572	315	15,9
58 ,5	30360	1041	7,5	82 ,5	64887	296	16,0
59 ,0	31401	1032	7,7	83 ,0	65183	276	16,1
59 ,5	32433	1022	8,0	83 ,5	65459	255	16,2
60 ,0	33455	1012	8,2	84 ,0	65714	235	16,2
60⁰,5	+0,0034467	1002	+8,5	84⁰,5	+0,0065949	215	+16,3
61 ,0	35469	992	8,7	85 ,0	66164	195	16,3
61 ,5	36461	980	9,0	85 ,5	66359	175	16,4
62 ,0	37441	969	9,2	86 ,0	66534	154	16,4
62 ,5	38410	957	9,5	86 ,5	66688	133	16,5
63 ,0	39367	945	9,7	87 ,0	66821	113	16,5
63⁰,5	+0,0040312	933	+9,9	87⁰,5	+0,0066934	93	+16,5
64 ,0	41245	920	10,1	88 ,0	67027	72	16,5
64 ,5	42165	908	10,4	88 ,5	67099	52	16,6
65 ,0	43073	894	10,6	89 ,0	67151	31	16,6
65 ,5	43967	881	10,8	89 ,5	67182	10	16,6
66 ,0	+0,0044848		11,0	90 ,0	+0,0067192		+16,6

O. Schlömilch, *Ueber eine besondere Gattung algebraischer Functionen.*

Wenn die in der Facultät

$$z(z+1)(z+2)\ldots(z+m-1)$$

angedeutete Multiplication ausgeführt und nachher $z=x+y\sqrt{-1}$ gesetzt wird, so zerfällt die entstandene ganze Function in einen reellen und in einen imaginären Theil, wobei der erste mit $\varphi_m(x, y)$, der zweite mit $\psi_m(x, y)$ bezeichnet werden möge. Hiernach bedeuten $\varphi_m(x, y)$ und $\psi_m(x, y)$ ganze rationale Functionen, welche durch die Gleichung

$$(x+iy)(x+iy+1)(x+iy+2)\ldots(x+iy+m-1)$$
$$=\varphi_m(x, y)+i\psi_m(x, y)$$

vollständig definirt sind, z. B.

$$\varphi_1(x, y)=x,$$
$$\psi_1(x, y)=y,$$
$$\varphi_2(x, y)=x+x^2-y^2,$$
$$\psi_2(x, y)=y+2xy,$$
$$\varphi_3(x, y)=2x+3(x^2-y^2)+x(x^2-3y^2),$$
$$\psi_3(x, y)=2y+6xy+y(3x^2-y^2),$$
$$\varphi_4(x, y)=6x+11(x^2-y^2)+6x(x^2-3y^2)$$
$$+x^4-6x^2y^2+y^4,$$
$$\psi_4(x, y)=6y+22xy+6y(3x^2-y^2)+4xy(x^2-y^2),$$
$$\varphi_5(x, y)=24x+50(x^2-y^2)+35x(x^2-3y^2)$$
$$+10(x^4-6x^2y^2+y^4)+x(x^4-10x^2y^2+5y^4),$$
$$\psi_5(x, y)=24y+100xy+35y(3x^2-y^2)$$
$$+4xy(x^2-y^2)+y(5x^4-10x^2y^2+y^4),$$

u. s. w.

Eine Haupteigenschaft dieser Functionen ergiebt sich unmittelbar aus der binomischen Entwickelung

$$(1-t)^{-\mu} = 1 + \frac{\mu}{1} t + \frac{\mu(\mu+1)}{1.2} t^2 + \dots\dots$$

$$\mod t < 1 ;$$

für $\mu = x + iy$ erhält man nämlich durch Trennung der reellen und der imaginären Theile

$$(1-t)^{-x} \cos \left[y\, l\left(\frac{1}{1-t}\right)\right]$$

$$= 1 + \frac{\varphi_1(x,y)}{1} t + \frac{\varphi_2(x,y)}{1.2} t^2 + \dots\dots,$$

$$(1-t)^{-x} \sin \left[y\, l\left(\frac{1}{1-t}\right)\right]$$

$$= \frac{\psi_1(x,y)}{1} t + \frac{\psi_2(x,y)}{1.2} t^2 + \dots\dots$$

oder für $t = 1 - e^{-w}$

1) $$e^{xw} \cos yw$$

$$= 1 + \frac{\varphi_1(x,y)}{1} \left(1 - e^{-w}\right) + \frac{\varphi_2(x,y)}{1.2} \left(1 - e^{-w}\right)^2 + \dots.$$

2) $$e^{xw} \sin yw$$

$$= \frac{\psi_1(x,y)}{1} \left(1 - e^{-w}\right) + \frac{\psi_2(x,y)}{1.2} \left(1 - e^{-w}\right)^2 + \dots$$

Diese Entwickelungen gelten für alle reellen x und y, wenn der reelle Theil von w positiv, und der imaginäre Theil von w zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten ist.

Aus den Gleichungen 1) und 2) kann man neue Resultate dadurch ableiten, dass man beiderseits mit einer beliebigen Function von w und mit dw multiplicirt und nachher zwischen solchen Grenzen integrirt, welche in den für w angegebenen Bereich fallen. Multiplicirt man z. B. die Gleichung 2) mit

$$\frac{e^{-(x+1)w}}{1-e^{-w}}\, dw$$

und integrirt von $w = 0$ bis $w = \infty$, so erhält man

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{\pi y} + e^{-\pi y}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} - \frac{1}{2y}$$

$$= \frac{1}{1} \cdot \frac{\psi_1(x,y)}{x+1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\psi_2(x,y)}{(x+1)(x+2)} + \dots\dots,$$

wobei x und y beliebig bleiben. Einfacher ist für $x = 0$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{\pi y}+e^{-\pi y}}{e^{\pi y}-e^{-\pi y}}-\frac{1}{2y}$$

$$=\frac{1}{1}\cdot\frac{y}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{y}{1.2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2y-y^3}{1.2.3}+\frac{1}{4}\cdot\frac{6y-6y^3}{1.2.3.4}$$

$$+\frac{1}{5}\cdot\frac{24y-35y^3+y^5}{1.2.3.4.5}+\frac{1}{6}\cdot\frac{120y-225y^3+15y^5}{1.2.3.4.5.6}$$

$$+\frac{1}{7}\cdot\frac{720y-1624y^3+175y^5-y^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\ldots\ldots$$

und zwar gilt diese Gleichung für jedes reelle y, während die gewöhnliche Entwickelung nach Potenzen von y an die Bedingung $y^2 < 1$ gebunden ist.

Der vorige Gedanke lässt sich allgemein auf folgende Weise ausführen. Wenn die Function $f(y)$ innerhalb des reellen Intervalles $y = a$ bis $y = b$ endlich, stetig und eindeutig bleibt, so ist bekanntlich

$$f(y) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos yw\,dw\int_a^b f(\theta)\cos w\theta\,d\theta.$$

Man substituire hier aus Nr. 1) den Werth

$$\cos yw = e^{-xw}\left\{1+\frac{\varphi_1(x,y)}{1}(1-e^{-w})+\ldots\right\}$$

und integrire die einzelnen Summanden; diess giebt ein Resultat von der Form

$$3)\qquad f(y) = A_0+\frac{A_1}{1}\varphi_1(x,y)+\frac{A_2}{1.2}\varphi_2(x,y)+\ldots\ldots$$

worin sich die Coefficienten A durch die Formel

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-xw}(1-e^{-w})^n dw\int_a^b f(\theta)\cos w\theta\,d\theta$$

bestimmen. Für $\Delta x = 1$ kann man einfacher schreiben

$$4)\qquad A_n = \frac{2(-1)^n}{\pi}\Delta^n\int_0^\infty e^{-xw}dw\int_a^b f(\theta)\cos w\theta\,d\theta$$

Nimmt man $x > 0$, so lässt sich die Reihenfolge der Integrationen umkehren und es wird

$$5)\qquad A_n = \frac{2(-1)^n}{\pi}\Delta^n\int_a^b\frac{x f(\theta)}{x^2+\theta^2}d\theta,\quad x > 0.$$

Aus der Formel

$$f(y) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin yw\, dw \int_a^b f(\theta) \sin w\theta\, d\theta$$

erhält man die analoge Entwickelung

6) $$f(y) = \frac{B_1}{1} \psi_1(x, y) + \frac{B_2}{1.2} \psi_2(x, y) + \dots.$$

wobei die Coefficienten B_n mittelst der Formel

7) $$B_n = \frac{2(-1)^n}{\pi} \Delta^n \int_0^\infty e^{-xw} dw \int_a^b f(\theta) \sin w\theta\, d\theta$$

bestimmt werden, welche für $x > 0$ übergeht in

8) $$B_n = \frac{2(-1)^n}{\pi} \Delta^n \int_a^b \frac{\theta f(\theta)}{x^2 + \theta^2} d\theta, \quad x > 0$$

Die hier gezeigten Entwickelungen von $f(y)$ besitzen eine Eigenthümlichkeit, welche bei den bisher bekannten verschiedenen Entwickelungen einer Function noch nicht vorgekommen ist, und welche darin besteht, dass die Reihe ausser dem gegebenen Argumente y noch eine willkührliche Grösse x enthält. Für manche Zwecke der Analysis kann es nur ein Vortheil sein, eine Grösse in der Rechnung zu haben, über welche man willkührlich disponiren darf.

C. **Bruhns**, *Einige Notizen über Kepler.*

Die 300jährige Jubelfeier *Kepler*'s, welche am 27. Decbr. 1871 auf der hiesigen Sternwarte begangen wurde, veranlasste einen Verehrer der Astronomie, der Bibliothek der Sternwarte die eben vollendete Gesammtausgabe der *Kepler*'schen Werke, die von Dr. *Frisch* in Stuttgart neu edirt worden ist, zu schenken. Ausserdem erhielt die Sternwarte bei dieser Gelegenheit eine Gypsbüste *Kepler*'s, welche zu dem Zwecke der Feier nach dem im Jahre 1870 enthüllten Monumente in Weil der Stadt der Bildhauer Herr *v. Kreling* in Nürnberg anfertigen liess. Mich veranlasste die Feier nachzusehen, ob irgendwo in Sachsen noch ungedruckte Sachen von *Kepler* vorhanden seien, und durch die gütige Vermittelung Sr. Excellenz des Herrn Staats-Ministers Dr. *v. Falkenstein* erhielt ich aus dem königlichen Staatsarchiv in Dresden die Abschriften einiger auf *Kepler* bezüglicher Documente, wovon besonders das zweite, ein Gutachten *Kepler*'s über die Schriften des *Calvisius* und *Jöstel*, die Kalenderreform betreffend, von Interesse ist.

Das erste Aktenstück, datirt Unnaburg den 27. Januar 1607, ist ein von dem Kurfürsten Christian an seinen Kammermeister gerichtetes Schreiben und betrifft ein Geschenk, welches *Kepler* für den dem Kurfürsten übersandten Tractat »De Stella nova« erhielt. Das Schriftstück, soweit es sich auf *Kepler* bezieht, lautet:

»Lieber getreuer, Vns hatt der Röm. Kay. Mt. vnnsers aller-
»gnedigsten Herrn bestallter Astronomus M. *Johannes Keppe-*
»*lius*, ein tractatum, so er wegen des Neuen sterns verfertigt
»vnd in Druckh gegeben, vnlengsten vberschickt, daruor
»Wir Ime ein becherlin von 20 Taler verehrn zu lassen be-
»willigt.«

Im Jahre 1609 wurde *Kepler* aufgefordert, ein Urtheil (siehe S. 36) über zwei Schriften: eine vom Leipziger Cantor *Sethus Calvisius*, die andere von Dr. *Jöstel*, welche die Verbesserung des alten Kalenders betrafen, abzugeben. *Calvisius* sowohl als auch *Jöstel*, beide aus Meissen, hatten den Gregorianischen Kalender angegriffen, ihm mehrfache Fehler nachgewiesen und andere Vorschläge für eine Kalenderverbesserung gemacht. *Kepler* lässt dabei auch durchblicken, wie er die ganze Kalenderverbesserung auffasst, und seine Ansichten sind so verständig und noch gegenwärtig für die oft vorkommenden Vorschläge zu einer Kalenderreform passend, dass ich aus dem hier am Schlusse folgenden lateinischen Gutachten einige Hauptpunkte angebe.

Kepler lässt beiden Gelehrten Gerechtigkeit wiederfahren. *Calvisius*, sagt er, hat offenbar viel Geist, *Jöstel* viel Fleiss an den Tag gelegt. In der Calvisischen Form lässt sich kaum ein Irrthum finden, den nicht die fleissige und umsichtige Sorgfalt *Jöstel*'s gefunden und aufgedeckt hätte. Von der Richtigkeit des Todesjahres Christi, das nach den Kirchenvätern im 76. Julianischen Jahre statt im 78. gewesen sein soll, sieht *Kepler* ab. [1]) Das Osterfest wurde gleich Anfangs von den orientalischen Christen nach der Mondrechnung, von den occidentalischen aber nach dem Julianischen Kalender am 25. März gefeiert. Bereits vor dem Ende der Verfolgungen entstand zwischen den Christen der Streit um die Osterzeit und auf dem Concil zu Nicäa wurde festgesetzt, dass am Sonntag nach dem ersten Vollmonde nach dem Tage der Frühlings-Nachtgleiche das Osterfest gefeiert werden sollte, wobei das Aequinoctium auf den 21. März fixirt ward. Aber selbst nach diesem Concil wurde das Osterfest wegen der mannichfachen Zeitrechnungen bei den verschiedenen Völkern oft zu verschiedenen Zeiten gefeiert und erst nachdem die römische Herrschaft im Oriente wieder hergestellt war, wurde überall das Osterfest zu gleicher Zeit begangen.

Die goldene Zahl, welche einen Cyclus von 19 Jahren umfasst, wurde zur Vorausberechnung benutzt. *Calvisius* und *Jöstel*

1) *Kepler* stellt als Hypothese für den Stern der Weisen die Zusammenkunft des Jupiter und Saturn auf und findet danach das Geburtsjahr Christi 6 Jahre vor unserer Zeitrechnung, — ich möchte jedoch das Sichtbarwerden der Venus am Abendhimmel für eine glänzendere Erscheinung halten, die zugleich den Weisen aus dem Morgenlande die Richtung nach West, nach Palästina angab.

wollten in ihren Schriften aber nicht nur den Cyclus der goldenen Zahl beseitigen, sondern auch den Epaktencyclus verwerfen und schlugen vor, den wirklich astronomischen Daten zu folgen; ausserdem wollte *Calvisius* nicht, dass das Osterfest gefeiert werde an dem Sonntage selbst, an welchem der Vollmond fällt, sondern es auf den nächsten verschieben, während *Jöstel*, weil ein halber Monat nur $14^3/_4$ Tage hat, festsetzen wollte, dass am 15. Tage nach dem Neumond schon Ostern gefeiert werden könnte. *Kepler* weist nach, dass während *Calvisius*, was den Mond anbetrifft, vollständig astronomisch geht, er es mit der Zeit der Tag- und Nachtgleiche noch bei der bürgerlichen Rechnung lässt, indem er das Aequinoctium auf einen bestimmten Tag des Julianischen Kalenders setzt. Ebenso spielt der Meridian, für den *Calvisius* den für Jerusalem als den ersten annimmt, der Anfang des Tages, ob selbiger mit Mitternacht, Mittag oder wie *Kepler* bei der Festrechnung will mit Abend beginnt, eine Rolle.

Calvisius will auch nicht, wie Gregor vorgeschrieben hatte, in den Jahrhunderten, welche nicht durch 400 theilbar sind, die Schalttage fortlassen, sondern alle 132 Jahre einen Schalttag ausfallen lassen, *Jöstel* dagegen will bald nach 4, bisweilen jedoch nach 5 Jahren einen Schalttag haben. *Kepler* findet diese Vorschläge für den bürgerlichen Gebrauch sich wenig eignend und zieht dem Jöstelianischen Vorschlage den Calvisischen, diesem die Einrichtung des Gregorianischen und dieser endlich die des Julianischen Kalenders vor, weil dadurch die Rechnung der bürgerlichen Zeit am einfachsten auszuführen ist.

Kepler macht aufmerksam, dass die Länge des Jahres durchaus nicht so sicher bestimmt sei, um mit *Calvisius* in 132 Jahren oder mit Dr. *Jöstel* in 128 Jahren einen Schalttag ausfallen zu lassen; mit Hilfe der Alfonsinischen Tafeln würde ein Tag auf 134 Jahre ausfallen müssen, während Gregor dafür $133^1/_3$ Jahre annimmt. Für die bürgerliche Zählung der Jahrestage sei es am besten, sagt *Kepler*, den alten Julianischen Kalender beizubehalten, und damit das Weihnachtsfest nach einer Reihe von Jahren nicht in den Frühling anstatt in den Winter falle, könnte man es zur damaligen Zeit bereits am 15. December, nach dem Jahre 1700 am 14. December, nach dem Jahre 1800 am 13. December etc. ansetzen.

Kepler ist auch für die Beibehaltung des 19jährigen Cyclus, der auf dem Nicäischen Concil beschlossen wurde, indem er sagt:

»Da alle Völker Cyklen gehabt haben, halte ich dafür, dass man diesen alten Gastfreund des Julianischen Kalenders nicht unbarmherzig aus seiner gewohnten gastlichen Behausung ausstosse, sondern ihn freundlich behandle und mit Hinzuziehung einer nicht allzustrengen Emendation ihm seine übrigen Fehler vergebe und sie auch fernerhin dulde, wie man sie schon zu den Zeiten des Nicäischen Concils zu dulden gewohnt war, zumal auch Gregor jenen Fehler hat und gegen uns die Unduldsamkeit viel geringer ist, wenn wir durch Beibehaltung des alten einmal in Gunst befindlichen Cyclus, als wenn wir durch irgendwelche Neuerung mit der Geistlichkeit in der Osterfeier nicht übereinstimmen.« Er gibt noch einige sonstige Verbesserungen und erläutert sie durch ein Beispiel für das Jahr 1609.

Auf dem Reichstage zu Regensburg 1613 wirkte *Kepler* vergebens für Einführung des Gregorianischen Kalenders; erst 1700 wurde der verbesserte Kalender von den Protestanten mit den von *Kepler* vorgeschlagenen Verbesserungen, die Rudolfinischen Tafeln statt der prutenischen anzuwenden, angenommen; aber man kehrte, da Protestanten und Katholiken mehrfach das Osterfest verschieden feierten, später ganz zum Gregorianischen Kalender zurück.

Das dritte Aktenstück ist ein Brief von *Kepler* aus Prag vom 29. Februar 1628, an den Kurfürsten Georg I. gerichtet, worin er ein Exemplar seiner Rudolfinischen Tafeln übersendet und folgende Bitte hinzufügt:

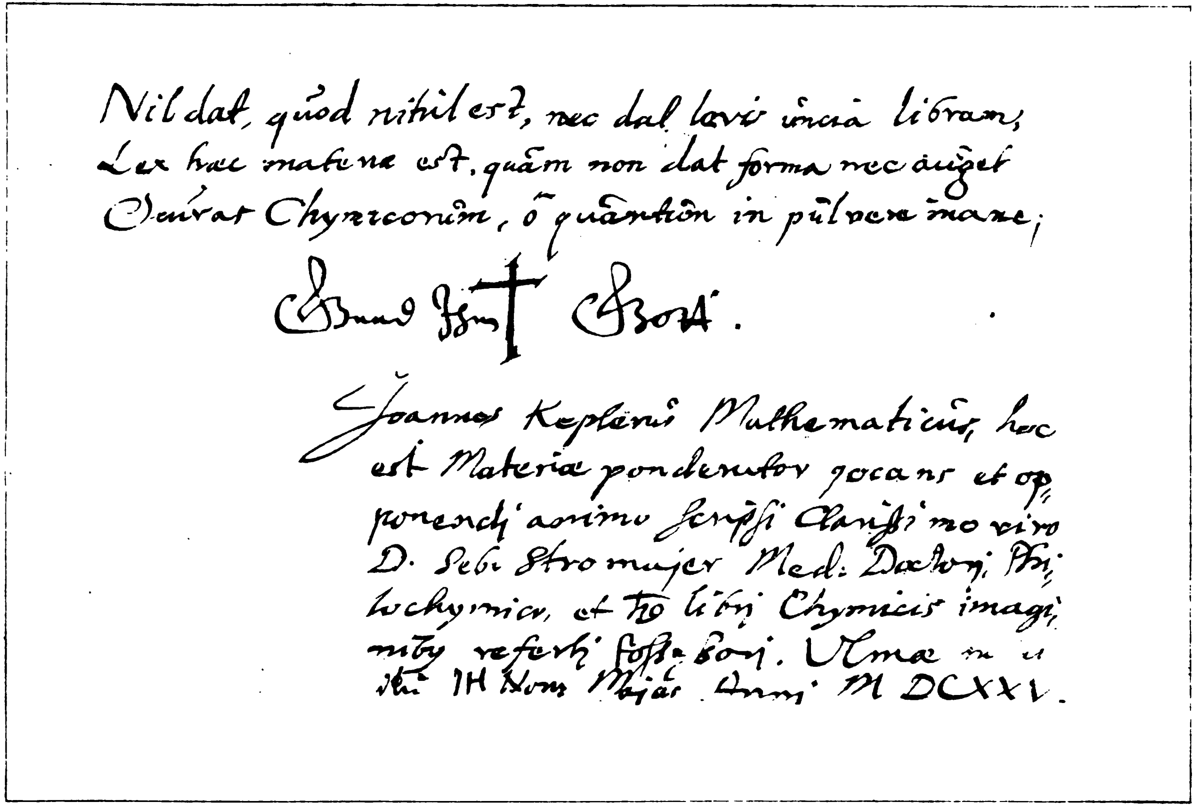
»Demnach aber die jetzige schwäre Laüffe, auch an besagtem Ort allerhand Ungelegenhaiten per consequentiam verursachen, und Ich sampt meinen Angehörigen in dieser Mir noch zur Zeitt ohne das gantz unbekanter refier über nacht auffgetrieben und meinen Fusz noch weitter zu setzen genötigt werden möchte, also gelangt ferners an Ew. Churf. Durchl. mein underthänigstes Bitten, die geruhen Mir bei dieser meiner noch immer fort continuirender Wanderschafft und darbey habenden Sorgfaltigkhaitt, sovil Trosts zu vergunnen und Dero belieben zu lassen, das ich als dan und wann es nit anderst sein wollte, mein sicheres refugium und unverwehrte Unterkunfft mit Weib und Kindern in Dero benachbarten Landen haben und darmit zumahl auch dasjenige was Ich anjetzo durch offentlichen Druckh an Tag bringe, bei Dero löbl. Universiteten Witteberg

oder Leipzig, dermahlen einest auch mündtlich zu Beförderung der Kunst dociren möge.«

Das ganze Schreiben ist bereits von dem Director des Königl. Staatsarchivs Herrn Geh. Archivrath *von Weber* in dem Werke »Aus vier Jahrhunderten«, neue Folge 2. Bd. (S. 27) publicirt.

Endlich ist mir von dem hiesigen Autographenbesitzer Herrn *Künzel* die Mittheilung des folgenden interessanten Albumblattes gestattet, welches uns erkennen lässt, welch ein richtiges Urtheil *Kepler* über den damaligen Stand der Chemie hatte.

Beilage B.


Nil dat, quod nihil est, nec dat levis uncia libram;
Lex haec materiae est, quam non dat forma nec auget
Curat Chyrurgorum, o quantum in pulvere inane;

Joannes Keplerus Mathematicus, hoc
est Materiae ponderator jocans et op-
ponendi animo scripsi Clarissimo viro
D. Seb. Stromayer Med: Doctori Phi-
lochymico, et suo libri Chymicis imagi-
nibus referti possessori. Ulmae in u-
die 14 Non. Majas. Anni MDCXXI.

Johannis Kepleri S. C. Mt. Mathematici judicium[1]) de praecedentibus scriptis Sethi Calvisii et D. Jöstelii.

Quae de Calendarii Veteris emendatione Caluisius et Jöstelius Misniaci perscripsere: in iis ille summum ingenium, iste summam industriam demonstrasse videntur.

Etenim si ab iis partibus, quas in Romano Imperio Protestantes appellamus, ulla correctio Calendarii attentari potest, quae a reprehensionibus Gregorianam emendationem insequentibus libera sit: vix[2]) ea alia methodo suscipi poterit, quam ea, quam Caluisius in plerisque secutus est.

Vicissim, si Caluisianam Calendarii formam sequi velimus: vix[2]) ex illa ullus sequitur error, quem non Jöstelii laboriosa et circumspecta diligentia praeviderit et detexerit.

Vtrumque sua laude dignissimum judico.

Interim vitio mihi non dabitur, si utriusque me sententiae arbitrum rogatus interposuero. Hoc ut commodius faciam, Calendarii negocium in tria capita distribuam. Etenim in Calendario tria ista insunt, Anni quantitas politica, Festa Ecclesiastica mobilia, festa fixa.

Incipiendum autem cum ipsis a festis mobilibus. Cum enim Christus homo factus, inuenerit apud contribules suos Judaeos, non Romanum Julianum solare Calendarium (licet Romanis paruerint Judaei) sed Lunare Syromacedonicum, aut certe, quantum ex Epiphanio colligitur, peculiari nomine Judaicum, comprehensum Cyclo annorum octoginta quatuor: festa etiam Judaica secundum Lunam cum reliquis Judaeis celebravit, ultimoque paschate praedicationis suae, Luna decima quarta politica, instante Agni ceremonia, cruci suffixus et passus est, die Veneris uti nos appellamus; et sequente Luna XVI. ex mortuis resurrexit, feria prima post sabbathum; quam ex eo diem Dominicam ultima nominavit antiquitas. Tradunt Epiphanius et alii, diem fuisse VIII Cal. Aprilis seu 25 Martii anni Juliani 76, quod in supradicto Judaeorum cyclo fieri facile potuit. Nimium hac in re Caluisius, Jöstelius et reliqua modernorum turba credunt Astronomiae, eo loco et tempore, ubi Astronomiae locus non fuit magis, quam hodie in Calendario seu veteri seu nouo Gregoriano Lunae locus relinquitur. Ex hac confidentia frustra affirmant, Christum pas-

1) In der mir vorliegenden Collation des Manuscripts, die möglichst getreu wiedergegeben ist, steht: judicum. 2) Ebenso vi statt vix.

sum 3. Aprilis Juliano 78, biennio, postquam vere passus est; sed haec extra rem. Igitur Apostoli Christi et tota primitiua Ecclesia, cuius primitiae ex Judaeis colligebantur, diem passionis et Resurrectionis Christi anniuersarium continuatione vetustae de Paschate ceremoniae, religiose celebrarunt. Extitit autem in primo statim exordio dissimilitudo haec, ut Judaei Christiani facti, et cum iis Christiani ex Ethnicis, Orientis incolae, illorumque Apostolus Joannes, Ephesi Episcopus, Pascha lunare celebrarent: cum in toto oriente Calendaria Lunaria ex veteri Macedonum instituto (quibus Romani successerunt) in usu essent: contra gentes Romano Imperio subiectae, quae Occidentem incolebant, Pascha secundum Calendarium Julianum obseruarent, celebrarentque in VIII Cal. Apr. perpetuo: quod eo die Cal. Juliani (cuius tunc centesimus annus iam instabat) Christum resurrexisse ex actis Pilati, Romani praesidis, rescissent. Gliscente discidio, res tandem in apertas contentiones erupit: nondum quod mirum cessantibus omnino persecutionibus. Adeoque factionibus indultum est, ut res non indigna visa fuerit concilii Niceni Imperatorisque Constantini cura. Congregauerat paulo ante Theopilus synodum in Caesarea Palaestinae: quod tunc adhuc apud Episcopos, qui Christi erant conterranei, huius negocii conficiendi resideret autoritas. In ea decretum erat, ex Paschate Judaico faciendum Pascha Christianum, celebrandumque non quacunque feria Luna XIV incidisset, sed feria prima post Lunam XIV, hoc est, Dominica die, in memoriam resurrectionis domini, et praeterea post aequinoctium. Cum autem non omnes ubique gentium Christiani, prouincialis Synodi decretis parerent, tandem in generali Synodo Nicena, opera Constantini pax coiit, decretumque ut pascha celebraretur prima XV Luna post aequinoctium, quod tunc erat XII Cal. April. si illa luna incidisset in Dominicam, si minus, Dominica proxime sequente. Etsi vero uerba scriptorum, qui de hac re testantur, nonnulla ita sonant, ac si de Plenilunio, quod in coelo contingit, deque aequinoctio caelesti, et similibus aliis, quae momenta sunt indiuisibilia, non vero de diebus integris, quibus isti tituli Aequinoctii, Plenilunii, Lunae XV et similes imponerentur, sermo esset: constat tamen in eadem Synodo datum esse negocium certis personis, ut Enneadecaeteris*) conscriberetur,

*) Enneadecaeteris, d. h. ein Zeitraum von 19 Jahren; das griechische ἐννεακαιδεκαετηρίς, wo aber καὶ ausgefallen ist.

huic Paschatis negocio accomoda: quam scimus nihil aliud esse, quam Calendarium Lunare: hoc est tale, quod omissis scrupulis et horis, dies integros contineret, omnes quidem incipientes a vespera, quando Luna, si praesens est, lucere incipit; eoque omnes dictas Lunas et a numero dierum aetatis Lunae denominatas.

Cum autem Enneadecaeteris iam pridem fuisset in usu, eamque nationes singulae a sui anni initio computare consuessent, Macedones a Martio vel Aprili, Romani a Januario, Aegyptii ab Augusto: fieri non potuit, quin etiam num post concilium Nicenum dissimilia apud diuersas gentes agerentur Paschata, et ex dissimilitudine existerent contentiones. Itaque post annum Christi quingentesimum demum, restituto Imperio Romano per Orientem, occidente vero antiquitus in Juliano Calendario acquiescente, finis controuersiarum fuit: tunc Dionysius Exiguus, Abbas Cyclum Aegyptiacorum seu Alexandrinorum Christianorum adscripsit Calendario Juliano. Adscriptio dicta fuit veteri nomine Aureus numerus: cuius indicia duo: 1) quod in triginta diebus mensis alicuius non plures 19 occurrunt aurei numeri, et sic dies undecim carent aureo numero: 2) quod deorsum crescunt per octo. Nam post 3 sequitur 11 inde 19 etc. Continet hic aurei numeri Cyclus actu quidem solos 19 annos, potestate vero 76: propterea quod in Calendario Juliano ratio bissexti non absoluitur cum aureo, nec in 19, nec in bis 19, hoc est 38, nec in 57, sed demum in 76 annis.

Quod si in 76 annis Sol et Luna praecise ad pristina redirent initia: nulla ex eo tempore extitisset in Ecclesiis Romano quondam Imperio subiectis neque dissimilitudo festi, neque contentio super eo. Nam et si Cyclus iste (eo quod ad Julianum Calendarium violenter affixus est, cum Natura liber esse debeat) annis non paucis lunas suas, quibus certi dies denominantur, a Lunae phasibus cognominibus abstrahit: quia tamen aliis annis easdem iisdem etiam restituit, nemo extitisset eius accusator. Sed quia post 76 annos Julianos Sol horas 13° plus, Luna horas paulo minus 6°, ultra periodos integras confecit, efficitur multiplicatione periodorum, quarum ad 16 inter concilium et nos intercesserunt, ut hodie sol redeunte eodem anni Juliani die, decem dies ultra integras periodos, Luna dies 4 et 5 ultra integras periodos adiecerit. Itaque tot diebus fallit hodie nostrum Calendarium Julianum in Aequinoctio indicando, aureus numerus in

phasibus Lunae indicandis. Cum igitur hi errores eousque excreuerint, ut propter eos in Paschate celebrando valde longe a Canonibus Nicenis cogamur recedere: tandem bellis per occidentem utrumque uel compositis uel dilatis, florentibusque Christianorum rebus (dum Hispaniarum Reges, Indicis opibus suffulti, magnam Europae partem imperio, caeteros metu retinent) Pontifices Romanos, caeterosque Europae Episcopos cura incessit errorum tollendorum, quos ipsa temporis longinquitas attulit.

Quare ut porro Pascha rectius celebraretur: intra tamen terminos a Nicena Synodo descriptos in typo anni Romani: exempti sunt dies illi decem, utque et futuris temporibus prospiceretur statutum, ut singulis cyclis quadringentorum annorum tres alii in tribus primis centuriis eximerentur. Hac ratione crediderunt prospectum esse motui solis. Pro Lunae erroribus corrigendis, uno ictu aureos numeros in solidum praeciderunt a diebus Calendarii Juliani, proque iis Cyclum triginta Epactarum, unitate decrescentium reposuerunt ad dies mensium, ut sic nullus relinqueretur vacuus. Vt uero sciretur, quo anno quae valeat Epacta, non suffecit Cyclus earum per 11 crescens, quin etiam Cyclum aurei numeri per unitatem crescentis in annos singulos accerserent in subsidium (licet ex calendarii typo reiectum) ut sic hoc collegio Cyclorum aliisque non paucis praeceptionibus et cautelis erueretur iusta cuiuslibet anni Epacta. Haec occasio, haec forma et ratio Emendationis Gregorianae: quam Caluisius et Jöstelius multorum errorum, qui etiamnum contingant in celebratione Paschatis, ream agunt, nec immerito, nec diffitente Clauio propugnatore, nec etiam sine exemplo temporum Nicenorum. Caluisius vero novi consilii autor, ut effugiat hos errores, non cyclum tantum aurei numeri cum Pontificiis abrogat, sed ipsum etiam Epactarum, adeoque omnes alios Cyclos respuit, proque iis ipsam genuinam Astronomiam nobis proponit sequendam. Quod dum facit, plus ad Niceni concilii decreta aperta respicit, quam ad Dionysium ducentis annis posteriorem; plus verba sequitur autorum, qui de concilio testantur, quam exemplum eorum, qui decreta concilii facto expresserunt, recenti adhuc concilio. Ex hac itaque Consideratione potissima controuersia inter Caluisium et Jöstelium dirimitur. Negat Caluisius pascha recte celebrari ea die Dominica, in quam incidit plenilunium: differendum enim in Dominicam sequentem. Vere negat, excepto solo initio illius diei. Concurrant enim in idem momentum et

plenilunium et initium dominicae, idque mense primo, hic dominica haec plenilunium initio attingens, reliquo tractu immediate sequens, omnino pascha continebit; si uerba autorum de motibus caelestibus uti sonant accipiantur. Sin autem ante plenilunium incipiat Dominica, sequens Dominica erit Pascha. Recte itaque Caluisius. At contra uere et Jöstelius Pascha celebrari posse Plenilunio etiam caelesti, sed hoc, concessa ipsi sua hypothesi, concilii scilicet decreta intelligenda non de phasibus caelestibus eorumque momentis, sed de diebus integris alicuius Calendarii Lunaris. Nam quia mensis naturalis habet dies $29^1/_2$, dimidium erit $14^3/_4$. Quod si incipias hos $14^3/_4$ a nouilunio, tunc luna XV incipit $^3/_4$, hoc est 18 horis ante Plenilunium ordinarie, et sic continet Luna XV Plenilunium. Luna vero XV licet celebrari Pascha, Plenilunio igitur. Et uerum est ordinarie, quod dicit Jöstelius, Plenilunii diem esse Lunam XV, non vero verum nisi extraordinarie, quod dicit Caluisius, Plenilunii diem esse Lunam XIV. Sed propius ad Caluisium reuertar. Et difficile quidem est definire, uter rectius faciat, num qui ad uerba autorum, an qui ad exempla imitatorum respicit. Nam pro uerborum sensu, et pro ipsa genuina astronomia facere hoc videtur, quod Cyclum nullum innuunt Canones: ac etsi, qui concilio fuere proximi, quive ab ipso Concilio instituti ad hoc opus, ii Cyclum condiderunt: tamen si tunc astronomia vel nota, uel consueta hominibus, ut hodie fuisset, videntur ii ipsi potius amplexuri fuisse astronomiam, quam Cyclum Politicum. Hodie igitur, postquam innotuit astronomia, omnino videmur aut omni correctione abstinere, aut cum Caluisio ipsam Astronomiam amplecti debere. Haec igitur pro sententia Caluisii speciose: quae vero in contrarium perpendenda, postea sequentur. Iam videndum, si omnino conclusum sit, correctionem suscipere Astronomicam: an ea rite sit peracta a Caluisio. Hic igitur a Jöstelio Caluisius non immerito arguitur, quod ex parte quidem Lunae astronomicam subtilitatem sit amplexus, ex parte vero solis et aequinoctii adhuc haereat in politica diei denominatione: dum aequinoctii nomen adscribit certo alicui diei anni Romani tropici, vel saltem certo et stato momento diei, contra fidem caelestium motuum, qui aequinoctium sistunt in omni diei hora. At si Plenilunium ipsi non est integer dies, sed momentum indiuisibile, ut certe est, debuit et aequinoctium non dies esse, sed momentum in die liberum. Definisset igitur hunc primum mensem, cuius momentum

plenilunii medii ad unguem iungitur momento aequinoctii, uel id quam proxime insequitur. Ita multis erroribus, quorum a Jöstelio non immerito reus agitur supersedisset. Secundo, ut recte ad meridianum Jerosolymitanum suam Nouiluniorum tabulam accomodat, ita tam ipse quam Jöstelius etiam diei initium non mediam noctem, sed vesperam debuerunt accipere. Etsi Jöstelius in fine hoc ipsum comprobat. Argumenta sunt multa. Primum verba autorum hoc innuunt. Deinde Pascha festum est Judaicum, ad Lunam agitur more Judaico, non ad solarem annum. Quidni igitur a vespera incipiat? Tertio dies Calendarii lunaris appellantur Lunae, incipiunt igitur quando Luna praesens lucere incipit, hoc est, vesperi. Quarto omnia fere Christianorum festa, perinde ut Judaeorum incipiunt a vigiliis, et nominatim ipsum Pascha. Igitur et Caluisius suis diebus festis initium sumat a vesperis. Hoc pacto, si coincidant plenilunium, aequinoctium et hora sexta vespertina aequalis Jerosolymis instante die Dominico, Pascha ab illo momento debet incipere. Vbi medium est meum initium diei inter Clavii, qui meridiem antecedentem, et inter Caluisii et Jöstelium, qui mediam noctem antecedentem pro initio diei habent, ubi ego vesperam antecedentem. Tertium, quod melius esse potest in tabula Caluisii, est hoc, ut pro nouiluniis plenilunia ponantur, ut additione non sit opus. Nam plenilunia sunt in hac methodo termini paschales.

Quarto quia aequinoctium spectare debemus, idque verum non medium sit (iterum enim aequinoctium fuit Nicenis 21 Martii, cum medium esset biduo post,) omnino nobis insinuari videntur motus veri: quorsum quidem et uerba autorum, qui de concilio scripserunt, nos invitant. Etenim si Cyclos politicos deserimus ob discrepantiam a coelo, deserendos alius motus medios clamitabit, ob discrepantiam à veris. Omnia quidem argumenta sunt communia. Et habent veri motus defensorem Stöfflerum celeberrimum astronomum.

Quodsi omnino in luna motus medios retinemus, exemplo omnium gentium, qui lunari anno utuntur: tamen hoc nobis cavendum videtur, ut plenilunio paschali addamus horas quatuor, ut sit oppositio motus medii Lunae cum motu vero solis, quem consideramus in die aequinoctii inueniendo, ne simul et uerum et medium solis, motum consideremus, illum propter aequinoctium, hunc propter plenilunium. Et si argimentum ab exemplo gentium omnium, qui Lunari utuntur anno, nos non tam ad me-

dium Lunae motum dirigit, [1]) quam ad Cyclos politicos. Sed de hac ratione inuestigandi Pascha per Cyclos postea iterum agam. Haec igitur quatuor si Caluisius in sua tabula mutauerit, errores a Jöstelio obiectos partim effugiet, partim diluet et pro non erroribus defendet. Et tantum quidem de festis mobilibus.

Iam patet nobis transitus ad ipsam dierum exemptionem ex Calendario Juliano. Quodsi praestet id Caluisius, quod primo loco petii, nimirum si inquirit aequinoctium, uel in anno Juliano uel quocunque alio, idque vel hodie calculo Tychonico, vel olim etiam accurata obseruatione, iam liberabitur necessitate eximendorum dierum ex Juliano. Vbi omnino subscribo Jöstelio, et puto ex dignitate Imperii Romani esse, ut omnino in contractibus Politicis retineatur Calendarium Julianum, idque in perpetuum. Nam secundo, id retinebunt astronomi, dum Astronomia erit in nostro Imperio, retinebunt et ipsi Pontificii ad inuestigandum numerum dierum exemptilium. Est quippe Gregorianum ex numero relatorum, quod sine correlato, hoc est sine Juliano, intelligi non potest. [2]) Cur igitur id abolerent Proceres imperii, quod cum ipso imperio, primoque Imperatore ortum est, praesertim cum iam tritissimum sit utrumque Calendarium coniungere. E contrario infinitae existunt difficultates, si ex politico velimus facere tropicum exemptione dierum. Nam primo, etsi uerum est, si hoc seculo 10 dies et postea tres in tribus primis centenariis quadringentorum annorum omittantur, annum proxime ad tropicum accedere, propius etiam, si cum Caluisio in annis 132 omittamus unum diem, et adhuc propius, si cum Jöstelio ut plurimum in 4, interdum tamen in 5 annis intercalaris omittatur: tamen Ego, illum qui est correctissimus, Jöstelianum scilicet, omnium minime in usum politicum transferendum censeo. Sed Jösteliano praefero Caluisianum, Caluisiano Gregorianum, Gregoriano denique Julianum, non invito ipso Jöstelio. Etenim si incipiamus Julianum corrigere (in quem tamen omnes gentes inde ab origine mundi uel occulte vel aperte respexerunt,) correctionum finis nullus erit. Nam sicut iam Gregorium corrigit Caluisius et Scaliger, Caluisium et Scaligerum, idem se ipsum Scaliger et Jöstelius: sic futurus est, qui et Jöstelium corrigat, et deserendum ipsum etiam Februarium clamitet, antiquam se-

1) Die Collation hat dirigunt.

2) Die Collation hat possunt.

dem bissexti, ne scilicet intercalati dies inaequalibus distent interuallis, interdum 4, interdum 5 annis.

Praeterea impossibile est praestari, quod per exemptionem dierum quaeritur; ut politicus noster annus aequetur tropico, cum ignoremus tropici veram longitudinem. Nam non adsentior Jöstelio, qui Caluisium rigide admodum adstringit ad calculum Tychonicum.

Quomodo potest longitudo a Tychone prodita legem praescribere innumerabilibus seculis, cum comparatione unius solius seculi sit extructa. Non in hunc usum Tycho illam prodidit. Certe si Tychonis observata cum Hipparchi conferamus (antiquiora autem non extant) omnino in 132 annis omittendus erit dies cum Caluisio, contra Jöstelium, qui in 128 annis omittit, idque in aequinoctio altero: in reliquo vero in 134 annis dies omittendus erit cum Alphonsinis; et denique contemperatione facta in 133 annis pauloque quid amplius cum Gregorio dies omittendus erit. Nec obstat, quod hodie Tycho inuenit, hoc fieri in 128 annis. Facile Walterus, cuius observationi Tycho innititur, tantum peccare obseruando potuit, ut ejus aequinoctium in tribus horae quadrantibus incertum sit. Et praeterea olim plane in 300 annis dies fuit omittendus. Breviter anticipatio aequinoctiorum[1]) regulam nullam habet, videturque ex causis physicis turbari (ut certe tota Astronomia, quod his temporibus paradoxon et inauditum est, causis suis physicis innititur); nam quae possit esse regula hic, quod ab Hipparcho per Albategnium undecim seculis posteriorem, ab Albategnio per omnes inter medios ad nos usque anni tropici magnitudo deprehenditur aequabilis, solummodo circa Ptolemaei et concilii Niceni tempora aequinoctium sequi die tardius, quam haec aequabilitas postulat, incidebat.

Hic peccat Caluisius aequabilem instituens progressum aequinoctii a Concilio Niceno ad nos, neglectis Albategnii temporibus, aut ut videtur in ordinem redactis; contra connivet Jöstelius, hunc eius errorem non detegens: aut certe audacia sumpta, negat hanc exorbitationem aequinoctii, dum id Nicenis temporibus non in 21, sed in 20 Martii fuisse affirmat, immemor Ptolemaei, qui non multo ante eandem tarditatem aequinoctii nobis prodit. Denique sunt causae duae ex legibus motuum etiam Constantium, quibus anni tropici variatur longitudo: altera ma-

---

1) Die Collation hat aequinoctium.

nifestior, reliqua occultior. Hodie enim et ab anno Christi 1200 Apogaeum solis est in cancro, et sol aestate tardus, hyeme velox, uelociter appellens ad vernale aequinoctium: Post annorum nouem millia plus minus, erit Apogaeum in Capricorno, sol per hyemem tardus, tarde applicans ad vernale aequinoctium. His igitur nouem annorum millibus octo dies plus accedunt, quam alteris nouem millibus secuturis, si tamen sequentur.

Altera causa est, quod Ecliptica mutat sedes sub fixis, axis vero mundi constantem retinet inclinationem ad polos alicuius Eclipticae mediae; quae res licet paruam, et non satis certo dimensam, aliquam tamen efficit tropicorum inaequalitatem. Sed cum subtilis sit consideratio: mitto in praesentia illam pluribus explicare. Tot causis partim occultis partim manifestis cum varietur tropicorum annorum longitudo, quis praesumat tropicum annum, quacunque exemptione dierum, in politica tempora recipere, praesertim in multa porro secula quasi constantem futurum? itaque caute Gregorius seu eius explicatores, exemptionem hanc relinquit posterorum curae et industriae pro re nata emendandam. Retineamus igitur, quod passim et Jöstelio placet, in numeratione dierum anni politica Julianum veterem, cuius politica quantitas cum mundo quasi incepit, cum finibus orbis terrarum in latum explicatur, ordinatio uero cum incunabilis imperii Romani inuecta fuit, quem Patres Niceni, licet iam translato aequinoctio, non mouerunt suo statu, cum Pascha ordinarent: et quo Gregorius ipse carere non potest.

Sequitur ut de festis fixis agam. Pauca circa ea nobis Protestantibus sunt consideranda, nimirum multiplicari festa, quibusdam diuersarum partium subditis miseris: et in Camera spirensi hodie 24 Apostolos per annum distributos, in id comparatos, ut iusticiae cursum, numero freti, tanto magis impediant, quia scilicet procrastinationum alii praetextus nulli sunt. Quaeritur hic a Theologis, quid hic salua libertate in fauorem inopum facere possimus; cum praesertim fixa festa pleraque a Pontificibus instituta sint! Altera causa hodie ridicula, seruire tamen nobis ad speciem potest. Cum enim sciamus, aequinoctium, hoc est, terminum Paschalem in Juliano Calendario ascendere: metus equidem hic esto, ne quando Pascha in ferias Natalicias incidens nobis omnem anni statum turbet: imo potius, ne festum Natiuitatis Christi in vernum tempus descendat, deleaturque commiseratio B. Mariae, hyeme parientis in stabulo, puerulique fri-

goris causa plorantis. Vt igitur hoc caveatur, quid prohibet, nos id agere, quod praeiverunt Pontificii? Omnino et nos possumus Natiuitatem Christi, quae erat antea in 25. Decembris iam celebrare in 15. Decembris, post annum 1700 in 14. Decembris, post 1800 in 13., post 1900 in 12., et denique (omisso 2000) post 2100 in 11. Decembris anni Juliani. Adsuescent illi, qui tunc victuri sunt. Nec necesse est, ut haec ascensio festorum antea fixorum uel aequabilitatem uel irregularitatem ascendentis termini Paschatis praecise imitetur: sufficit quod hoc pacto in 133 annis pauloque amplius uno die ascendant festa, ut et terminus Paschatis seu aequinoctium hoc annorum numero (medio modo) ascendit.

Nec prohiberi potest, quin festis hisce fixis antiquos dierum numeros ex Juliano apponamus, vocemusque annum festorum uel Ecclesiasticum, tantummodo ut in contractibus politicis numero dierum politico porro utamur, omissis in solidum mentionibus festorum seu sanctorum: et iis in dies Julianos mutatis, quibus erant adscripta antiquitus, nisi manifesta obstent. Summa haec est, ut iungantur calendaria antiquum et nouum, sed in antiquo omittantur sancti: et menses antiqui singuli singula folia occupent. 1)

Superest iam ut, quod supra bis promisi iam exsequar, et quae contra Caluisianam methodum dici possunt expediam.

Ille correctionem Paschatis instituit per ipsam Astronomiam et motus medios, reiectis omnibus Cyclis, offensus informitate Cycli Epactarum Gregoriani, qui in locum aurei numeri receptus est.

At cum testetur Ambrosius, institutum in ipso Concilio Niceno Cyclum decem nouenalem, receptusque sit 500 annis post Christum in Julianum Calendarium, hactenusque fuerit in usu, non obstante, quod in ipso suo initio talia peccaverit, qualia Caluisius et Jöstelius in Gregoriano Cyclo Epactarum, Jöstelius in Caluisiana emendatione reprehendunt; omnesque gentes Cyclis utantur; censuerim hunc antiquum Calendarii Juliani hospitem non immisericorditer eiiciendum consueto hospitio, sed comiter tractandum, et adhibita modica emendatione, condonandos illi reliquos errores, quos more suo etiam concilii Niceni temporibus

1) Hier steht die nachträgliche Randbemerkung *Kepler*'s: nota meam sententiam circa hoc punctum, boni publici studiosam in Romano Imperio.

admisit, ut eosdem etiam porro admittat; praesertim cum et Gregorius illos habeat errores, et multo minor sit nostrarum partium inuidia, si retentione antiqui Cycli, qui fauorem conciliat, quam si aliqua nouatione a pontificiis in paschatis celebratione discrepemus. Emendatio cycli talis est, quae detur astronomis et ipsis Caluisio et Jöstelio examinanda. [1]) Primo aureus XI. mensibus Februario et Aprili ex die 2 sursum promoueatur in d: 1. Similiter et aurei XIX et VIII, singuli in diem unitate superiorem, mensibus Aprili et Junio. Apparet enim luxatos esse a Dionysio hos aureos his mensibus, ut 5. Aprilis etiam nouilunium esse potest, quia patres Niceni nouilunia paschalia inter 8 Martii et 5 Aprilis inclusive, diebus 29 libere vagari voluerunt, aequinoctio in 21 Martii quasi fixo supposito. At cum moueatur aequinoctium, eoque nos alios terminos Paschalium Nouiluniorum substituere cogamur, iste igitur 5. Aprilis in posterum hoc suo priuilegio careat, maneantque sic (restitutis aureis) menses alternis pleni et cavi (dissimulato Februarii bissexto).

Secundo hodie sit aequinoctii dies 10 Martii Juliani, ut est quidem: ergo termini Nouiluniorum Paschalium erunt a 25. Februarii in 25. Martii inclusiue. Nam etsi numerus IX, qui ponitur ad 23. Febr. et 25. Martii aequaliter distat a 10. Martii, tamen decima quarta prioris nouilunii cadit ante 10. Martii in 8. Martii, et sic Nouilunium in 23. Febr: hoc tempore inchoat duodecimum mensem, itaque ambiguitas a propinquitate nouiluniorum relicta facile tollitur per XIV Lunam.

Tertio corrigatur Cyclus aurei numeri seu potius regula inquirendi currentis aurei numeri hoc modo. Ad annos Christi addebatur hactenus unitas. Iam addantur praeterea toties undecim, quoties in annis Christi reperiuntur 500 (seu potius $493^{12}/_{19}$: parva est differentia in paucis seculis). Et abiiciantur 19, quoties fieri potest, residuum est aureus anni currentis.

Sed praestiterit fortasse ad annos Christi primo addere non 1. sed 9. propter decimas quartas.

Tertio praestiterit primo post annum 300 Christi addere undecim, inde semper post 500. Electio inter hos tres modos permittatur potioribus Astronomorum votis.

1) Eine zweite Randbemerkung *Kepler's*: qua ratione Pascha emendetur. Causas plerorumque inuenietis in colloquio Germanico.

Exemplum:

Primo modo		Secundo modo		Tertio modo	
Annus sit	1609		1609		1609
Epocha Christi	1	Epocha Ch.	9	Epocha Ch.	9
500 — —	11	500.	11	300 —	11
1000 — —	11	1000.	11	800 —	11
1500 — —	11	1500.	11	1300 —	11
	1643		1651		1651
	19				
	8				
	152		152		
	123		131		
	19				
	6				
	114		114		
Aureus	9	Aureus	17		17
Paschale Nouilunium	25. Mar.	—	25. Febr.	—	25. Feb.
Paschalis Decima quarta	7. Apr.	—	10. Mar.	—	10. Mar.
Pascha	9. Apr.	—	12. Mar.	—	12. Mar.
			Recte secundum coelum.		
Pascha Pontificium	$^{9}/_{19}$. April.				
Pascha vetus	$^{16}/_{26}$. April.				

Cautione opus esset, quando aureus II currit et proxime instante correctione pro aureo III, aureus XIV assumendus est ex lege superiore, tunc 2. Decembris, et 30. Januarii essent Nouilunia, et sic una lunatio dierum 59, tunc igitur ante exitum anni fiat haec interruptio Cycli, ut pro aureo II sit aureus XIII, monstrante 31. Dec. nouilunium.

Sed possunt hanc correctionis formam latius deducere, et cum veteri cumque Gregoriano comparare, quibus est plus ocii.

Sequitur typus Calendarii secundum dicta duo puncta reformati in mensibus Januario et Februario.

Anno 1609.

Aurei	Januarius.	Aurei	Februarius.	Aurei	Martius.
III.	1. D. 70gesim.	XII.	1. g. Quatembr. 11.	III.	1. g. Philemon. 11.
	2. e. Hilarius 12.		2. a. Ernestus 12.		2. a. Gregorius 12.
XI.	3. f. Foelix 13.	XIX.	3. b. Eulalia 13.	XI.	3. b. Macedon. 13.
	4. g. Nicanor. 14.	VIII.	4. c. Valentinus 14.		4. c. Christian. 14.
XIX.	5. a. Claudi. 15.		5. D. Reminisc. 15.	XIX.	5. D. Palmarum 15.
VIII.	6. b. Marcellus 16.	XVI.	6. e. Juliana 16.	VIII.	6. e. 16.
	7. c. Anthonius 17.	V.	7. f. 17.		7. f. Innocent. 17.
XVI.	8. D. 60ges. 18.		8. g. Concord. 18.	XVI.	8. g. Anshelmus 18.
V.	9. e. Martha 19.	XIII.	9. a. Susanna 19.	V.	9. a. Gertrud. 19.
	10. f. Fab. Seb. 20.	II.	10. b. Eucharius 20.		10. b. Aequinoct. 20.
XIII.	11. g. Agnes 21.		11. c. 21.	XIII.	11. c. Benedictus 21.
II.	12. a. Vincent. 22.	X.	12. D. oculi 22.	II.	12. D. Pascha 22.

	13.b.	Emerent.	23.		13.e.	Tertull.	23.	Olim Pa-	13.e.		23.
X.	14.c	Timoth.	24.	XVIII.	14.f.	Matthiae	24.	scha et annun-	14.f.	Gabriel	24.
	15.D.	50gesim. P. B.	25.	VII.	15.g.	Victor	25.	ciatio eod. die.	15.g.	Annun. Mar.	25.
XVIII.	16.e.	Polycarpus	26		16.a.		26.	XVIII.	16.a.	Longinus	26.
VII.	17.f.	Chrysant.	27.	XV.	17.b.	Nestor.	27.	VII.	17.b.	Esaias	27.
	18.g.	Valerius	28.	IIII.	18.c.	Romanus	28. Mar.		18.c.	Jerem.	28.
XV.	19.a.	Carolus	29.		19.D.	Laetare	1.	XV.	19.D.	Quasim.	29.
IIII.	20.b.	Adelus	30.	XII.	20.e.		2.	IV.	20.e.		30.
	21.c.	Virgilius	31.	I.	21.f.	Ludmilla	3.		21.f.	Guidon.	31.
XII.	22.D.	40gesim.	Bri. 1.		22.g.	Adrianus	4.	XII.	22.g.	Otilia	1. Apr.
I.	23.e.	Maria Licht.	2.	IX.	23.a.	Rampold.	5.	I.	23.a.	Raphael.	2.
	24.f.	Faßnacht	3.		24.b.	Euphros.	6.		24.b.		3.
IX.	25.g.	Aſchermit.	4.	XVII.	25.c.	Gotfrid.	7.	IX.	25.c.	Ambrosius	4.
	26.a.	Agathas.	5.	VI.	26.D.	Judica	8.		26 D.	Misericord.	5.
XVII.	27.b.	Dorothea	6.		27.e.		9.	XVII.	27 e.	Caelest.	6.
VI.	28.c.	Richard.	7.	XIV.	28.f.	Alexand.	10.	VI.	28.f.	Apollo.	7.
	29.D.	Inuocavit.	8.						29.g.	Procopius	8.
XIV.	30 e.	Euphro.	9.					XIV.	30.a.	Xystus	9.
	31.f.		10.					III.	31.b.		10.

Quod in hoc 1609 anno typum feci, eo nihil praescribo neque consulo de tempore emendationis. Causa tamen esse potest Astronomica. Nam hoc anno hora aequinoctii et plenilunii ueri ita coincidunt, ut multis seculis non coincidant propius. Et si mutamus aliquid, ut demonstremus retentam libertatem, conducit in capite ipso emendationis admitti discrimen, ut hoc anno Pascha integro mense celebraremus ante Pontificios: idque ex regula nostra coelo et Canonibus magis consona, quam sunt hoc anno ipsorum Epactae; sed cesso. Scio enim deliberatione et communicatione opus esse et tempore.

Finis.

Carl Neumann, *Vorläufige Conjectur über die Ursachen der thermoelektrischen Ströme.* [1])

Die zum Gleichgewicht eines Gases erforderlichen Bedingungen sind bekanntlich ausgedrückt durch:

$$(1.)\qquad \frac{1}{\delta}\frac{\partial P}{\partial x} = X, \qquad \frac{1}{\delta}\frac{\partial P}{\partial y} = Y, \qquad \frac{1}{\delta}\frac{\partial P}{\partial z} = Z,$$

wo P den Druck im Innern des Gases, δ seine Dichtigkeit, und X, Y, Z die einwirkenden äusseren Kräfte bezeichnen. Dabei findet, zufolge des *Mariotte–Gay Lussac*'schen Gesetzes, zwischen P und δ die Relation statt:

$$(2.)\qquad P = \mathfrak{R}\,(a + \vartheta)\,\delta,$$

wo $\mathfrak{R}$, a Constanten sind, und ϑ die (der *Celsius*'schen Scala entsprechende) Temperatur bezeichnet.

Die Gleichgewichtsbedingungen (1.) lassen sich zusammenfassen in die *eine* Formel

$$(3.)\qquad \frac{dP}{\delta} = Xdx + Ydy + Zdz\,;$$

und diese nimmt, falls X, Y, Z die Differentialquotienten einer Function F sind, folgende Gestalt an:

$$(4.)\qquad \frac{dP}{\delta} = dF,$$

oder, wenn man δ vermittelst (2.) eliminirt, folgende:

$$(5.)\qquad \mathfrak{R}\,d\,(\log P) = \frac{dF}{a + \vartheta}\,.$$

Hieraus aber folgt [wie übrigens auch *Lagrange* [2]) schon bemerkt hat], dass Gleichgewicht *nur dann* eintreten kann, wenn ϑ eine Function von F ist.

---

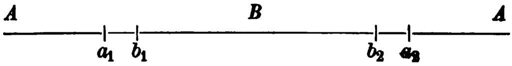
1) Das Manuscript wurde eingereicht am 16. Mai 1872.

2) *Lagrange*; Mécanique analytique. Paris 1853. Tome I, p. 204.

Ist das betrachtete Gas eingeschlossen in irgend eine starre Hülle, und ist ferner die Kräftefunction F *in bestimmter Weise gegeben*, so wird man diese Hülle jederzeit von Aussen her in Contact setzen können mit constanten Wärmequellen von solcher Beschaffenheit, dass die Temperatur ϑ *niemals* eine Function von F werden kann; und alsdann wird also das Gas innerhalb der Hülle in perpetuirlicher Bewegung sich befinden.

Eine derartige perpetuirliche Bewegung lässt sich z. B. herstellen im Innern einer in sich zurücklaufenden Glasröhre, falls man nur über die Kräftefunction F, sowie über die Temperaturvertheilung an der Oberfläche der Röhre in geeigneter Weise zu disponiren im Stande ist.

Die Röhre sei überall von gleichem Querschnitt, und so enge, dass das darin enthaltene Gas nur longitudinal (d. i. nur in der Richtung der Röhre) sich bewegen kann. Ferner mögen die auf das Gas einwirkenden äusseren Kräfte von solcher Beschaffenheit sein, dass F längs eines gewissen Segmentes der Röhre einen *constanten* Werth **A**, und längs des übrig bleibenden Segmentes einen *andern constanten* Werth **B** besitzt; während an jeder der beiden Grenzstellen ein continuirlicher aber ziemlich rapider Uebergang des einen Werthes in den andern stattfindet. Diese Verhältnisse seien angedeutet durch folgendes Schema:



wo B sich hinerstreckt von b_1 bis b_2, ebenso A von a_2 bis a_1. Es mögen nämlich die vorhin genannten *Segmente* der Röhre angedeutet sein durch die Strecken A und B, andererseits die erwähnten *Uebergangsstellen* angedeutet durch die kleinen Strecken $a_1 b_1$ und $b_2 a_2$. — Endlich sei nun die Röhre an der Stelle $a_1 b_1$ umgeben von einer constanten Wärmequelle von der Temperatur ϑ_1, und an der Stelle $b_2 a_2$ von einer andern solchen Wärmequelle von der Temperatur ϑ_2.

Zum Vorhandensein des Gleichgewichts ist nach (5.) erforderlich, dass für jedes Element $d\sigma$ der Röhre die Gleichung besteht:

$$(6.)\qquad \mathfrak{R}\, d(\log P) = \frac{dF}{a+\vartheta},$$

wo $d(\log P)$ und dF die dem Element $d\sigma$ correspondirenden

Differentiale sind. Die Erfüllung dieser Bedingung für *sämmtliche* Elemente der Röhre ist, wie sogleich gezeigt werden soll, ein Ding der Unmöglichkeit, falls die gegebenen Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 von einander verschieden sind.

Integrirt man nämlich die Gleichung (5.) über sämmtliche Elemente $d\sigma$ der ganzen Röhre, so folgt:

$$0 = \int \frac{dF}{a+\vartheta};$$

und die rechte Seite dieser Formel reducirt sich, weil F längs A den *constanten* Werth $\mathbf{A}$, längs B den *constanten* Werth $\mathbf{B}$ besitzt, auf zwei den beiden Uebergangsstellen $a_1 b_1$ und $b_2 a_2$ entsprechende Integrale. Man erhält also:

$$0 = \int_{a_1}^{b_1} \frac{dF}{a+\vartheta} + \int_{b_2}^{a_2} \frac{dF}{a+\vartheta},$$

oder weil ϑ längs der Uebergangsstelle $a_1 b_1$ den *constanten* Werth ϑ_1, und längs der Uebergangsstelle $b_2 a_2$ den *constanten* Werth ϑ_2 besitzt:

$$0 = \frac{1}{a+\vartheta_1}\int_{a_1}^{b_1} dF + \frac{1}{a+\vartheta_2}\int_{b_2}^{a_2} dF,$$

d. i.

$$0 = \frac{\mathbf{B}-\mathbf{A}}{a+\vartheta_1} + \frac{\mathbf{A}-\mathbf{B}}{a+\vartheta_2},$$

also schliesslich:

(7.) $$0 = (\mathbf{B}-\mathbf{A})\left(\frac{1}{a+\vartheta_1} - \frac{1}{a+\vartheta_2}\right).$$

Ist nun $\mathbf{A}$ verschieden von $\mathbf{B}$, und ϑ_1 verschieden von ϑ_2, so wird die Erfüllung dieser Gleichung (7.), mithin auch die Erfüllung der Gleichung (6.) unmöglich, mithin im Innern der Röhre eine perpetuirliche Strömung vorhanden sein. Die Richtung dieser Strömung lässt sich leicht ermitteln; man findet, dass dieselbe, falls $\mathbf{A} < \mathbf{B}$ ist, im Segmente A vom kälteren zum wärmeren Ende geht. [1])

---

1) Diese Schlussfolgerungen dürften ihre experimentelle Bestätigung gefunden haben durch einige Versuche, welche mein Freund *Feddersen* anzustellen die Güte hatte. Derselbe hatte in einer langen Glasröhre auf eine kurze Strecke geglühten Platinschwamm oder Palladiumschwamm fest eingestampft. Wurde nun das eine Ende dieser Strecke erhitzt, das andere dagegen kalt erhalten, während die in der Röhre enthaltene Luft (bei *Pt*

Die in solcher Weise constatirte perpetuirliche Bewegung des Gases hat, was unsere theoretischen Vorstellungen anbelangt, ihren innern Grund darin, dass hier *zweierlei* Principien in einander greifen, dass jedes derselben einen *andern* Gleichgewichtszustand fordert, eine Ausgleichung zwischen diesen beiderlei Anforderungen aber *nicht* möglich ist. Die in Rede stehenden Principien oder Bewegungsursachen sind einerseits das *Princip der potentiellen Kräfte*, andererseits das *Princip des isotropen Druckes*. In unseren Formeln findet das erstere seinen Ausdruck durch die der Function F entspringenden Kräfte X, Y, Z; letzteres durch die dem *Mariotte-Gay Lussac*'schen Gesetz unterworfene Kraft P.

Ich wende mich nun zu dem eigentlichen Gegenstande meiner Mittheilung. In meinen früheren Untersuchungen (vergl. diese Berichte vom Jahre 1871, p. 407) sind die Ursachen oder Kräfte, durch welche die thermoelektrischen Ströme entstehen, kurzweg als *Verschiebungskräfte* bezeichnet worden; zugleich ist damals bemerkt worden, dass diese Kräfte bis jetzt völlig räthselhafter Natur sind, namentlich aber nachgewiesen worden, dass dieselben *kein* Potential besitzen können, weder im statischen noch im dynamischen Sinne (l. c. p. 406).

In den einigermaassen gut und fest ausgebildeten Theilen der theoretischen Physik finden wir zwei von einander differente Grundlagen, bald einzeln, bald nebeneinander hergehend, nämlich das *Princip der potentiellen Kräfte* und das *Princip des isotropen Druckes*. Die Hoffnung, es werde dereinst möglich sein,

---

atmosphärische Luft, bei *Pd* Wasserstoff) durch einen Tropfen einer Flüssigkeit (Quecksilber, Schwefelsäure oder Oel) jederseits abgesperrt war, so zeigte sich eine Bewegung von dem kälteren zu dem wärmeren Ende durch den Schwammpfropf hindurch. Die Schwierigkeit den Wasserdampf, der störend einzuwirken schien, ganz zu entfernen, sowie der Uebelstand, dass bei abwechselnden Erwärmungen und Erkältungen der Schwammpfropf sich an den Wandungen der Glasröhre lockerte und dadurch eine freie Communication des Gases in der ganzen Röhre herbeigeführt wurde, haben es bis jetzt unmöglich gemacht, bestimmte Zahlenangaben für den Verlauf einer seither unbekannten Erscheinung zu liefern, welche man vielleicht nicht unpassend mit dem Namen *Thermodiffusion* bezeichnen könnte.

die Ursachen der thermoelektrischen Ströme zurückzuführen auf das erste Princip *allein*, war durch die Ergebnisse der eben angeführten Untersuchungen so gut wie abgeschnitten; und von selber musste daher der Blick sich richten auf jenes andere Princip, auf das Princip des isotropen Druckes.

Um zunächst beurtheilen zu können, ob bei Zuhülfenahme dieses zweiten Princips, wirklich irgend welche Aussicht sich eröffne zur Erklärung der thermoelektrischen Ströme, war zunächst die allgemeine Frage zu beantworten, ob *beiderlei* Principien zusammengenommen die perpetuirliche Bewegung irgend einer Materie zur Folge haben können, sobald dieselbe (wie solches bei den thermoelektrischen Strömen der Fall ist) der Einwirkung gegebener Wärmequellen und der gleichzeitigen Einwirkung gegebener potentieller Kräfte unterworfen gedacht wird. Diese Vorfrage führte mich zur Betrachtung gasförmiger Materien hin, und fand durch dieses Beispiel ihre bejahende Beantwortung, wie solches auf den vorhergehenden Seiten näher explicirt worden ist.

Somit erscheint es wohl einigermassen der Mühe werth, zu untersuchen, ob von jenen *beiderlei* Principien aus, ähnlich wie die Gasströme, ähnlich vielleicht auch die thermoelektrischen Ströme ihre Erklärung finden können; und es mag mir daher gestattet sein, einen derartigen Versuch hier in Kürze mitzutheilen. So wenig exact und provisorisch dieser Versuch in Bezug auf seine nähere Ausführung vorläufig auch sein mag, so dürfte aus demselben dennoch hervorgehen, dass weitere und *sorgfältiger* ausgeführte Arbeiten, in dieser Richtung nicht ohne Aussicht auf günstigen Erfolg sein werden.

Ich behalte die in meinem schon genannten früheren Aufsatz entwickelten Anschauungen (vergl. diese Berichte vom Jahre 1871, p. 386—449) vollständig und ungeändert bei, abgesehen von den damals eingeführten Verschiebungskräften. An Stelle dieser lasse ich die Supposition eintreten, dass im elektrischen Fluidum (ebenso wie in einem Gase) ein dem *Mariotte-Gay Lussac*'schen Gesetz

$$P = \mathfrak{R}(a + \vartheta)\,\delta \qquad (8.)$$

entsprechender isotroper Druck P stattfindet, [vergl. (2.)].

Von dieser Grundlage aus ergiebt sich für die Bewegung des genannten Fluidums[1]) in einer linearen Thermokette folgende Gleichung:

$$(9.)\qquad \frac{\varkappa}{q} J = -\frac{1}{\delta}\frac{dP}{d\sigma} - \frac{d\Phi}{d\sigma} + E_\sigma .$$

Hier bezeichnet:

dσ ein Element der Thermokette,

q den Querschnitt des Elementes *dσ*,

$\varkappa$ den reciprocen Werth der Leitungsfähigkeit der in *dσ* enthaltenen festen Substanz,

δ die Dichtigkeit des in *dσ* enthaltenen Fluidums,

P den isotropen Druck in diesem Fluidum,

J die Stromstärke dieses Fluidums,

Φ das auf *dσ* ausgeübte elektrostatische Potential, dasselbe bezogen gedacht auf die elektrische Masseneinheit,

E_σ die nach *dσ* genommene Componente der auf *dσ* einwirkenden elektrodynamischen Kraft, diese Kraft bezogen gedacht auf die elektrische Masseneinheit.

Aus dem Gesetze (8.) ergiebt sich sofort:

$$\frac{dP}{d\sigma} = \mathfrak{R}\delta\frac{d\vartheta}{d\sigma} + \mathfrak{R}(a+\vartheta)\frac{d\delta}{d\sigma},$$

mithin:

$$\frac{1}{\delta}\frac{dP}{d\sigma} = \mathfrak{R}\frac{d\vartheta}{d\sigma} + \mathfrak{R}(a+\vartheta)\frac{d(\log\delta)}{d\sigma}.$$

Somit kann die Gleichung (9.) auch so dargestellt werden:

$$(10.)\qquad \frac{\varkappa}{q} J = -\mathfrak{R}\frac{d\vartheta}{d\sigma} - \mathfrak{R}(a+\vartheta)\frac{d(\log\delta)}{d\sigma} - \frac{d\Phi}{d\sigma} + E_\sigma ,$$

oder, falls man sich beschränkt auf die Betrachtung des *stationären* Zustandes, auch so:

$$(11.)\qquad \frac{\varkappa}{q} J = -\mathfrak{R}\frac{d\vartheta}{d\sigma} - \mathfrak{R}(a+\vartheta)\frac{d(\log\delta)}{d\sigma} - \frac{d\Phi}{d\sigma} .$$

Integrirt man diese Gleichung über sämmtliche Elemente *dσ* der ganzen Thermokette, und beachtet, dass (zufolge des voraus-

1) Der unitarischen Vorstellungsweise entsprechend, sollen im Folgenden kurzweg die Worte *Fluidum* und *negative Materie* gebraucht werden; ersteres zur Bezeichnung des aus positiv elektrischer Materie bestehenden Fluidums, letzteres zur Bezeichnung der mit den ponderablen Massen unlöslich verbundenen negativ elektrischen Materie.

gesetzten *stationären* Zustandes) die Stromstärke J längs der Kette constant ist, so erhält man sofort:

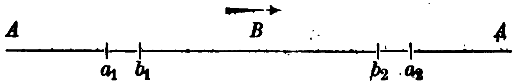
$$(12.)\qquad J\int\frac{\varkappa d\sigma}{q} = -\,\mathfrak{N}\int\vartheta\,\frac{d\,(\log\delta)}{d\sigma}\,d\sigma\,,$$

oder was dasselbe ist:

$$(13.)\qquad J\mathfrak{w} = -\,\mathfrak{N}\int\vartheta\,d\,(\log\delta)\,,$$

wo $\mathfrak{w}$ den sogenannten *Widerstand* der Kette bezeichnet, und wo die Integration rechter Hand hinerstreckt zu denken ist über sämmtliche Elemente der ganzen Kette.

Die gegebene Kette sei von möglichst einfacher Beschaffenheit; sie sei zusammengelöthet aus zwei Metalldrähten A und B, und angedeutet durch folgendes Schema:



Dabei soll der ⟶ diejenige Richtung markiren, in welcher auf dem Ringe (d. i. auf der Kette) die Bogenlänge und ebenso auch die Stromstärke zu rechnen sind. Die beiden Uebergangsstellen[1]) $a_1\,b_1$ und $b_2\,a_2$ mögen in constanten Temperaturen erhalten gedacht werden, die eine in der Temperatur ϑ_1, die andere in der Temperatur ϑ_2. Um nun, unter so bewandten Umständen, das in (13.) vorhandene Integral berechnen zu können, müssen wir zunächst bestimmtere Vorstellungen uns bilden über die Dichtigkeit δ des elektrischen Fluidums.

Bezeichnet man bei einer homogenen Substanz (z. B. bei einer homogenen Metallmasse) für die Temperaturen 0 und ϑ die linearen Dimensionen mit l_0 und l, ferner die Volumina mit v_0 und v, endlich die Dichtigkeiten mit d_0 und d, so finden bekanntlich Relationen statt von folgender Form:

---

1) Sind die Metalle A und B, um ein Beispiel vor Augen zu haben, etwa Antimon und Wismuth, so wird in unserm Schema das von b_1 bis b_2 sich erstreckende Segment B aus *homogenem* Wismuth, ebenso das von a_2 bis a_1 reichende Segment A aus *homogenem* Antimon bestehen. Anders verhält es sich mit den Uebergangsstellen, nämlich mit den Elementen $a_1\,b_1$ und $b_2\,a_2$. Denn das in einem solchen Elemente vorhandene Metall ist *nicht mehr als homogen* zu bezeichnen, sondern vielmehr als eine aus Antimon und Wismuth zusammengesetzte Legirung, deren Mischungsverhältniss an verschiedenen Puncten des Elementes verschiedene Werthe besitzt (vergl. diese Berichte vom Jahre 1871, p. 411, 412).

$$(14.a) \qquad l = l_0 \, (1 + m\vartheta + n\vartheta^2),$$
$$(14.b) \qquad v = v_0 \, (1 + 3m\vartheta + 3n\vartheta^2),$$
$$(14.c) \qquad d = d_0 \, (1 - 3m\vartheta - 3n\vartheta^2),$$

wo m und n gewisse Constanten sind, von denen die erstere bezeichnet zu werden pflegt als der *lineare thermische Ausdehnungscoefficient.* Bei dem Uebergange von (14.a) zu (14.b) und dann weiter zu (14.c) sind die höheren Potenzen von m, n vernachlässigt worden; was (weil m, n erfahrungsmässig sehr klein sind) wohl gestattet ist, und auch im Folgenden geschehen mag.

Die negativ elektrische Materie befindet sich mit der ponderablen Materie des Metalles in unlöslicher Verbindung. Demzufolge wird beim Uebergange von der Temperatur 0 zur Temperatur ϑ die Dichtigkeit jener negativ elektrischen Materie genau in demselben Verhältniss sich ändern, wie die der ponderablen. Bezeichnet man also für die genannten Temperaturen die Dichtigkeiten der negativen Materie mit δ_0 und δ, so wird $\delta_0 : \delta = d_0 : d$ sein, und folglich nach (14.c):

$$(14.d) \qquad \delta = \delta_0 \, (1 - 3m\vartheta - 3n\vartheta^2).$$

Das betrachtete Metall befindet sich (hinsichtlich der elektrischen Verhältnisse) in seinem sogenannten *natürlichen* Zustande, wenn an jeder Stelle die Dichtigkeit des Fluidums gleich gross ist mit der Dichtigkeit der daselbst vorhandenen negativen Materie; so dass also während des *natürlichen* Zustandes die Dichtigkeit jenes Fluidums ebenfalls ausgedrückt sein wird durch die Formel (14.d).

Diese *normale* (nämlich dem *natürlichen* Zustande entsprechende) Dichtigkeit des Fluidums erleidet nun allerdings, sobald das Metall in *andere* Zustände versetzt wird, irgend welche Veränderungen, und zwar Veränderungen, deren Grösse oder Kleinheit ohne tiefer gehende Betrachtungen nicht gut beurtheilt werden kann. Wenn ich nun trotzdem diese Veränderungen im Folgenden vernachlässigen werde, so ist das nur ein Nothbehelf [1]), und zugleich der Grund, wesshalb die gegenwärtige Untersuchung, in

---

1) Allerdings könnte ich mich, um diese Vernachlässigung zu rechtfertigen, auf *Riemann* berufen. Vergl. diese Berichte vom Jahre 1871, p. 417, 418.

Bezug auf ihre nähere Ausführung, von mir schon vorhin als eine wenig exacte und provisorische bezeichnet wurde.

Wir setzen also, einerlei ob das Metall in seinem *natürlichen*, oder in irgend welchem *andern* Zustande sich befindet, die Dichtigkeit δ des in ihm enthaltenen Fluidums

(14. e) $$= \delta_0 \, (1 - 3m\vartheta - 3n\vartheta^2).$$

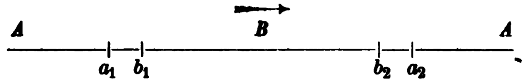
An Stelle des Buchstabens δ benutzen wir bei denjenigen Metallen A und B, aus denen die gegebene Thermokette besteht, specieller die Buchstaben α und β; und erhalten also:

(14. f) $$\alpha = \alpha_0 \, (1 - 3m\vartheta - 3n\vartheta^2),$$

(14. g) $$\beta = \beta_0 \, (1 - 3m'\vartheta - 3n'\vartheta^2),$$

wo m, n die dem Metalle A, und m', n' die dem Metalle B entsprechenden Coefficienten sein sollen.

Mit Rücksicht auf das Schema



der gegebenen Kette, kann nun die Formel (13.) so dargestellt werden:

(15.) $$\frac{J\mathfrak{w}}{\mathfrak{W}} = -\int_{a_1}^{b_1} \vartheta d(\log\delta) - \int_{b_2}^{a_2} \vartheta d(\log\delta) - \int_{A} \vartheta d(\log\delta) - \int_{B} \vartheta d(\log\delta),$$

wo die beiden *ersten* Integrale den Uebergangsstellen $a_1\, b_1$ und $b_2\, a_2$, die beiden *letzten* den homogenen Segmenten A und B entsprechen, und wo die Integrale, ebenso wie der Strom J, sämmtlich gerechnet sind in der durch den ⟶ angedeuteten Richtung. Die beiden *ersten* Integrale können, weil ϑ auf den Uebergangsstellen die constanten Werthe ϑ_1 und ϑ_2 besitzt, auch so geschrieben werden:

$$-\vartheta_1 \int_{a_1}^{b_1} d\,(\log\delta) - \vartheta_2 \int_{b_2}^{a_2} d\,(\log\delta),$$

Sie reduciren sich also auf:

$$-\vartheta_1 \,(\log\beta_1 - \log\alpha_1) - \vartheta_2 \,(\log\alpha_2 - \log\beta_2),$$

d. i. auf

(16.) $$\vartheta_1 \log\frac{\alpha_1}{\beta_1} - \vartheta_2 \log\frac{\alpha_2}{\beta_2},$$

wo α_1, β_1 und α_2, β_2 die Werthe von α, β (14. f. g) für die Tem-

peraturen ϑ_1 und ϑ_2 bezeichnen. Was ferner die beiden *letzten* Integrale in (15.) anbelangt, so können diese auf Grund der eingeführten Bezeichnungen auch so geschrieben werden:

$$-\int_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} \vartheta\, d(\log\alpha) - \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \vartheta\, d(\log\beta),$$

also (bei Anwendung der partiellen Integrationsmethode) auch so:

$$-\Big[\vartheta \log\alpha\Big]_{\vartheta_2}^{\vartheta_1} - \Big[\vartheta\log\beta\Big]_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} + \int_{\vartheta_2}^{\vartheta} \log\alpha\,.\,d\vartheta + \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} \log\beta\,.\,d\vartheta,$$

also schliesslich auch so:

$$(17.)\quad -\vartheta_1 \log\frac{\alpha_1}{\beta_1} + \vartheta_2\log\frac{\alpha_2}{\beta_2} - \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\log\alpha\,.\,d\vartheta + \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\log\beta\,.\,d\vartheta\,.$$

Durch Substitution der Integralwerthe (16.), (17.) in die Formel (15.) folgt:

$$(18.)\qquad \frac{Jw}{\mathfrak{R}} = -\int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2}\log\alpha\,.\,d\vartheta + \int_{\vartheta_1}^{\vartheta}\log\beta\,.\,d\vartheta\,.$$

Führt man nun an Stelle der von ϑ abhängenden Functionen α, β (14. f. g) zwei neue Functionen ein $\mathbf{A}(\vartheta)$, $\mathbf{B}(\vartheta)$, indem man setzt:

$$(19.)\qquad \begin{aligned} \int\log\alpha\,.\,d\vartheta &= -\mathbf{A}(\vartheta), \\ \int\log\beta\,.\,d\vartheta &= -\mathbf{B}(\vartheta), \end{aligned}$$

so ergiebt sich:

$$(20.)\qquad \frac{Jw}{\mathfrak{R}} = [\mathbf{A}(\vartheta_2) - \mathbf{A}(\vartheta_1)] - [\mathbf{B}(\vartheta_2) - \mathbf{B}(\vartheta_1)],$$

oder was dasselbe ist:

$$(21.)\qquad \frac{Jw}{\mathfrak{R}} = [\mathbf{B}(\vartheta_1) - \mathbf{A}(\vartheta_1)] + [\mathbf{A}(\vartheta_2) - \mathbf{B}(\vartheta_2)]\,.$$

Letztere Formel steht in vollem Einklang mit der bei den thermoelektrischen (und ebenso auch bei den hydroelektrischen) Strömen gebräuchlichen Nomenclatur. Dieser entsprechend würden nämlich $\mathbf{A}(\vartheta)$ und $\mathbf{B}(\vartheta)$ zu bezeichnen sein als die von der Temperatur abhängenden *Spannungszahlen* der betrachteten beiden Metalle A und B.

Setzt man für den Augenblick $\mathbf{A}(\vartheta) - \mathbf{B}(\vartheta) = f(\vartheta)$, so folgt aus (20.):

$$(22.) \qquad \frac{Jw}{\mathfrak{R}} = f(\vartheta_2) - f(\vartheta_1).$$

Sind a, b, c beliebig gegebene Temperaturen, und denkt man sich den Temperaturen ϑ_1, ϑ_2 successive folgende Werthe zuertheilt:

$$\begin{array}{lll} \text{I)} & \vartheta_2 = b, & \vartheta_1 = a, \\ \text{II)} & \vartheta_2 = c, & \vartheta_1 = a, \\ \text{III)} & \vartheta_2 = c, & \vartheta_1 = b, \end{array}$$

so wird, falls man die diesen drei Fällen entsprechenden Werthe von J mit J_{I}, J_{II}, J_{III} bezeichnet, zufolge (22.) die Relation stattfinden:

$$(23.) \qquad J_{\mathrm{III}} = J_{\mathrm{II}} - J_{\mathrm{I}},$$

ein Ergebniss, welches völlig in Einklang steht mit einer schon von Becquerel[1] *ausgesprochenen Regel.*

Um die Functionen (oder Spannungszahlen) $\mathbf{A}(\vartheta)$, $\mathbf{B}(\vartheta)$ zu ermitteln, gehen wir zurück zu den Formeln (14. f. g). Aus diesen folgt:

$$\log \alpha = \log \alpha_0 + \log(1 - 3m\vartheta - 3n\vartheta^2),$$

also mit Vernachlässigung der höhern Potenzen von m, n:

$$\log \alpha = \log \alpha_0 - 3m\vartheta - 3n\vartheta^2,$$

folglich:

$$\int \log \alpha \, . \, d\vartheta = (\log \alpha_0)\,\vartheta - \frac{3m}{2}\vartheta^2 - n\vartheta^3 + \text{Const.}$$

Somit ergiebt sich aus (19.):

$$(24.) \qquad \mathbf{A}(\vartheta) = -(\log \alpha_0)\,\vartheta + \frac{3m}{2}\vartheta^2 + n\vartheta^3 - \text{Const.},$$

und folglich:

$$(25.) \qquad \mathbf{A}(\vartheta_2) - \mathbf{A}(\vartheta_1) = (\vartheta_2 - \vartheta_1)\left[-\log \alpha_0 + \frac{3m}{2}(\vartheta_2 + \vartheta_1) + n(\vartheta_2^2 + \vartheta_2\vartheta_1 + \vartheta_1^2)\right].$$

Ebenso erhält man:

$$(26.) \qquad \mathbf{B}(\vartheta_2) - \mathbf{B}(\vartheta_1) = (\vartheta_2 - \vartheta_1)\left[-\log \beta_0 + \frac{3m'}{2}(\vartheta_2 + \vartheta_1) + n'(\vartheta_2^2 + \vartheta_2\vartheta_1 + \vartheta_1^2)\right].$$

---

1) Vergl. das *Biot-Fechner*'sche Lehrbuch der Experimentalphysik. Bd. III, Leipzig 1829, Seite 138.

Durch Substitution dieser Ausdrücke (25.), (26.) nimmt sodann aber unsere Formel (20.) folgende Gestalt an:

$$(27.\,x)\qquad \frac{J\mathfrak{w}}{\mathfrak{R}} = (\vartheta_2 - \vartheta_1)\left[\log\frac{\beta_0}{\alpha_0} - \frac{3\,(m'-m)}{2}\,(\vartheta_2 + \vartheta_1) - (n'-n)\,(\vartheta_2^2 + \vartheta_2\vartheta_1 + \vartheta_1^2)\right],$$

oder, falls man die Coefficienten n, n' gegen m, m' vernachlässigt, *näherungsweise* folgende:

$$(27.\,y)\qquad \frac{J\mathfrak{w}}{\mathfrak{R}} = (\vartheta_2 - \vartheta_1)\left[\log\frac{\beta_0}{\alpha_0} - \frac{3\,(m'-m)}{2}\,(\vartheta_2 + \vartheta_1)\right].$$

Uebrigens lassen sich diese Formeln (27. x. y) auch so darstellen:

$$(28.\,x)\qquad \frac{J\mathfrak{w}}{\mathfrak{R}} = 2\tau\left[\log\frac{\beta_0}{\alpha_0} - 3\,(m'-m)\,\sigma - 3\,(n'-n)\left(\sigma^2 + \frac{\tau^2}{3}\right)\right],$$

$$(28.\,y)\qquad \frac{J\mathfrak{w}}{\mathfrak{R}} = 2\tau\left[\log\frac{\beta_0}{\alpha_0} - 3\,(m'-m)\,\sigma\right],$$

wo $\vartheta_2 - \vartheta_1 = 2\tau$, und $\vartheta_2 + \vartheta_1 = 2\sigma$ gesetzt ist, so dass also $\vartheta_1 = \sigma - \tau$ und $\vartheta_2 = \sigma + \tau$ ist.

Den weiteren Betrachtungen mag nun die approximative Formel (27. y) oder (28. y) zu Grunde gelegt werden. Sollen die Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 der Art eingerichtet werden, dass *kein* Strom entsteht, J also $= 0$ wird, so ist, wie jene Formel zeigt, zu diesem Zwecke nur erforderlich, dass dem arithmetischen Mittel $\frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}$ oder σ ein gewisser bestimmter Werth beigelegt werde. Setzt man nämlich dieses arithmetische Mittel

$$= \frac{1}{3\,(m'-m)}\,\log\frac{\beta_0}{\alpha_0},$$

so wird J immer $= 0$ sein, wie die Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 im Uebrigen auch beschaffen sein mögen. *Dieses Ergebniss steht mit den experimentellen Untersuchungen von W. Thomson*[1]) *in gutem Einklang.* Jener specielle Werth des arithmetischen Mittels σ, bei welchem *kein* Strom entsteht, die beiden Metalle A, B also gegen einander neutral sind, wird von *W. Thomson* bezeichnet als der *neutrale Temperaturpunct.*

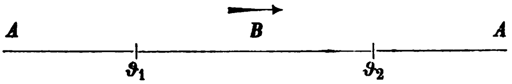
Um die Vorstellungen mehr zu fixiren, mögen folgende *Determinationen* eingeführt und im Weiteren festgehalten werden:

---

1) *W. Thomson:* On the elektrodynamic Qualities of Metals. Philosophical Transactions of the R. Soc. of London. Vol. 146, p. 706.

(29.) I. Es sei $\vartheta_2 > \vartheta_1$, mithin τ positiv.
II. Die beiden Metalle, aus denen die Kette besteht, seien in solcher *Ordnung* mit A, B bezeichnet, dass für Temperaturen, die wenig von 0 verschieden sind, A elektropositiv ist gegen B. [1]

Zufolge der letztern Determination wird bei Anwendung von Temperaturen, die wenig von 0 entfernt sind, in der Kette ein Strom entstehen, welcher durch die *wärmere* Löthstelle, d. i. durch die Stelle ϑ_2, von B nach A geht, also ein Strom, welcher



die Richtung des $\longrightarrow$ besitzt. Mit andern Worten: Bei Anwendung von Temperaturen, die wenig von 0 verschieden sind, wird J, und folglich auch $\frac{J\mathfrak{w}}{\mathfrak{R}}$ *positiv* sein. Denn die Constanten $\mathfrak{w}$, $\mathfrak{R}$ sind ihrer Bedeutung nach von positiver Natur.

Bringen wir nun auf die Kette die Formel (28. y):

$$\frac{J\mathfrak{w}}{\mathfrak{R}} = 2\tau\left[(\log\beta_0 - \log\alpha_0) - 3(m' - m)\sigma\right] \qquad (30.)$$

in Anwendung, und zwar zunächst unter der Voraussetzung, dass ϑ_1, ϑ_2, mithin auch σ *unendlich* nahe an 0 liegen, so erhalten wir $\frac{J\mathfrak{w}}{\mathfrak{R}} = 2\tau(\log\beta_0 - \log\alpha_0)$. Hieraus aber erkennen wir, weil zufolge jener Determinationen (29.) τ und $\frac{J\mathfrak{w}}{\mathfrak{R}}$ positiv sind, sofort, dass $\log\beta_0 > \log\alpha_0$, mithin $\beta_0 > \alpha_0$ sein muss. *Sind also A und B irgend zwei Metalle, von denen das erstere elektropositiv ist gegen das letztere bei solchen Temperaturen, die wenig von 0 abweichen, und sind ferner α_0 und β_0 die Dichtigkeiten, welche das respective in A und B enthaltene elektrische Fluidum bei der Temperatur 0 besitzt, so wird immer $\alpha_0 < \beta_0$ sein.*

Nachdem der positive Werth von $(\log\beta_0 - \log\alpha_0)$ constatirt ist, bringen wir nun unsere Formel (30.) in Anwendung auf *beliebige* Temperaturen ϑ_1, ϑ_2, indem wir beständig fest-

---

1) Besteht also die Kette z. B. aus Antimon und Wismuth, so wird das Antimon mit A, das Wismuth mit B zu benennen sein.

halten an den Determinationen (29.), und indem wir uns wieder $\vartheta_1 = \sigma - \tau$, $\vartheta_2 = \sigma + \tau$ gesetzt denken. Alsdann erkennen wir sofort, dass der Werth von J, bei ungeändertem τ, mit der Erhöhung von σ *sinken* oder *steigen* wird, jenachdem die Constante $(m' - m)$ *positiv* oder *negativ* ist. Ferner erkennen wir, dass der Werth von J Null werden wird, sobald man, wie beschaffen τ auch sein mag, für σ den speciellen Werth

$$\Sigma = \frac{\log \beta_0 - \log \alpha_0}{3\,(m' - m)}$$

eintreten lässt, und dass also dieser sogenannte *neutrale Temperaturpunct* Σ *über* 0 oder *unter* 0 liegen wird, jenachdem $(m' - m)$ *positiv* oder *negativ* ist. Wir gelangen somit zu folgender Regel: *Ist das Metall A für wenig von 0 abweichende Temperaturen elektropositiv gegen das Metall B, und sind m und m' die linearen thermischen Ausdehnungscoefficienten respective für A und B, so wird, falls* $m' > m$ *ist, der sogenannte neutrale Temperaturpunct* Σ *der beiden Metalle über 0 liegen; und gleichzeitig wird in diesem Falle der Werth des Quotienten* $\frac{J}{\tau}$ *bei wachsendem* σ *mehr und mehr abnehmen. Andrerseits werden die entgegengesetzten Verhältnisse stattfinden, falls* $m' < m$ *ist.*

Nehmen wir die beiden Metalle Eisen und Kupfer, so ist ersteres als A, letzteres als B zu bezeichnen, weil bei wenig von 0 abweichenden Temperaturen Eisen elektropositiv gegen Kupfer ist. Gleichzeitig haben alsdann die Ausdehnungscoefficienten m, m' nach *Fizeau* folgende Zahlenwerthe:

$$A)\ \text{Eisen},\quad m = 1136 \,.\, 10^{-8},$$
$$B)\ \text{Kupfer},\quad m' = 1596 \,.\, 10^{-8}.$$

Folglich ist $m' > m$. Folglich muss nach unserer Regel der neutrale Temperaturpunct Σ *über* 0 liegen. Solches findet durch die Erfahrung seine Bestätigung. Denn *Becquerel*, *Hankel*, *W. Thomson* haben Σ respective $= 300^0$, $= 270^0$, $= 280^0$ gefunden.

Nehmen wir ferner Antimon und Wismuth, so ist ersteres als das A, letzteres als das B zu bezeichnen. Gleichzeitig ist, was die Ausdehnungscoefficienten m, m' betrifft, nach *Matthiessen*:

$$A)\ \text{Antimon},\quad m = 923 \,.\, 10^{-8},$$
$$B)\ \text{Wismuth},\quad m' = 1167 \,.\, 10^{-8}.$$

Folglich ist $m' > m$. Folglich muss nach unserer Regel der Werth des Quotienten $\frac{J}{\tau}$ mit wachsendem σ mehr und mehr *abnehmen*; was ebenfalls mit der Erfahrung übereinstimmt.

In solcher Weise sind von mir im Ganzen 31 Fälle, in denen experimentelle Data vorlagen, in Betracht gezogen worden. Ueberall fand die gewünschte Uebereinstimmung statt, mit Ausnahme von 3 Fällen.

Es wurde bereits hervorgehoben, dass zur Erklärung der thermoelektrischen Ströme das *Princip der potentiellen Kräfte* unzureichend, die Herbeiziehung irgend eines *zweiten* Princips also eine Sache der Nothwendigkeit ist. Als solches aber dürfte sich (abgesehen von den eben angestellten Erörterungen) das *Princip des isotropen Druckes* schon desswegen empfehlen, weil dasselbe ein in andern Gebieten der physikalischen Wissenschaft seit lange adoptirtes ist, die Creirung eines völlig neuen Principes aber jedenfalls beanstandet werden muss, solange die Aussicht, mit den vorhandenen auszureichen, noch nicht völlig abgeschnitten sich findet.

Uebrigens werde ich in meiner Ansicht, dass das *Princip des isotropen Druckes* nicht nur in der Hydrodynamik und Aërodynamik, sondern auch in andern Gebieten der theoretischen Physik eine Rolle zu spielen berufen ist, wesentlich dadurch bestärkt, dass ich mich bereits bei früheren Untersuchungen über die Bewegung des Lichtäthers zu *ebendemselben* Princip mit einer gewissen Nothwendigkeit hingedrängt sah. In der That habe ich damals [1] nachgewiesen, dass die Gesetze der magneti-

---

1) Ich beziehe mich hier auf meine Habilitationsschrift vom Jahre 1858, welche später als separates Werk erschienen ist unter dem Titel: *Die magnetische Drehung der Polarisationsebene des Lichtes. Halle* 1863. Dasselbe *Princip des isotropen Druckes* (der sich beim Aether hinzuaddirt zu dem ausserdem bestehenden sogenannten elastischen Druck) ist ferner von mir zu Grunde gelegt worden in einem Aufsatz: *Ueber die Aetherbewegung in Krystallen* (Math. Annalen. Bd. I. p. 325 und Bd. II. p. 182). Auch ist dasselbe Princip von *Von der Mühl* adoptirt worden bei seinen Untersuchungen über die Reflexion und Refraction des Lichtes (Doctor-Dissertation. Königsberg. 1866), welche hoffentlich bald in ausführlicherer Gestalt erscheinen wird.

schen Drehung der Polarisationsebene des Lichtes der Hauptsache nach in befriedigender Weise sich ableiten lassen, sobald man im Innern des Aethers ebenfalls einen gewissen *isotropen Druck* annimmt, überhaupt mit Bezug auf den Aether von Vorstellungen ausgeht, ziemlich analog denjenigen, welche hier für das elektrische Fluidum proponirt worden sind.

Zu Anfang, als jene Vorstellung des *isotropen Druckes* speciell mit Bezug auf den Lichtäther zum ersten Mal sich mir aufdrängte, und ich meinem Vater darüber Mittheilung machte, wollte dieser ein solches Princip kaum gelten lassen; und die meisten Physiker und Mathematiker werden wahrscheinlich noch heute demselben ihre Billigung versagen. Der anfängliche Widerspruch meines Vaters verwandelte sich aber zu meiner grossen Freude sehr bald in unbedingte Zustimmung; so dass mein Vater das in Rede stehende Princip nicht nur in seinen Vorlesungen adoptirte, sondern auch mehrmals mir gegenüber sich dahin äusserte, der durch jenes Princip in der theoretischen Optik, namentlich in der Theorie der Reflexion und Refraction, indicirte Weg sei derjenige, welcher vorläufig wohl *am meisten* sich empfehle. — Vielleicht dürfte die Zeit nicht ferne sein, wo das von mir mit Bezug auf Lichtäther und elektrisches Fluidum proponirte *Princip des isotropen Druckes* auf allgemeine Annahme zu rechnen hat.

SITZUNG AM 1. JULI 1872.

P. A. Hansen, *Ueber die Anwendung von Lichtbildern zur Beobachtung der Venusvorübergänge vor der Sonne.*

In meinen früheren Aufsätzen über die Anwendung der Helio-Photographie auf Fälle, in welchen Präcisionsmessungen auf dem erhaltenen Lichtbilde erforderlich sind, habe ich vorausgesetzt, dass das Lichtbild dem Gegenstande, welchen es darstellt, in allen Theilen vollkommen proportional sei, und hiebei unter Anderem das Resultat erhalten, dass man als Ausgang für die anzustellenden Messungen nur Einer graden Linie auf dem Bilde bedarf, die man durch einen im Brennpunkt des Objectivs des helio-photographischen Apparats ausgespannten Spinnefaden darstellen kann. Die neueren Erfahrungen haben aber gezeigt, dass auch bei den besten Apparaten zu diesem Zwecke die Proportionalität des Bildes mit dem Gegenstande nicht erreicht werden kann, und es daher besonderer Versuche bedarf, um die Abweichungen eines jeden besonderen Apparats zu ermitteln und festzustellen, so wie besonderer Rechnungen, um die schädliche Wirkung dieses Mangels an Proportionalität aus dem Resultat, welches man erlangen will, zu entfernen. Indem ich diesen Gegenstand in dem gegenwärtigen Aufsatze abzuhandeln mir vornehme, werde ich in den Erklärungen mich besonders an einen Venusvorübergang vor der Sonnenscheibe halten, während die Resultate auch in anderen Fällen, unter Anderem bei Sonnenfinsternissen u. dergl. anwendbar sind.

Denken wir uns während eines Vorüberganges der Venus vor der Sonnenscheibe, von einer beliebigen Anzahl von Punkten der Sonne und des Umkreises der Venus, Lichtstrahlen ausgehend, die sich im Auge des Beobachters schneiden. In angemessener Entfernung vom Auge denke man sich eine Ebene,

welche senkrecht auf den vom Mittelpunkt der Sonne ausfahrenden Lichtstrahl steht, und von allen oben genannten Lichtstrahlen geschnitten wird. Diese Durchschnittspunkte gewähren, wenn man sie auf alle Theile des Gegenstandes, so wie dieser sich dem Auge des Beobachters darstellt, ausdehnt, auf dieser Ebene ein Bild, welches dem Gegenstande in allen seinen Theilen proportional ist. Dieses ideelle Bild soll hier das Urbild genannt werden.

Dem Urbilde stelle ich das durch den helio-photographischen Apparat erhaltene Lichtbild desselben gegenüber, welches ich die Projection des Urbildes, oder schlecht weg die Projection nennen werde.

Da die Oberflächen der Glaslinsen, welche in ihrer Gesammtheit den helio-photographischen Apparat bilden, Kugelschalen sind, und es unmöglich ist, alle Lichtstrahlen, die von Einem Punkt ausgehen, selbst wenn sie homogen wären, nach ihrer Brechung durch solche Linsen in Einen Punkt zu vereinigen. ausserdem verschiedenfarbige Lichtstrahlen verschieden gebrochen werden, so darf man auf eine vollständige Proportionalität aller Theile der Projection mit dem Urbilde nicht rechnen. Zwar haben die Fortschritte der Dioptrik uns Mittel kennen gelehrt, die Vereinigung von Lichtstrahlen, die von bestimmten Punkten des Gegenstandes ausgehen, nach ihrer Brechung durch Glaslinsen der genannten Form wieder mit grosser Schärfe mit einander vereinigen zu können, aber für alle Lichtstrahlen, die von jedem Punkte des Gegenstandes ausgehen, ist diess nicht möglich, wenn gleich durch jene Hülfsmittel die Vereinigung sehr nahe hervorgebracht werden kann, so dass die übrig bleibenden Fehler klein sein werden.

Da die Linsen, aus denen das Ocular des helio-photographischen Apparats besteht, weit grössere Krümmungen besitzen, als die des Objectivs, so ist es vorzugsweise das Ocular, welchem der Mangel an Proportionalität der Projection mit dem Urbilde zugeschrieben werden muss, und der vom Objectiv herrührende Theil dieses Mangels kann gegen denjenigen, welchen das Ocular hervorbringt, als verschwindend betrachtet werden.

Denken wir uns ein vollkommen gearbeitetes und genau centrirtes, aus mehreren Linsen bestehendes Ocular, so ist es klar, dass wenn in einem Punkte des Gesichtsfeldes desselben, dessen Entfernung von der optischen Achse des Oculars r genannt wird, die Abweichung von der Proportionalität die Grösse σ

erreicht, in allen übrigen Punkten, die dieselbe Entfernung r von der optischen Achse besitzen, dieselbe Abweichung σ von der Proportionalität zwischen der Projection und dem Urbilde stattfinden muss. Mit anderen Worten, die stattfindenden Abweichungen von der Proportionalität sind in jedem Kreise, dessen Mittelpunkt in der optischen Achse des Oculars liegt, dieselben, und diese Abweichungen sind daher nur Functionen der Entfernung des Punkts, dem sie angehören, von der optischen Achse.

Selbst wenn es einem Optiker gelänge Linsen von anderer Form herzustellen, die dem Brechungsgesetze zufolge bessere Wirkung äussern müssten, als Kugeloberflächen, würde die obige Bedingung fortbestehen, da jedenfalls an die Stelle der Kugeloberflächen nur Revolutionsoberflächen gesetzt werden können, deren Umdrehungsachse mit der optischen Achse zusammenfällt.

Da es auch dem geschicktesten Künstler nicht möglich ist, ein absolut vollkommenes Werk hervorzubringen, so wird ein Ocular, wie wir es uns eben gedacht haben, in der Wirklichkeit nicht vorhanden sein; aber die Hülfsmittel, die gegenwärtig zur Bearbeitung und Centrirung der Glaslinsen vorhanden sind, haben eine solche Vollkommenheit erreicht, und die verschiedenen Glasarten, die jetzt zu dioptrischen Zwecken angefertigt werden, besitzen einen so hohen Grad von Homogeneität, dass wenig daran zu wünschen übrig bleibt. Die Hand des geschickten, und mit den besten Apparaten zur Bearbeitung der Linsen versehenen, praktischen Optikers kann daher ein Linsensystem herstellen, welches von der absoluten Genauigkeit nur um sehr kleine Grössen abweicht. Die oben ermittelte Bedingung, zufolge deren die Abweichungen von der Proportionalität blosse Functionen der Entfernung von der optischen Achse des Linsensystems sind, wird daher bei allen, von geschickten Künstlern angefertigten Linsensystemen immer sehr nahe stattfinden; starke Abweichungen davon würden sich auch sogleich durch Mangel an Deutlichkeit der Bilder verrathen müssen.

Es sollen aus diesem Grunde in den zunächst folgenden Untersuchungen nur die Abweichungen von der Proportionalität betrachtet werden, deren Wegschaffung theoretisch betrachtet unmöglich ist, und erst weiter unten soll angegeben werden, wie man überhaupt alle vorhandenen Abweichungen ermitteln und in Rechnung ziehen kann.

1.

Verlegen wir auf der Projection — d. i. auf dem unmittelbar erhaltenen Lichtbilde — so wie auf dem Urbilde, den Anfangspunkt der Coordinaten in den Punkt, welcher in der Verlängerung der optischen Achse des zur Aufnahme des Lichtbildes dienenden Oculars des helio-photographischen Apparates liegt. Seien auf dem Urbilde r die Entfernung irgend eines anderen Punkts von diesem Anfangspunkt, auf der Projection ϱ die Entfernung des jenem correspondirenden Punkts von demselben Anfangspunkt, und r blos Function von ϱ. Da nun die theoretischen Abweichungen der gebrochenen Lichtstrahlen von ihrer vollkommenen Vereinigung durch Reihen ausgedrückt werden können, die nach den ungraden Potenzen ihres Abstandes von der optischen Achse fortschreiten, so dürfen wir setzen

$$r = \varrho + a\varrho^3 + b\varrho^5 + c\varrho^7 + \text{etc.}$$

wo a, b, c, etc. constante Coefficienten sind, deren Erlangung weiter unten gezeigt werden wird.

Dieser Ausdruck giebt also die vorhandene Abweichung von der Proportionalität zwischen der Projection und dem Urbilde, und da dieselbe nur klein sein kann, so werden immer a, b, c, etc. kleine Grössen sein; durch zweckmässige Bestimmung der Einheit von ϱ^3, ϱ^5, ϱ^7, etc. kann man stets bewirken, dass sie nicht allzu klein, und in ihrer Anwendung unbequem würden.

Seien auf dem Urbilde x und y die rechtwinkligen Coordinaten des Punkts r, und auf der Projection ξ und η die jenen parallelen Coordinaten des Punkts ϱ; sei ferner θ der Winkel, den der Radius r mit der Achse der x macht, dann wird θ auch der Winkel sein, den auf der Projection der Radius ϱ mit der Achse der ξ macht, und wir bekommen

$$x = r\cos\theta, \quad \xi = \varrho\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta, \quad \eta = \varrho\sin\theta$$

2.

Aus den im vor. Art. erhaltenen Gleichungen ergeben sich

(1) . . . . $x = f\xi, \quad y = f\eta$

wenn man

(2) . . . . . $f = 1 + a\varrho^2 + b\varrho^4 + c\varrho^6 + \text{etc.}$

setzt, und da

(3) . . . . $\varrho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$

ist, so sind durch die Gleichungen (1) die Coordinaten irgend eines Punkts auf dem Urbilde durch rationale Functionen der Coordinaten des correspondirenden Punkts auf der Projection dargestellt. Die Forderung, die Coordinaten jedes beliebigen Punkts des Urbildes überhaupt in Function der Coordinaten des correspondirenden Punkts der Projection, oder umgekehrt, darzustellen, die die Aufgabe der Projectionstheorie bildet, hat hier ohne Zuziehung der Infinitesimalrechnung erfüllt werden können, weil beides Urbild und Projection Ebenen sind.

Durch Abmessungen auf der Projection, und Zuziehung der Gleichungen (1), (2), (3) kann man also die Lage jedes abgebildeten Punkts auf dem Urbilde erhalten, und durch dasselbe Verfahren, wenn es auf alle erforderlichen Punkte ausgedehnt wird, das Bild, welches dem Gegenstande nicht völlig ähnlich ist, in ein demselben ganz ähnliches verwandeln.

3.

Sei irgend eine krumme oder grade Linie auf dem Urbilde gegeben, deren Gleichung

$$F(x, y) = 0$$

ist, wo unter F ein Functionszeichen verstanden wird, dann ist auf der Projection

$$F(f\xi, f\eta) = 0$$

die Gleichung der entsprechenden Linie. Dieser allgemeine Satz soll hier nur auf die grade Linie und den Kreis angewandt werden, da wenigstens gegenwärtig zur Anwendung auf andere Linien kein Bedürfniss vorliegt.

4.

Sei die Gleichung irgend einer auf dem Urbilde gegebenen graden Linie

$$y \cos\alpha = x \sin\alpha + p,$$

dann ist α der Winkel, den diese grade Linie mit der x Achse macht, und p die kleinste Entfernung derselben vom Anfangspunkt der Coordinaten. Wir bekommen nun sogleich für die entsprechende Linie auf der Projection die Gleichung

$$\eta \cos\alpha = \xi \sin\alpha + \frac{p}{f}$$

woraus man erkennt, dass diese Linie im Allgemeinen eine krumme ist, die nur dann in eine grade übergeht, wenn $p = 0$ ist, oder wenn sie durch den Anfangspunkt der Coordinaten. das ist durch die optische Achse des Oculars geht.

5.

Man kann die eben erhaltene Gleichung durch eine Winkeltransformation der Coordinaten vereinfachen. Seien ξ' und η' andere rechtwinklige Coordinaten, die mit den ξ und η durch die folgenden Gleichungen verbunden sind,

$$(4) \quad \ldots\ldots\ldots \left\{ \begin{array}{l} \xi = \xi' \cos\alpha - \eta' \sin\alpha \\ \eta = \xi' \sin\alpha + \eta' \cos\alpha \end{array} \right.$$

dann giebt die Substitution für unsere Linie auf der Projection die Gleichung

$$(5) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \eta' f = p$$

und es wird ausserdem

$$\varrho = \sqrt{\xi'^2 + \eta'^2}$$

Die Gleichung (5) unserer Linie zeigt, dass sie zu beiden Seiten der Achse der η' symmetrisch ist, da ξ' nur in f, und in dieser Function nur in graden Potenzen vorkommt. Ausserdem zeigt die (5) dass η' immer abnimmt, wenn f zunimmt, und umgekehrt; wenn daher f eines Maximums fähig ist, so besitzt η' ein Minimum, und wenn f eines Minimums fähig ist, so besitzt η' ein Maximum; im ersteren Falle wendet unsere Linie ihre concave Seite, und im anderen Falle ihre convexe Seite der Achse der ξ' zu. Ob f Maxima oder Minima besitzt, hängt von der Beschaffenheit der Coefficienten a, b, etc. des Ausdrucks

$$f = 1 + a\varrho^2 + b\varrho^4 + \text{etc.}$$

ab. Wenn diese Coefficienten alle positiv sind. so ist der Werth $f = 1$, für $\varrho = 0$, ein Minimum, und wenn sie alle negativ sind, ein Maximum. In anderen Fällen kann f sowohl Maxima wie Minima haben, und in diesen hat unsere Linie Wendepunkte. Diese Sätze sind so leicht zu erkennen, dass sie keiner weiteren Beweise bedürfen.

6.

Das Differential der Gleichung (5) giebt

$$\frac{d\eta'}{dx'} = \frac{\frac{df}{d\varrho}\eta'\xi'}{\varrho f + \frac{df}{d\varrho}\eta'^2}$$

woraus hervorgeht, dass unter allen Umständen η' für den Werth $\xi' = 0$ ein Maximum oder ein Minimum ist. Der Werth $\eta' = 0$, welcher ebenfalls den Differentialquotienten linker Hand gleich Null machen würde, ist unannehmbar, weil daraus im Allgemeinen $f = \infty$ folgen würde; der Werth $\frac{df}{d\varrho} = 0$ endlich bedingt die oben erwähnten Wendepunkte, deren nähere Betrachtung hier überflüssig ist.

Setzt man $\xi' = 0$ in f, so giebt die Gleichung (5), wenn man h statt η' schreibt,

$$h + a h^3 + b h^5 + c h^7 + \ldots = p$$

aus welcher Gleichung der Maximal- oder Minimalwerth h von η' folgt. Da die Coefficienten a, b, etc. immer klein sind, so lässt sich der Werth von h aus dieser Gleichung immer durch ein indirectes Verfahren leicht berechnen. Man kann die nämliche Gleichung aber auch durch Reihenumkehr auflösen, und damit den Werth von h direct erhalten. Die Umkehrung ergiebt

$$h = p + \alpha p^3 + \beta p^5 + \gamma p^7 + \ldots$$

wo

$$\alpha = -a$$
$$\beta = 3a^2 - b$$
$$\gamma = -12 a^3 + 8 ab - c$$
etc.

sind.

7.

Man kann nun leicht so viele Punkte unserer krummen Linie, wie man will, durch ein directes Verfahren berechnen, und darauf aufzeichnen. Zu dem Ende nehme man eine beliebige Anzahl von Werthen von ϱ an, die alle grösser sein müssen als h, und rechne damit die entsprechenden Werthe von η' durch die Gleichung

$$\eta' = \frac{p}{1 + a\varrho^2 + b\varrho^4 + c\varrho^6 + \ldots}$$

und hierauf für jeden angenommenen Werth von ϱ durch die Gleichung

$$\pm \xi' = \sqrt{\varrho^2 - \eta'^2}$$

je zwei Werthe, einen positiven und einen negativen von absolut gleicher Grösse von ξ', womit schon die Aufgabe gelöst ist, da man erforderlichen Falles durch die Gleichungen (4) von den Coordinaten ξ' und η' zu den ξ und η übergehen kann.

8.

Wenden wir uns zum Kreise. Denken wir uns auf dem Urbilde irgend einen beliebigen Kreis gezogen, und suchen die diesem entsprechende krumme Linie auf der Projection. Sei p die Entfernung des Mittelpunkts des Kreises von dem Anfangspunkt der Coordinaten, α der Winkel, den p mit der x Achse macht, und R der Halbmesser des Kreises, dann ist

$$x^2 + y^2 - 2\,x\,p\cos\alpha - 2\,y\,p\sin\alpha + p^2 = R^2$$

die Gleichung desselben. Die Substitution der Gleichungen (1) giebt sogleich

$$(6) \qquad \xi^2 f^2 + \eta^2 f^2 - 2\,\xi f p \cos\alpha - 2\,\eta\, f p \sin\alpha + p^2 = R^2$$

welche die Gleichung der dem Kreise entsprechenden krummen Linie auf der Projection ist.

Man vereinfacht diese Gleichung wieder durch die Substitution

$$\xi = \xi' \cos\alpha - \eta' \sin\alpha$$
$$\eta = \xi' \sin\alpha + \eta' \cos\alpha$$

durch welche sie in

$$(7) \; \ldots\ldots \; (\xi'^2 + \eta'^2) f^2 - 2\,\xi' f p + p^2 = R^2$$

oder in

$$(8) \; \ldots\ldots\ldots \; \eta'^2 f^2 + (\xi' f - p)^2 = R^2$$

übergeht.

9.

Man erkennt aus der eben erhaltenen Gleichung sogleich, dass die krumme Linie auf der Projection, gleichwie auf dem Urbilde, ein Kreis ist, wenn $p = 0$, und dass der Halbmesser dieses Kreises $\frac{R}{f}$ zum Ausdruck hat. In allen anderen Fällen

wird aber diese Linie kein Kreis sondern ein Oval sein, welches aus zwei gleichen und ähnlichen Hälften besteht.

Um diese Sätze zu beweisen, sei zuerst $p = 0$, oder mit Worten, der Mittelpunkt des Kreises auf dem Urbilde soll im Anfangspunkt der Coordinaten liegen. Da nun wie immer $\varrho^2 = \xi'^2 + \eta'^2$ ist, so wird, wenn man zugleich den Ausdruck (2) für f substituirt, die Gleichung (7)

$$\varrho + a\,\varrho^3 + b\,\varrho^5 + c\,\varrho^7 + \ldots = R$$

da hier ϱ unveränderlich ist, offenbar die Gleichung eines Kreises mit dem Halbmesser ϱ oder $\frac{R}{f}$ sein, wie oben angeführt wurde.

In allen andern Fällen bekommt man aus (8)

$$\pm\,\eta' = \frac{\sqrt{R^2 - (\xi' f - p)^2}}{f} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

woraus hervorgeht, dass jedem überhaupt möglichen Werthe von ξ' zwei Werthe von η' angehören, die absolut betrachtet einander gleich sind, von welchen aber der eine positiv, und der andere negativ ist. Die Achse der ξ' theilt daher die krumme Linie in zwei gleiche und ähnliche Hälften.

Die vorstehende Gleichung giebt ferner zu erkennen, dass das Maximum und das Minimum von ξ' durch die Ausdrücke

$$\xi' = \frac{p+R}{f} \text{ und } \xi' = \frac{p-R}{f}$$

gegeben sind, so wie dass diese beiden Werthe dem Werthe $\eta' = 0$ angehören. Substituirt man den entsprechenden Werth von f, so zeigt sich, dass das Maximum und das Minimum von ξ' durch die Gleichungen

$$\xi' + a\,\xi'^3 + b\,\xi'^5 + c\,\xi'^7 + \ldots = p + R$$

und

$$\xi' + a\,\xi'^3 + b\,\xi'^5 + c\,\xi'^7 + \ldots = p - R$$

gegeben sind, die eben so aufgelöst werden können, wie oben die betreffende Gleichung in der Theorie der Projection der graden Linie.

Die Gleichung (9) giebt ferner zu erkennen, dass das Maximum von η' eintritt, wenn

$$\xi' = \frac{p}{f}$$

ist, und den Ausdruck

$$\pm \eta' = \frac{R}{f}$$

erhält. Die Achse der η' theilt daher unsere krumme Linie in zwei ungleiche und unähnliche Theile, und es giebt keine Parallele zur η' Achse, durch welche sie in zwei gleiche und ähnliche Theile getheilt werden könnte.

10.

Um eine beliebige Anzahl von Punkten der Projection eines der Grösse und Lage nach auf dem Urbilde gegebenen Kreises zu construiren, bemerke ich, dass die Gleichung (7)

$$\xi' = \frac{\varrho^2 f}{2p} + \frac{p^2 - R^2}{2pf}$$

giebt. Nachdem man daher durch die im vor. Art. abgeleiteten Gleichungen das Maximum und das Minimum von ξ' berechnet hat, welche Werthe auch dem Maximum und Minimum von ϱ entsprechen, nehme man eine Reihe von Werthen von ϱ an, die innerhalb dieser Grenzen liegen, und berechne durch die vorstehende Gleichung die dazu gehörigen Werthe von ξ', woraus man die correspondirenden Werthe der η' durch die Gleichung

$$\pm \eta' = \sqrt{(\varrho + \xi')(\varrho - \xi')}$$

erhält. Will man ausserdem die Coordinaten ξ und η kennen lernen, so geschieht diess wieder durch die Gleichungen (4) da α jedenfalls zu den gegebenen Grössen gehört.

11.

Nehmen wir jetzt die umgekehrte Aufgabe vor, betrachten wir die Projection eines auf dem Urbilde befindlichen Kreises als gegeben, und suchen die Grösse und Lage dieses Kreises. Da diese Aufgabe die Bestimmung von drei Unbekannten, nemlich von α, p, R, verlangt, so bedarf man zu ihrer Lösung drei Gleichungen, deren Constanten jedenfalls durch Abmessung der Coordinaten dreier Punkte der Projection erlangt werden können. Seien diese Coordinaten ξ, η; $\xi_{,}$, $\eta_{,}$; $\xi_{,,}$, $\eta_{,,}$ und die aus denselben folgenden Werthe von ϱ und f bezüglich ϱ, f; $\varrho_{,}$, $f_{,}$; $\varrho_{,,}$, $f_{,,}$. Setzt man nun zur Abkürzung

$$\lambda = p \sin \alpha$$
$$\mu = p \cos \alpha$$

so giebt die Gleichung (6) die Gleichungen

$$\varrho^2 f^2 - 2 \xi f \mu - 2 \eta f \lambda + p^2 = R^2$$
$$\varrho_,^2 f_,^2 - 2 \xi_, f_, \mu - 2 \eta_, f_, \lambda + p^2 = R^2$$
$$\varrho_{,,}^2 f_{,,}^2 - 2 \xi_{,,} f_{,,} \mu - 2 \eta_{,,} f_{,,} \lambda + p^2 = R^2$$

Die Unterschiede dieser Gleichungen, in welchen p und R verschwinden, geben zur Bestimmung von λ und μ die Gleichungen

$$(\varrho^2 f^2 - \varrho_,^2 f_,^2) - 2 (\xi f - \xi_, f_,) \mu - 2 (\eta f - \eta_, f_,) \lambda = 0$$
$$(\varrho_,^2 f_,^2 - \varrho_{,,}^2 f_{,,}^2) - 2 (\xi_, f_, - \xi_{,,} f_{,,}) \mu - 2 (\eta_, f_, - \eta_{,,} f_{,,}) \lambda = 0$$

aus welchen leicht durch wechselsweise Elimination die Bestimmung von λ und μ erhalten wird. Bevor ich diese vornehme, will ich auf eine Vereinfachung aufmerksam machen, deren diese Gleichungen fähig sind.

Theoretisch betrachtet können zwar die drei zur beabsichtigten Bestimmung dienenden Punkte auf der Projection beliebig ausgewählt werden, aber es ist an sich klar, dass zur sicheren Bestimmung von λ und μ diese drei Punkte nicht nahe an einander liegen dürfen, und man kann dieses Erforderniss mit einer Vereinfachung der Gleichungen verbinden. Zwei dieser Punkte sollen die Durchschnittspunkte der Achse der ξ mit der Projection, und der dritte der eine Durchschnittspunkt der Achse der η mit derselben sein. Hierdurch werden

$$\eta = 0, \ \eta_, = 0, \ \xi_{,,} = 0$$

und es entsprechen diesen die Werthe

$$\varrho = \xi, \ \varrho_, = \xi_, , \ \varrho_{,,} = \eta_{,,}$$

mit welchen bez. die Werthe von f, $f_,$, $f_{,,}$ zu berechnen sind. Die beiden oben erhaltenen Gleichungen gehen dadurch über in

$$(\xi^2 f^2 - \xi_,^2 f_,^2) - 2 (\xi f - \xi_, f_,) \mu = 0$$
$$(\xi_,^2 f_,^2 - \eta_{,,}^2 f_{,,}^2) - 2 \xi_, f_, \mu + 2 \eta_{,,} f_{,,} \lambda = 0$$

die nach der Elimination die folgenden einfachen Ausdrücke geben

$$\mu = \tfrac{1}{2} (\xi f + \xi_, f_,)$$
$$\lambda = \frac{\xi f \cdot \xi_, f_, + \eta_{,,}^2 f_{,,}^2}{2 \eta_{,,} f_{,,}}$$

Sind hieraus μ und λ berechnet, so bekommt man durch

$$p \sin \alpha = \lambda$$
$$p \cos \alpha = \mu$$

p und α. Endlich giebt irgend eine der drei ursprünglichen Gleichungen den Werth von R, womit die Aufgabe gelöst ist.

Will man einen vierten, zwar überzähligen Punkt mit zur Lösung dieser Aufgabe zuziehen, so eignet sich dazu der zweite Durchschnittspunkt der Achse der η mit der krummen Linie auf der Projection am Besten. Setzen wir für diesen Punkt $\eta = \eta_{\prime\prime\prime}$, so wird, da für denselben wieder $\xi = 0$ ist, $\varrho = \eta_{\prime\prime\prime}$, mit welchem Werthe $f_{\prime\prime\prime}$ zu berechnen ist.

Man bekommt hiemit leicht aus dem Vorhergehenden

$$\mu = \tfrac{1}{2}(\xi f + \xi_{\prime} f_{\prime})$$
$$\lambda = \tfrac{1}{2}(\eta_{\prime\prime} f_{\prime\prime} + \eta_{\prime\prime\prime} f_{\prime\prime\prime})$$

nebst der Bedingungsgleichung

$$\xi f \cdot \xi_{\prime} f_{\prime} = \eta_{\prime\prime} f_{\prime\prime} \cdot \eta_{\prime\prime\prime} f_{\prime\prime\prime}$$

die zur Prüfung der Abmessungen dienen kann.

12.

Will man ausser p, welche Linie in Verbindung mit dem zugleich erhaltenen Werthe des Winkels α die Lage des Mittelpunkts des Kreises auf dem Urbilde bestimmt, auch die Projection dieses Mittelpunkts kennen lernen, so hat diese offenbar

$$p f_0$$

zum Ausdruck, wenn

$$f_0 = 1 + a p^2 f_0^2 + b p^4 f_0^4 + c p^6 f_0^6 + \text{etc.}$$

gesetzt wird, aus welcher Gleichung wieder entweder indirect, oder durch Umkehrung der Reihe f_0 direct erhalten wird. Zieht man auf der Projection eine grade Linie, die mit der Achse der ξ den Winkel α macht, und durch den Anfangspunkt der Coordinaten geht, so liegt auf dieser die gesuchte Projection des Mittelpunkts in der Entfernung $= p f_0$ vom genannten Anfangspunkt. Hiermit ist also die gesuchte Projection des Mittelpunkts vollständig gegeben.

13.

Betrachten wir fortwährend die Projection irgend eines auf dem Urbilde gezogenen Kreises als gegeben, so kann man dessen Halbmesser R auch auf andere Weise bestimmen. Als Mittel zu dieser Bestimmung soll die Messung der längsten graden Linie

dienen, die man von irgend einem Punkt der Projection des Kreises bis an den gegenüber liegenden Punkt desselben ziehen kann. Da diese Linie durch Tangirung bestimmt wird, so kann sie in der Anwendung mit grösstmöglicher Sicherheit gemessen werden, zumal wenn, wie hier immer vorausgesetzt wird, die Abweichungen der Projection vom Urbilde klein sind. Da man hiebei von jedem beliebigen Punkt des Umkreises der Projection ausgehen kann, so lässt sich diese Messung unter möglichst verschiedenen Umständen vervielfachen, und wird somit zur möglichst sicheren Bestimmung von R dienen können.

14.

Den vorstehenden Bestimmungen zufolge ist die zu messende Linie an dem Einen ihrer Endpunkte eine Normale zur krummen Linie der Projection, suchen wir daher zuerst die Gleichung der Normale an unserer krummen Linie überhaupt. Nehmen wir die Gleichung (7) dieser Linie vor, nemlich

$$\varrho^2 f^2 - 2\xi' p f + p^2 = R^2$$

und differentiiren sie, so ergiebt sich

$$0 = (\xi'(f+K) - p)\, d\xi' + \eta'(f+K)\, d\eta'$$

wo zur Abkürzung

$$K = \left(\varrho - \frac{\xi' p}{\varrho f}\right)\frac{df}{d\varrho}$$

gesetzt worden ist. Bezeichnet man aber die laufenden Coordinaten der Normale mit ξ'_0 und η'_0, so ist bekanntlich die allgemeine Gleichung derselben

$$0 = (\xi'_0 - \xi')\, d\xi' + (\eta'_0 - \eta')\, d\eta'$$

und folglich wird für die hier in Betracht stehende krumme Linie die Gleichung der Normale

$$(\xi'_0 - \xi')\,\eta'(f+K) = (\eta'_0 - \eta')\,(\xi'(f+K) - p) \,.\;.\quad (10)$$

die auf verschiedene Formen gebracht werden kann. Löst man sie in Bezug auf η'_0 auf, so findet man

$$\eta'_0 = \xi'_0\,\frac{\eta'(f+K)}{P} - \frac{\eta' p}{P}$$

wo zur Abkürzung

$$P = \xi'(f+K) - p$$

gesetzt worden ist. Es geht hieraus unter Anderm hervor, dass die trigonometrische Tangente des Winkels, den die Normale mit der Achse der ξ' macht,

$$\frac{\eta'(f+K)}{P}$$

zum Ausdruck hat, dass für $\eta'=0$ auch $\eta'_0=0$ wird, und folglich in diesem Falle die Normale mit der Achse der ξ' zusammenfällt; ferner dass für $P=0$ die Normale der Achse der η' parallel, folglich die Tangente der Axe der ξ' parallel, und

$$\xi'=\frac{p}{f+K}$$

wird.

15.

Da die Normale in jedem Falle unsere krumme Linie in einem zweiten Punkt schneidet, so können wir ξ'_0 und η'_0 für die Coordinaten dieses Punkts annehmen, und dem zufolge ξ'_0 und η'_0 als die Coordinaten des Anfangs-, so wie ξ' und η' als die Coordinaten des Endpunkts der graden Linie betrachten, deren Messung im vorvor. Art. verlangt wurde.

Setzt man

$$\begin{aligned} \xi''_0 &= \xi'_0 f_0 - p, \quad \eta''_0 = \eta'_0 f_0 \\ \xi'' &= \xi' f - p, \quad \eta'' = \eta' f \end{aligned}$$

so giebt die Gleichung (8) unserer krummen Linie sogleich

$$(11) \quad \ldots\ldots \quad \xi''^2_0+\eta''^2_0=R^2, \quad \xi''^2+\eta''^2=R^2$$

und setzt man ferner

$$(12) \quad \ldots\ldots \quad \left\{ \begin{aligned} K' &= K+f-f_0 \\ Q_0 &= \xi''_0(f+K)+p\,K' \\ &= f_0(\xi'_0(f+K)-p) \\ Q &= \xi''(f+K)+p\,K \\ &= f(\xi'(f+K)-p) \end{aligned} \right.$$

so kann man leicht die Gleichung (10) der Normale auf die folgende Form bringen,

$$Q\,\eta''_0=Q_0\,\eta''$$

woraus η''_0 durch die Gleichungen (11), welche

$$\xi''^2_0-\xi''^2+\eta''^2_0-\eta''^2=0$$

geben, eliminirt werden kann. Die Elimination ergiebt die Formel

$$(13) \quad \ldots\ldots \quad (\xi''^2_0-\xi''^2)\,Q^2+\eta''^2(Q^2_0-Q^2)=0$$

die auch verschiedene andere Formen annehmen kann.

16.

Es ist nützlich die Relationen, die im Umkreis unserer krummen Linie zwischen ξ''_0 und ξ'' stattfinden, kennen zu lernen, und hiezu ist die Gleichung (13) besonders geeignet. Die Substitution der ersten unter (12) gegebenen Ausdrücke von Q_0 und Q giebt strenge

$$(\xi''^2_0 - \xi''^2)\{R^2(f+K)^2 + 2\,\xi''p\,K(f+K) + p^2K^2\}$$
$$= 2\,\eta''^2 p\{(\xi''K - \xi''_0 K')(f+K) + \tfrac{1}{2}p\,(K^2 - K'^2)\}$$

Zufolge der Annahme der geringen Abweichung der Projection von der Proportionalität mit dem Urbilde sind beides K und K' sehr kleine Grössen, deren Quadrate man übergehen kann, und die vorstehende Gleichung giebt daher

$$\xi''^2_0 = \xi''^2 + 2\,\eta''^2 p\,\frac{\xi''K - \xi''_0 K'}{R^2(f+K)}$$

welche Gleichung um so genauer wird, wenn auch p eine kleine Grösse ist, wie bei der Aufnahme der Sonne mit dem Venusbilde in den Durchgängen der letzteren, in Bezug auf das Sonnenbild immer der Fall sein muss. Für die beiden Punkte der Projection, in welchen $\eta'' = 0$ ist, geben die vorstehenden Gleichungen strenge $\xi''^2_0 = \xi''^2$, woraus sich

$$\xi''_0 = -\xi''$$

ergiebt, da die Gleichung $\xi''_0 = +\xi''$ den Anfangspunkt der Normale mit deren Endpunkt identificiren würde, und daher nicht annehmbar ist. In Folge dieser Bemerkung giebt die Wurzelausziehung aus der oben erhaltenen Gleichung allgemein

$$\xi''_0 = -\xi'' - p\,\frac{K+K'}{(f+K)R^2}\,\eta''^2 \;\ldots\ldots \quad (14)$$

welcher Ausdruck bis auf Grössen von der Ordnung p^2K^2 und $p^2K'^2$ richtig ist. Es folgt hieraus, dass im Allgemeinen ξ''_0 und ξ'' entgegengesetzte Zeichen haben, und absolut betrachtet nur um eine Grösse von der Ordnung $p\,K$ und $p\,K'$ von einander verschieden sind. Während p immer positiv angenommen werden kann, wollen wir zur Abkürzung annehmen, dass auch K und K' positiv seien, da im entgegengesetzten Falle die Folgerungen sich leicht aus dieser Annahme ergeben. Unter dieser Voraussetzung wird nun in dem ganzen Bereiche unserer krummen Linie, in welchem ξ'' positiv ist, ξ''_0 absolut genommen ein

wenig grösser sein als ξ'', und diese Eigenschaft auch in den beiden Punkten beibehalten, in welchen $\xi'' = 0$ ist. Für diese Punkte giebt der Ausdruck (14)

$$\xi''_0 = -p\frac{K+K'}{(f+K)}$$

also immer noch negativ.

Gehen wir jetzt zu dem Theil unserer krummen Linie über, in welchem ξ'' negativ ist, so zeigt die (14), dass wieder im Allgemeinen ξ''_0 und ξ'' entgegengesetzte Zeichen haben, dass aber jetzt absolut betrachtet $\xi''_0 < \xi''$ ist.

Wir müssen hier aber einen kleinen Theil unserer krummen Linie betrachten, welcher eine Ausnahme von dem eben erhaltenen Resultat bildet, und zwar denjenigen, in welchem zwar ξ'' auch negativ, aber absolut betrachtet

$$\xi'' < p\frac{K+K'}{(f+K)R^2}\eta''^2$$

ist. Hier bekommen ξ''_0 und ξ'' das gleiche, negative, Zeichen, sind aber beide sehr kleine Grössen von der Ordnung pK und pK'. In diesem Theil unserer krummen Linie liegt der schon im vorvor. Art. betrachtete Punkt, in welchem die Normale zur Achse der η' parallel wird, und welchem die Werthe

$$\xi''_0 = \xi'' = -\frac{pK}{f+K}$$

entsprechen, welche mit dem dort erhaltenen Werthe von ξ'' übereinstimmen.

17.

Gehen wir nach diesen Vorbereitungen zur Lösung der Aufgabe,

»durch die Messung einer der im Art. 15 erklärten graden »Linien auf der Projection, den Halbmesser R des dieser »Projection auf dem Urbilde zukommenden Kreises zu »finden,«

über. Sei die Länge der gemessenen Linie mit δ bezeichnet, dann wird

$$\delta^2 = (\xi_0 - \xi)^2 + (\eta'_0 - \eta')^2$$

welcher Ausdruck durch Elimination von $\eta'_0 - \eta'$ vermittelst der Gleichung (10) der Normale in

$$\delta^2 = \frac{(\xi' - \xi'_0)^2}{(\xi'(f+K) - p)^2} \{\eta'^2 (f+K)^2 + (\xi'(f+K) - p)^2\}$$

übergeht. Zur weiteren Elimination ist es dienlich die rechte Seite dieser Gleichung zur Function von ξ'' und ξ''_0 zu machen, was leicht durch die Gleichungen (12) bewirkt werden kann, da diese

$$f_0 Q - f Q_0 = f_0 f (f+K)(\xi' - \xi'_0)$$

geben. Man bekommt jetzt auf sehr einfache Weise

$$\delta^2 = \frac{(f_0 Q - f Q_0)^2}{f_0^2 f^2 (f+K)^2 Q^2} [\eta''^2 (f+K)^2 + Q^2]$$

oder wenn man η'' durch die Gleichung der krummen Linie eliminirt,

$$\delta^2 = \frac{(f_0 Q - f Q_0)^2}{f_0^2 f^2 (f+K)^2 Q^2} \{R^2 (f+K)^2 + p K (Q + \xi''(f+K))\}$$

ein der ferneren Behandlung leicht zugänglicher Ausdruck.

18.

Wenden wir uns zur Gleichung (13), und eliminiren auch darin η'' durch $R^2 = \xi''^2 + \eta''^2$, so ergiebt sich die Gleichung

$$R^2 (Q_0^2 - Q^2) = \xi''^2 Q_0^2 - \xi_0''^2 Q^2$$

welcher man, nachdem

$$M = \frac{(\xi'' Q_0 + \xi''_0 Q)(\xi'' K - \xi''_0 K)}{(Q_0 - Q) Q K} \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

gesetzt worden ist, die Form

$$Q_0 = -Q + \frac{pK}{R^2} M Q$$

geben kann. Multiplicirt man aber diese Gleichung mit f, und zieht vom Product auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die Function $f_0 Q$ ab, so bekommt man

$$\frac{f Q_0 - f_0 Q}{Q} = -(f_0 + f) + \frac{pK}{R^2} f M$$

wodurch der zu Ende des vor. Art. erhaltene Ausdruck für δ^2 übergeht in

$$\frac{f_0^2 f^2}{(f_0 + f)^2} \delta^2 R^4 = \left(R^2 - p K \frac{f M}{f_0 + f}\right)^2 (R^2 + p K N) \quad . \; . \quad (16)$$

wenn ausserdem

(17) . . . . $N = \frac{Q + \xi''(f+K)}{(f+K)^2}$.

gesetzt wird. Die Entwickelung der Gleichung (16) giebt nun

$$0 = R^6 - R^4 \left\{ \frac{f_o^2 f^2}{(f_o+f)^2} \delta^2 + p\,K \left[2\frac{fM}{f_o+f} - N \right] \right\}$$
$$+ R^2 p^2 K^2 \left\{ \frac{f^2 M^2}{(f_o+f)^2} - 2\frac{fMN}{f_o+f} \right\} + p^3 K^3 \frac{f^2 M^2 N}{(f_o+f)^2}$$

welche Formel in Bezug auf R^2 vom dritten Grade ist, und die strenge Auflösung unserer Aufgabe enthält.

19.

Da, wie oben bemerkt, $p\,K$ immer eine sehr kleine Grösse ist, so braucht die strenge Auflösung nie zur Anwendung zu kommen, sondern es reicht immer eine Abkürzung derselben aus. Man darf nicht nur den Cubus sondern auch das Quadrat von $p\,K$ übergehen, wodurch sich die Auflösung sehr einfach gestaltet. Mit blosser Berücksichtigung der ersten Potenz von $p\,K$ giebt die strenge Gleichung, die im vor. Art. erhalten wurde,

$$R^2 = \frac{f_o^2 f^2}{(f_o+f)^2} \delta^2 + p\,K \left\{ 2\frac{fM}{f_o+f} - N \right\}$$

woraus ohne Beeinträchtigung des Grades der Genauigkeit

(18) . . . . $R = \frac{f_o f}{f_o+f} \delta + p\,K \frac{M}{f_o \delta} - p\,K \frac{f_o+f}{2 f_o f \delta} N$

hervorgeht. Da hier nur die erste Potenz von $p\,K$ berücksichtigt worden ist, so darf man in den Ausdrücken (15) und (17) für M und N die Glieder von der Ordnung $p\,K$ ganz übergehen, und da hierauf

$$Q_0 = \xi''_0 (f+K), \quad Q = \xi''(f+K)$$

werden, so erhält man

$$M = \frac{2\xi''_0 (\xi'' K' - \xi''_0 K)}{(\xi''_0 - \xi'')(f+K) K}$$
$$N = \frac{2\xi''}{f+K}$$

Eine weitere Reduction ist noch aus dem Grunde zulässig, dass im Art. 16 bis auf Grössen von der Ordnung $p\,K$ und $p\,K'$ im Allgemeinen die Gleichung

$$\xi''_0 = -\xi''$$

gefunden wurde. Durch die Benutzung dieser Gleichung werden

$$M = -\xi''_0 \frac{K'+K}{(f+K)K}$$

$$N = -\frac{2\xi''_0}{f+K}$$

und die Substitution dieser in (18) giebt nach einer leichten Reduction

$$R = \frac{f_0 f}{f_0+f}\delta + \frac{\xi''_0 p}{\delta} \cdot \frac{f_0 - f}{f_0 f} \quad \dots\dots\dots \quad (19)$$

wo K und K' ganz verschwunden sind, und daher in den Anwendungen gar nicht berechnet zu werden brauchen.

Wir haben hier die genäherte Gleichung $\xi''_0 = -\xi''$ angewandt, während im Art. 16 gezeigt worden ist, dass in zwei kleinen Bruchstücken unserer krummen Linie die Gleichung $\xi''_0 = +\xi''$ Grössen von der Ordnung $p\,K$, und in zwei Punkten strenge, statt findet. Da aber in diesen Fällen zugleich ξ''_0 und ξ'' Grössen von der Ordnung $p\,K$ sind, so wird das letzte Glied der (19) von einer höheren Ordnung, als in dem übrigen Theil der krummen Linie, und jedenfalls unmerklich. Der eben betrachtete Fall bildet also in Bezug auf die Gleichung (19) keinen Ausnahmefall, und braucht nicht besonders berücksichtigt zu werden.

20.

In den meisten Fällen, und vielleicht immer, wird überhaupt das letzte Glied der Gleichung (19) unmerklich sein, und daher

$$R = \frac{f_0 f}{f_0+f}\delta \quad \dots\dots\dots\dots \quad (20)$$

gesetzt werden können; es wird daher der Werth von p und der des Winkels α, welcher die Richtung von p bestimmt, gar nicht verlangt, sondern es werden nur die Werthe von f_0 und f zu ermitteln sein. Die dazu nöthigen Data erhält man am Einfachsten durch Abmessung der Entfernungen des Anfangs- und des Endpunkts von δ vom Anfangspunkt der Coordinaten. Seien diese Entfernungen wie immer ϱ_0 und ϱ, dann ergiebt sich dem Vorhergehenden zufolge sogleich

$$f_0 = 1 + a\varrho_0^2 + b\varrho_0^4 + c\varrho_0^6 + \dots$$
$$f = 1 + a\varrho^2 + b\varrho^4 + c\varrho^6 + \dots$$

und da die Coefficienten a, b, c, etc. immer kleine Grössen sind,

so brauchen die Abmessungen von ϱ_0 und ϱ nicht mit der grössten Genauigkeit ausgeführt zu werden.

Sollte man in einem seltenen Falle vermeinen, von der Formel (19) Gebrauch machen zu müssen, so verursacht es keine Schwierigkeit, die dazu erforderlichen Werthe von ξ''_0 und p, durch Hülfe der dafür im Vorhergehenden entwickelten Relationen, mit ausreichender Genauigkeit zu erhalten; ich meine aber dass dieser Fall nie vorkommen wird.

21.

Es sollen noch zwei specielle Fälle betrachtet werden, in denen die strenge Auflösung sehr einfache Formen annimmt.

Der erste Fall ist der, in welchem die Entfernung der beiden Durchschnittspunkte der Achse der ξ' mit der krummen Linie auf der Projection von einander gemessen worden ist. Dieser Fall giebt das Maximum oder das Minimum der verschiedenen δ, je nachdem f_0 und f kleiner oder grösser als Eins sind. Nehmen wir den Durchschnittspunkt, welchem ξ'_0 zugehört, auf der positiven Seite der ξ' überhaupt, so wird augenscheinlich im gegenwärtigen Falle

$$\delta = \xi'_0 = \xi'$$

und da hier $\eta'_0 = 0$ und $\eta' = 0$ sind, so giebt die Gleichung (8) der krummen Linie

$$R = \xi'_0 f_0 - p$$
$$R = -\xi' f + p$$

Aus diesen drei Gleichungen folgt sogleich die strenge Auflösung

$$R = \frac{f_0 f}{f_0 + f}\delta + p\frac{f_0 - f}{f_0 + f}$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem genäherten Ausdruck (19) sehr nahe überein, da im gegenwärtigen Falle sehr nahe $\delta = 2\,\xi''_0$, und immer sehr nahe $f_0 + f = 2\,f_0\,f$ ist.

22.

Der zweite zu betrachtende Fall ist der, in welchem die gemessene Entfernung δ mit der Achse der η' parallel ist. Dieser Fall bedingt das Minimum oder das Maximum der verschiedenen δ, je nachdem f_0 und f kleiner oder grösser sind als die Einheit. Da jetzt

$$\eta' = -\eta'_0,\ \xi = \xi_0$$

sind, so werden

$$f = f_0,\ f^2\,\delta^2 = 4\,\eta'^2_0$$

und zufolge des Art. 16 erhalten wir

$$\xi''_0 = -\frac{p\,K}{f+K}\ .$$

Die Gleichungen (11) unserer krummen Linie geben daher jetzt

$$R^2 = \eta''^2_0 + \frac{p^2\,K^2}{(f+K)^2}$$

Setzt man hierin den oben erhaltenen Ausdruck für η''^2_0, so ergiebt sich strenge

$$R = \sqrt{\frac{f^2\,\delta^2}{4} + \frac{p^2\,K^2}{(f+K)^2}}$$

welcher Ausdruck sehr nahe mit dem genäherten Ausdruck (19) übereinstimmt. Denn da jetzt $f = f_0$ ist, so giebt die (19)

$$R = \tfrac{1}{2}\,f\,\delta$$

und dasselbe folgt aus dem vorstehenden strengen Ausdruck, wenn man darin, gleichwie in der Ableitung von (19) geschehen ist, das Quadrat von $p\,K$ übergeht.

23.

Wenden wir uns zur Bestimmung der Coefficienten a, b, c, etc. des Ausdrucks für r, zu welchem Ende man sich ein künstliches Urbild anfertigen lassen muss. Dieses Urbild kann aus einer dünnen, ebenen Glasplatte mit parallelen Oberflächen bestehen, auf welcher ein System von Linien eingeschnitten oder eingeätzt worden ist. Wenn man annehmen dürfte, dass die bei der Bearbeitung der Oberflächen der Linsen, aus denen das Ocular besteht, unvermeidlich übrig gebliebenen Fehler so klein sind, dass sie keine merklichen Abweichungen in der Strahlenbrechung, oder auf dem Lichtbilde verursachen könnten, so würde das Liniensystem auf der das Urbild darstellenden Glasplatte am einfachsten aus einer Anzahl concentrischer Kreise bestehen können, durch deren Mittelpunkt zwei sich rechtwinklig schneidende grade Linien zu ziehen wären, welche die Achsen der Coordinaten x und y darstellen würden.

Da man sich aber erst durch Versuche überzeugen kann,

ob die eben angeführte Eigenschaft vorhanden ist oder nicht, auch, wenn es nöthig werden sollte, in den Stand gesetzt werden muss, kleine bei der Bearbeitung übrig gebliebene Abweichungen der Berechnung einverleiben zu können, so wird es am vortheilhaftesten sein, das Urbild mit zwei Systemen paralleler, in gleichen Abständen von einander stehender, und sich rechtwinklig schneidender, grader Linien überziehen zu lassen, von welchen die beiden mittleren die Achsen der x und y darstellen. Der Abstand je zweier dieser Linien kann füglich $1\frac{1}{2}$ oder 2 Millimeter betragen, und die vollkommenste Gleichheit dieser Entfernungen ist nicht nöthig, nur ist es zur Vereinfachung der Benutzung wünschenswerth, dass die Entfernung der auf einanderfolgenden Linien so nahe wie möglich dieselbe sei.

Um sowohl bei der Wiederholung der Versuche zur Bestimmung der Coefficienten a, b, c, etc., wie bei der nachherigen Anwendung des helio-photographischen Apparats sich der Unveränderlichkeit der in Betracht kommenden Umstände, folglich auch der Unveränderlichkeit der a, b, c, etc. versichern zu können, ist es nothwendig, dass das beschriebene Urbild mit dem Ocular unveränderlich verbunden werde, und diese Unveränderlichkeit kann auf folgende Weise hervorgebracht werden.

Das äussere Rohr des Oculars, nemlich das Rohr, worin das zweite Rohr, welches die Glaslinsen unveränderlich mit einander verbindet, eingeschraubt wird, lasse man an seinem dem Objectiv zugewandten Ende so viel verlängern, als die Entfernung des Gegenstandes von der ersten Linse, bei der Vergrösserung, die das Ocular gewähren soll, beträgt, und am Ende dieses Rohrs lasse man das Urbild auf gewöhnliche Art einfassen. Hiebei ist vom Künstler dafür Sorge zu tragen, dass der Durchschnittspunkt der beiden mittleren Linien, welche die Coordinatenachsen darstellen, möglichst nahe in die Verlängerung der optischen Achse des Oculars zu liegen kommt. Die Herstellung dieser Bedingung ist mit keinen Schwierigkeiten verbunden, da der Künstler dazu dieselben Hülfsmittel anwenden kann, deren er sich bedient um seine Linsen zu centriren. Die auf dem Urbilde gezogenen Linien müssen bei der Fassung desselben dem Objectiv zugewandt werden, damit etwaige Unregelmässigkeiten in der Brechung der Lichtstrahlen beim Durchgange durch die Glasplatte des Urbildes, sich auf der Projection (dem Lichtbilde)

mit den Unregelmässigkeiten des Oculars vereinigen, und man die Summe aller vorhandenen Unregelmässigkeiten bekomme.

Das ganze Ocular mit dem daran unveränderlich befestigten Urbilde muss dergestalt am Rohr des Objectivs angebracht werden, dass es

1) eine kleine Längenverschiebung bekommt, um es so stellen zu können, dass das Urbild mit dem Focalbilde des Objectivs zusammenfällt,

2) kleine Seitenverschiebungen, um den Durchschnittspunkt der Coordinatenachsen in die optische Achse des Objectivs verlegen zu können,

3) eine kleine Kreisbewegung, um die eine Coordinatenachse senkrecht stellen zu können.

Die am anderen Ende des Oculars anzuschraubende Casette, welche zur Aufnahme der Platte bestimmt ist, auf der das Lichtbild hervorgebracht werden soll, muss für sich auch eine Längenverschiebung bekommen, um die Entfernung dieser Platte vom Ocular so herstellen zu können, dass das Lichtbild auf derselben möglichst deutlich erscheint. Es ist hiebei des Unterschiedes in der Brechung der chemischen und der leuchtenden Strahlen Rechnung zu tragen.

Das Urbild darf bei der Anwendung des Apparats auf einen Venusvorübergang schon deshalb nicht weggenommen werden, weil die Coordinatenachsen zu den nachher vorzunehmenden Abmessungen gebraucht werden müssen. Der Mitabdruck der übrigen Linien des Urbildes auf dem Lichtbilde ist ohne Nachtheil.

Das Rohr des Objectivs endlich muss mit einem Sucher versehen werden, dessen Absehenslinie parallel mit der optischen Achse des Objectivs gestellt werden kann. Durch diese Einrichtung kann man, in Verbindung mit dem von mir vor ungefähr zwei Jahren angegebenen und beschriebenen Stativ, bewirken, dass bei den photographischen Aufnahmen der Sonne mit der Venus, der Mittelpunkt der ersteren immer nahe in die optische Achse des Oculars zu liegen kommt.

24.

Da das im vor. Art. beschriebene Urbild immer kleiner ist als die Projection desselben (das Lichtbild), so muss man es sich soweit vergrössert denken, dass es dem letzteren an Grösse

gleich kommt. Sei die Vergrösserung des Urbildes mit n bezeichnet, so müssen dem zufolge in den Gleichungen des Art. 2 nx und ny statt x und y geschrieben werden. Da ferner nicht angenommen werden kann, dass der Durchschnittspunkt der Coordinatenachsen genau in der Verlängerung der optischen Achse des Oculars liegt, so müssen in den genannten Gleichungen nicht nur $nx+u$ und $ny+v$, sondern auch $\xi+u$ und $\eta+v$ gesetzt werden, und es bezeichnen daher $-u$ und $-v$ die Coordinaten der optischen Achse auf der Projection. Die Gleichungen (1), (2), (3) gehen nach diesen Abänderungen über in

$$nx+u=f(\xi+u),\quad ny+v=f(\eta+v)$$

$$\varrho^2=(\xi+u)^2+(\eta+v)^2$$

$$\begin{array}{llll}
f=1+a(\xi+u)^2 & +b(\xi+u)^4 & +c(\xi+u)^6 & +\text{etc.}\\
\quad +a(\eta+v)^2 & +2b(\xi+u)^2(\eta+v)^2 & +3c(\xi+u)^4(\eta+v)^2 & +\text{etc.}\\
 & +b(\eta+v)^4 & +3c(\xi+u)^2(\eta+v)^4 & +\text{etc.}\\
 & & +c(\eta+v)^6 & +\text{etc.}\\
 & & & +\text{etc.}
\end{array}$$

woraus man die Ausdrücke

$$\begin{array}{llll}
nx=\xi+a(\xi+u)^3 & & +b(\xi+u)^5 & +\text{etc.}\\
\quad +a(\xi+u)(\eta+v)^2 & & +2b(\xi+u)^3(\eta+v)^2 & +\text{etc.}\\
 & & +b(\xi+u)(\eta+v)^4 & +\text{etc.}\\
 & & & +\text{etc.}\\
ny=\eta+a(\xi+u)^2(\eta+v) & & +b(\xi+u)^4(\eta+v) & +\text{etc.}\\
\quad +a(\eta+v)^3 & & +2b(\xi+u)^2(\eta+v)^3 & +\text{etc.}\\
 & & +b(\eta+v)^5 & +\text{etc.}\\
 & & & +\text{etc.}
\end{array}$$

erhält, die so weit fortgesetzt werden können, wie man will. Man erkennt daraus leicht, dass n die Vergrösserung des Oculars bedeutet, die in der optischen Achse desselben stattfindet.

25.

Durch Auflösung der in den vorstehenden Ausdrücken von nx und ny vorkommenden Potenzen bringt man diese Ausdrücke auf die allgemeinste Form, die sie annehmen können, es mögen die Abweichungen der Projection vom Urbilde beschaffen sein wie sie wollen, vorausgesetzt dass sie klein seien.

Da die Vergrösserung n mit zu den unbekannten Grössen gehört, so setzen wir

$$n=n_0+\delta n$$

wo n_0 ein vorläufig anzunehmender, nahe richtiger Werth von n ist, welcher immer leicht gefunden werden kann, und δn die durch die Rechnung zu ermittelnde Berichtigung von n_0 bedeutet. Nach diesen Vorbereitungen kann man die Ausdrücke der Coordinaten auf dem Urbilde leicht wie folgt darstellen,

$$n_0 x - \xi = - x \delta n + U + V \xi + A \xi^2 + B \xi^3 + C \xi^4 + D \xi^5 + E \xi^6 + F \xi^7 + \text{etc.}$$

$$n_0 y - \eta = - y \delta n + U' + V' \eta + A' \eta^2 + B' \eta^3 + C' \eta^4 + D' \eta^5 + E' \eta^6 + F' \eta^7 + \text{etc.}$$

in welchen die Coefficienten zu den ursprünglichen a, b, c, etc. folgende Beziehungen haben.

Setzt man zur Abkürzung

$$\omega = a(\eta + v)^2 + b(\eta + v)^4 + c(\eta + v)^6 + \ldots$$
$$\alpha = a + 2b(\eta + v)^2 + 3c(\eta + v)^4 + \ldots$$
$$\beta = b + 3c(\eta + v)^2 + \ldots$$
$$\gamma = c + \ldots$$
etc.

so werden

$$U = \omega u + \alpha u^3 + \beta u^5 + \gamma u^7 + \ldots$$
$$V = \omega + 3\alpha u^2 + 5\beta u^4 + 7\gamma u^6 + \ldots$$
$$A = 3\alpha u + 10\beta u^3 + 21\gamma u^5 + \ldots$$
$$B = \alpha + 10\beta u^2 + 35\gamma u^4 + \ldots$$
$$C = 5\beta u + 35\gamma u^3 + \ldots$$
$$D = \beta + 21\gamma u^2 + \ldots$$
$$E = 7\gamma u + \ldots$$
$$F = \gamma + \ldots$$
etc.

und setzt man

$$\omega' = a(\xi + u)^2 + b(\xi + u)^4 + c(\xi + u)^6 + \ldots$$
$$\alpha' = a + 2b(\xi + u)^2 + 3c(\xi + u)^4 + \ldots$$
$$\beta' = b + 3c(\xi + u)^2 + \ldots$$
$$\gamma' = c + \ldots$$

so ergeben sich

$$U' = \omega' v + \alpha' v^3 + \beta' v^5 + \gamma' v^7 + \ldots$$
$$V' = \omega' + 3\alpha' v^2 + 5\beta' v^4 + 7\gamma' v^6 + \ldots$$
$$A' = 3\alpha' v + 10\beta' v^3 + 21\gamma' v^5 + \ldots$$
$$B' = \alpha' + 10\beta' v^2 + 35\gamma' v^4 + \ldots$$

$$C' = 5\beta' v + 35\gamma' v^3 + \ldots$$
$$D' = \beta' + 21\gamma' v^2 + \ldots$$
$$E' = 7\gamma' v + \ldots$$
$$F' = \gamma' + \ldots$$
etc.

Die Werthe der Coordinaten der optischen Achse lassen sich durch die folgenden Betrachtungen aus den Coefficienten U, V, A, etc., U', V', A', etc. finden. Schreibt man zur Abkürzung X statt $(n_0 + \delta n)\, x - \xi$, so lässt sich zu jedem Werthe von ξ, welcher der Gleichung

$$X = U + V\xi + A\xi^2 + B\xi^3 + \ldots$$

gnügt, ein zweiter Werth dieser Coordinate finden, welcher, wenn er mit ξ' bezeichnet wird, der Gleichung

$$-X = U + V\xi' + A\xi'^2 + B\xi'^3 + \ldots$$

gnügt, und es ist an sich klar, dass das arithmetische Mittel aus ξ und ξ' der gesuchten Coordinate der optischen Achse gleich sein muss. Diese Bedingung giebt

$$\xi + \xi' = -2u$$

und die vorstehenden Gleichungen geben

$$\begin{aligned} 0 = 2U &+ V\xi + A\xi^2 + B\xi^3 + \ldots \\ &+ V\xi' + A\xi'^2 + B\xi'^3 + \ldots \end{aligned}$$

Eliminirt man hieraus ξ' durch die vorstehende Gleichung, und setzt die Entwickelungen bis zum Coefficienten F fort, so ergiebt sich die folgende Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = {} & U + A\xi^2 + C\xi^4 + E\xi^6 + \ldots \\ & - u\{V - 2A\xi + 3B\xi^2 - 4C\xi^3 + 5D\xi^4 - 6E\xi^5 \\ & \qquad + 7F\xi^6 \mp \ldots\} \\ & + 2u^2\{A - 3B\xi + 6C\xi^2 - 10D\xi^3 + 15E\xi^4 - 21F\xi^5 \pm \ldots\} \\ & - 4u^3\{B - 4C\xi + 10D\xi^2 - 20E\xi^3 + 35F\xi^4 \mp \ldots\} \\ & + 8u^4\{C - 5D\xi + 15E\xi^2 - 35F\xi^3 \pm \ldots\} \\ & - 16u^5\{D - 6E\xi + 21F\xi^2 \mp \ldots\} \\ & + 32u^6\{E - 7F\xi \pm \ldots\} \\ & - 64u^7\{F \mp \ldots\} \\ & \pm \text{etc.} \end{aligned}$$

die man leicht fortsetzen kann, so weit man will, da die Coefficienten innerhalb der Klammern die Binominalcoefficienten sind.

Da diese Gleichung für jeden Werth von ξ gilt, so muss die

Summe der Coefficienten einer jeden Potenz von ξ für sich gleich Null sein, und wir erhalten daher, mit Weglassung der Gleichungen, die mit den folgenden identisch gemacht werden können, zur Bestimmung von u,

$$0 = U - Vu + 2Au^2 - 4Bu^3 + 8Cu^4 - 16Du^5 + 32Eu^6 - 64Fu^7 \pm \ldots$$
$$0 = A - 3Bu + 8Cu^2 - 20Du^3 + 48Eu^4 - 112Fu^5 \pm \ldots$$
$$0 = C - 5Du + 20Eu^2 - 70Fu^3 \pm \ldots$$
$$0 = E - 7Fu \pm \ldots$$
etc.

Auf dieselbe Weise ergeben sich zur Bestimmung von v

$$0 = U' - V'v + 2A'v^2 - 4B'v^3 + 8C'v^4 - 16D'v^5 + 32E'v^6 - 64F'v^7 \pm \ldots$$
$$0 = A' - 3B'v + 8C'v^2 - 20D'v^3 + 48E'v^4 - 112F'v^5 \pm \ldots$$
$$0 = C' - 5D'v + 20E'v^2 - 70F'v^3 \pm \ldots$$
$$0 = E' - 7F'v \pm \ldots$$
etc.

Wenn das Ocular gut gearbeitet ist, die Abmessungen richtig ausgeführt sind, und das Lichtbild keine Verzerrungen besitzt, so müssen diese verschiedenen Gleichungen dieselben Werthe von u und v geben. Das Gegentheil hievon giebt zu erkennen, dass die eine oder andere dieser Bedingungen nicht erfüllt ist. Die Auflösung dieser Gleichungen lässt sich, wenigstens wenn u und v klein sind, wie hier vorausgesetzt worden ist, durch Näherungen leicht bewirken.

Für die Ausdrücke der Coefficienten a, b, c, etc. bekommt man unter andern die folgenden Gleichungen. Rechnet man zuerst α, β, γ, etc. aus

$$\alpha = B - 10Du^2 + 175Fu^4 \mp \ldots$$
$$\beta = D - 21Fu^2 \pm \ldots$$
$$\gamma = F \mp \ldots$$
etc.

so ergeben sich

$$a = \alpha - 2\beta(\eta + v)^2 + 3\gamma(\eta + v)^4 \mp \ldots$$
$$b = \beta - 3\gamma(\eta + v)^2 \pm \ldots$$
$$c = \gamma \mp \ldots$$
etc.

Oder rechnet man α', β', γ', etc. aus

$$\alpha' = B' - 10\,D'\,v^2 + 175\,F'\,v^4 \mp \ldots$$
$$\beta' = D' - 21\,F'\,v^2 \pm \ldots$$
$$\gamma' = F' \mp \ldots$$
etc.

so ergeben sich

$$a = \alpha' - 2\,\beta'\,(\xi + u)^2 + 3\,\gamma'\,(\xi + u)^4 \mp \ldots$$
$$b = \beta' - 3\,\gamma'\,(\xi + u)^2 \pm \ldots$$
$$c = \gamma' \mp \ldots$$
etc.

die mit den wie oben gefundenen Werthen derselben Coefficienten übereinstimmen müssen. Man kann die auf diese Weise erhaltenen Werthe der a, b, c, etc. nebst u und v benutzen, um durch die vorhergehenden Gleichungen dieses Art. die Werthe der U, V, A, C, etc. und U', V', A', C', etc. zu berechnen, die wieder mit den ursprünglich erhaltenen übereinstimmen müssen, wenn die oben genannten Bedingungen in Bezug auf das Ocular und das Lichtbild erfüllt sind.

Es liessen sich noch eine grössere Anzahl von Gleichungen zu diesen Bestimmungen ableiten, die ich hier aber der Kürze wegen übergehen will.

26.

Wenn die Coordinaten u und v so klein sind, dass man mit den ersten Potenzen derselben ausreicht, so kürzen sich die vorstehenden Ausdrücke ab, und gehen in die folgenden über:

$$U = u\,\{a\,\eta^2 + b\,\eta^4 + c\,\eta^6 + \ldots\}$$
$$V = a\,\eta^2 + b\,\eta^4 + c\,\eta^6 + \ldots$$
$$+ 2\,v\,\{a\,\eta + 2\,b\,\eta^3 + 3\,c\,\eta^5 + \ldots\}$$
$$A = 3\,u\,\{a + 2\,b\,\eta^2 + 30\,c\,\eta^4 + \ldots\}$$
$$B = a + 2\,b\,\eta^2 + 3\,c\,\eta^4 + \ldots$$
$$+ 4\,v\,\{b\,\eta + 3\,c\,\eta^3 + \ldots\}$$
$$C = 5\,u\,\{b + 3\,c\,\eta^2 + \ldots\}$$
$$D = b + 3\,c\,\eta^2 + \ldots$$
$$+ 6\,v\,\{c\,\eta + \ldots\}$$
$$E = 7\,u\,\{c + \ldots\}$$
$$F = c + \ldots$$
etc.

$$U' = v\,\{a\,\xi^2 + b\,\xi^4 + c\,\xi^6 + \ldots\}$$

$$
\begin{aligned}
V' &= a\,\xi^2 + b\,\xi^4 + c\,\xi^6 + \ldots \\
&\quad + 2\,u\{a\,\xi + 2\,b\,\xi^3 + 3\,c\,\xi^5 + \ldots\} \\
A' &= 3\,v\{a + 2\,b\,\xi^2 + 3\,c\,\xi^4 + \ldots\} \\
B' &= a + 2\,b\,\xi^2 + 3\,c\,\xi^4 + \ldots \\
&\quad + 4\,u\{b\,\xi + 3\,c\,\xi^3 + \ldots\} \\
C' &= 5\,v\{b + 3\,c\,\xi^2 + \ldots\} \\
D' &= b + 3\,c\,\xi^2 + \ldots \\
&\quad + 6\,u\{c\,\xi + \ldots\} \\
E' &= 7\,v\{c + \ldots\} \\
F' &= c + \ldots \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Wenn man fortfährt die Potenzen und Producte von u und v zu übergehen. so geben die vorstehenden Ausdrücke die Relationen

$$
\begin{aligned}
u\,V &= U, & v\,V' &= U' \\
3\,u\,B &= A, & 3\,v\,B' &= A' \\
5\,u\,D &= C, & 5\,v\,D' &= C' \\
7\,u\,F &= E, & 7\,v\,F' &= E' \\
&\text{etc.} & &\text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a &= B - 2\,\eta\,(\eta + 2\,v)\,D + 3\,\eta^3\,(\eta + 4\,v)\,F + \ldots \\
b &= D - 3\,\eta\,(\eta + 2\,v)\,F + \ldots \\
c &= F + \ldots \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
a &= B' - 2\,\xi\,(\xi + 2\,u)\,D' + 3\,\xi^3\,(\xi + 4\,u)\,F' + \ldots \\
b &= D' - 3\,\xi\,(\xi + 2\,u)\,F' + \ldots \\
c &= F' + \ldots \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

die auch aus den betreffenden Gleichungen des vor. Art. folgen.

27.

Um die Unbekannten δn, U, V, A, B, C, etc., U', V', A', B', C', etc. der beiden oben erhaltenen Ausdrücke für die Coordinaten bestimmen zu können, muss man sich zuerst eine durch das Ocular bewirkte Projection (ein Lichtbild) des Urbildes anfertigen, wobei man das Urbild entweder durch das Tageslicht oder durch ein zweckmässig angebrachtes künstliches Licht beleuchten kann. Hierauf müssen beide Coordinaten der Durchschnittspunkte der beiden Liniensysteme, sowohl auf dem Ur-

bilde wie auf der Projection, mit einem dazu geeigneten mikroskopischen Apparat, mit möglichster Schärfe gemessen werden. Diese Messungen geben eine Anzahl von Systemen linearischer Gleichungen, durch deren Auflösungen die Werthe der oben genannten Unbekannten erhalten werden.

Die Durchschnittspunkte des einen Systems von Linien mit jeder einzelnen Linie des andern Systems geben für sich, und unabhängig von den anderen, ein System von linearischen Gleichungen, und man bekommt daher für jede der beiden Coordinaten x und y so viele Ausdrücke, als Parallellinien zu denselben, die Achsen der Coordinaten eingeschlossen, auf der Projection gemessen worden sind. Es werden deren überhaupt nicht viele sein, und wenn eine sehr gute Bearbeitung der Linsen des Oculars, und ein getreues, nicht verzerrtes Lichtbild vorausgesetzt, und dem zufolge sehr regelmässige Abweichungen von der Proportionalität erwartet werden dürfen, so wird man sich begnügen können die Abmessungen, und folglich auch die Rechnungen, auf jede zweite oder gar dritte Parallele zu beschränken, wodurch die Arbeit wesentlich abgekürzt wird.

28.

Es könnte vielleicht Diesem oder Jenem vorkommen, als ob die Abmessung und Berechnung der Durchschnittspunkte der Projection (des Lichtbildes), die auf den Coordinatenachsen liegen, auf die ganze Ausdehnung der Projection angewandt werden könnte, aber diess ist keineswegs der Fall. Auf dem Urbilde, auf welchem grade und parallele Linien vorausgesetzt und auch hergestellt werden können, kann zwar, strenge genommen, die Abmessung der Durchschnittspunkte auf den beiden Coordinatenachsen genügen, und man braucht zur Sicherheit und Controle dieselbe nur auf einigen der Parallelen zu wiederholen, aber auf der Projection ist diess nicht der Fall.

Man hat im Art. 25 gesehen, dass die Unbekannten der Systeme für die Coordinaten ξ Functionen der η, und die der Systeme für die Coordinaten η Functionen der ξ sind, folglich die Unbekannten auf jeder Parallele ihre Werthe ändern. Es müssen daher, um etwaige merkliche Unregelmässigkeiten in der Bearbeitung des Oculars entdecken zu können, auf der Projection die Abmessungen und Berechnungen auf eine hinreichende Anzahl der Parallelen ausgedehnt werden.

Diess steht mit dem oben bewiesenen Satze, zufolge dessen, mit Ausnahme der die optische Achse des Oculars schneidenden Linien, alle graden Linien des Urbildes auf der Projection in krumme übergehen, in engster Beziehung. Wollte man daher die Abmessungen auf den Coordinatenachsen auf die ganze Projection ausdehnen, so hiesse diess alle Linien der Projection als jenen parallel, oder als grade betrachten, und man würde in Widerspruch mit der Theorie gerathen. Man würde, mit anderen Worten, Grössen derselben Ordnung übergehen, von welcher diejenigen sind die man bestimmen will.

29.

Zur Berechnung der im Art. 25 erhaltenen Gleichungen zwischen x und ξ, und y und η ist noch das Folgende zu bemerken. Es ist unmöglich aus diesen Gleichungen im Allgemeinen die Unbekannten δn und V, oder bez. δn und V' abgesondert von einander zu bestimmen, da die Coefficienten derselben einander sehr nahe proportional sind. Man erkennt diess am leichtesten durch die folgende Umformung, die ich nur an der Gleichung zwischen x und ξ ausführen will, da sie hierauf ohne Weiteres auf die zwischen y und η angewandt werden kann. Aus der Gleichung des Art. 25

$$(\alpha) \,..\, n_0 x - \xi = -x\,\delta n + U + V\xi + A\xi^2 + B\xi^3 + \text{etc.}$$

bekommt man leicht

$$x\,\delta n = \frac{U\frac{\delta n}{n_0}}{1+\frac{\delta n}{n_0}} + \frac{(1+V)\frac{\delta n}{n_0}}{1+\frac{\delta n}{n_0}}\xi + \frac{A\frac{\delta n}{n_0}}{1+\frac{\delta n}{n_0}}\xi^2 + \frac{B\frac{\delta n}{n_0}}{1+\frac{\delta n}{n_0}}\xi^3 + \text{etc.}$$

und hieraus, in Verbindung mit der vorstehenden, die Gleichung

$$(\beta) \;.\;.\;.\, n_0 x - \xi = U_0 + V_0\xi + A_0\xi^2 + B_0\xi^3 + \text{etc.}$$

in welcher die Coefficienten die folgenden Ausdrücke haben:

$$V_0 = \frac{V - \frac{\delta n}{n_0}}{1+\frac{\delta n}{n_0}}$$

$$U_0 = \frac{U}{1+\frac{\delta n}{n_0}}, \quad A_0 = \frac{A}{1+\frac{\delta n}{n_0}}, \quad B_0 = \frac{B}{1+\frac{\delta n}{n_0}}, \text{ etc.}$$

wofür man auch schreiben kann

$$\delta n = n_0 \frac{V - V_0}{1 + V_0}, \quad n = n_0 \frac{1 + V}{1 + V_0}$$

$$U = U_0 \frac{1 + V}{1 + V_0}, \quad A = A_0 \frac{1 + V}{1 + V_0}, \quad B = B_0 \frac{1 + V}{1 + V_0}, \text{ etc.}$$

Die Abmessungen auf jeder einzelnen Linie der Projection, verbunden mit denen auf dem Urbilde, geben für sich ein System von Gleichungen, aus welchem sich die Werthe aller Coefficienten U_0, V_0, A_0, B_0, etc. sicher bestimmen lassen. Man erkennt aber sofort, dass sich weder n noch die Coefficienten der Gleichung (α) hieraus bestimmen lassen, wenn man nicht anderweitige Kenntniss von V besitzt. Nun kann man freilich, strenge genommen, dieser Kenntniss entbehren; denn die Gleichung (β), in welcher n_0 unbestimmt bleibt, und auch in der That beliebig angenommen werden kann, löst unsere Aufgabe eben sowohl als die Gleichung (α), wenn nur in der Anwendung auf alle Linien derselbe Werth von n_0 angenommen wird. Die einzige Wirkung davon ist die, dass, jenachdem man n_0 so oder anders angenommen hat, das Urbild durch die Berechnung mehr oder weniger vergrössert wird, und die Berichtigungen der Abmessungen auf der Projection im Allgemeinen durch grössere Zahlen geführt werden, als unumgänglich nothwendig ist.

Man kann aber diese Unbequemlichkeit vermeiden, und unerachtet der im Vorhergehenden erklärten Umstände die Rechnung so einrichten, dass bis auf Unmerkliches die Berichtigungen der Abmessungen auf der Projection durch möglichst kleine Zahlen ausgedrückt werden. Da das Urbild immer so hergerichtet werden kann, dass die Coordinaten der optischen Achse des Oculars u und v sehr kleine Grössen sind, so geht aus den Gleichungen des Art. 25 hervor, dass auf den Coordinatenachsen V und V' kleine Grössen der dritten Ordnung sind. Uebergeht man diese, so ist Alles bestimmt, und n wird bis auf Unmerkliches die Vergrösserung des Oculars in der optischen Achse desselben.

Es entspringen hieraus folgende Regeln. Zur Berechnung der auf den Coordinatenachsen ausgeführten Abmessungen wende man die Gleichungen

$$n_0 x - \xi = U_0 + V_0 \xi + A_0 \xi^2 + B_0 \xi^3 + \text{etc.}$$

$$n_0 y - \eta = U'_0 + V'_0 \eta + A'_0 \eta^2 + B'_0 \eta^3 + \text{etc.}$$

an, in die man für n_0 einen beliebigen genäherten Werth von n, welcher immer leicht gefunden werden kann, substituiren muss. Die Berechnung der Coefficienten dieser beiden Gleichungen nehme man zuerst vor, und nachdem diese ausgeführt worden ist, bekommt man

$$\delta n = -\frac{V_0}{1+V_0} n_0 \text{ oder } n = \frac{n_0}{1+V_0}$$

und

$$\delta n = -\frac{V'_0}{1+V'_0} n_0 \text{ oder } n = \frac{n_0}{1+V'_0}$$

Man bekommt zwar hier zwei Werthe für n, aber es liegt in der Natur der Sache, dass diese bis auf Grössen von der Ordnung der unvermeidlichen Abmessungsfehler mit einander übereinstimmen müssen. Man kann jedenfalls in den vorstehenden Formeln, ohne die Genauigkeit zu verletzen, $\frac{1}{2}(V_0 + V'_0)$ statt V_0 und V'_0 substituiren. Da nun n bekannt ist, so kann man zur Berechnung der Abmessungen, die auf allen übrigen Linien der Projection ausgeführt worden sind, sich ohne Weiteres der Gleichungen

$$n x - \xi = U + V \xi + A \xi^2 + B \xi^3 + \text{etc.}$$
$$n y - \eta = U' + V' \eta + A' \eta^2 + B' \eta^3 + \text{etc.}$$

bedienen.

Aus den für die Coordinatenachsen geltenden, eben erhaltenen Gleichungen kann man, nachdem die Berechnung der Coefficienten derselben ausgeführt worden ist, durch Hülfe der Gleichungen

$$U = \frac{U_0}{1+V_0}, \quad A = \frac{A_0}{1+V_0}, \quad B = \frac{B_0}{1+V_0}, \quad \text{etc.}$$
$$U' = \frac{U'_0}{1+V'_0}, \quad A' = \frac{A'_0}{1+V'_0}, \quad B' = \frac{B'_0}{1+V'_0}, \quad \text{etc.}$$

die folgenden herstellen,

$$n x - \xi = U + A \xi^2 + B \xi^3 + \text{etc.}$$
$$n y - \eta = U' + A' \eta^2 + B' \eta^3 + \text{etc.}$$

diess wird jedoch oft unnöthig sein.

30.

Es ist nicht überflüssig über die Bedeutung und Anwendung der Grössen auf der linken Seite der im vor. Art. erhaltenen Gleichungen das Folgende anzuführen.

Setzen wir

$$X_0 = n_0 x - \xi, \quad Y_0 = n_0 y - \eta$$
$$X = n x - \xi, \quad Y = n y - \eta$$

so sind die Gleichungen die folgenden:

$$X_0 = U_0 + V_0 \xi + A_0 \xi^2 + B_0 \xi^3 + \ldots$$
$$Y_0 = U'_0 + V'_0 \eta + A'_0 \eta^2 + B'_0 \eta^3 + \ldots$$
$$X = U + V \xi + A \xi^2 + B \xi^3 + \ldots$$
$$Y = U' + V' \eta + A' \eta^2 + B' \eta^3 + \ldots$$

und diese geben, nachdem ihre Coefficienten berechnet worden sind, für jeden darin substituirten Werth von ξ oder η, den entsprechenden Werth von X_0 und X, oder Y_0 und Y. Nun folgt aus dem Vorhergehenden, dass, wenn wie immer ξ und η irgend welche Abmessungen auf der Projection (dem Lichtbilde) bedeuten, $\xi + X$ oder bez. $\eta + Y$ die berichtigten Abmessungen, oder die Abmessungen sind, die man erhalten haben würde, wenn die Projection dem Urbilde vollkommen proportional gewesen wäre. Die Grössen $\xi + X$ und $\eta + Y$ sind also die Werthe der Coordinaten, die in der Anwendung des Lichtbildes auf einen Venusvorübergang, oder überhaupt zu irgend einem Zweck gebraucht werden müssen.

Selbstverständlich bedürfen aber nun die Werthe von X_0 und Y_0, die man auf den Coordinatenachsen bekommt, einer Verbesserung, ehe sie die eben erklärte Bedeutung annehmen können. Aus der eben gefundenen Gleichung

$$n = \frac{n_0}{1 + V_0}$$

bekommt man

$$X_0 = (1 + V_0) n x - \xi$$

folglich

$$X = X_0 - V_0 n x$$

oder wenn man $n x$ eliminirt

$$X = X_0 - \frac{V_0}{1 + V_0} (\xi + X_0)$$

und ebenso erhält man

$$Y = Y_0 - \frac{V_0'}{1 + V_0'} (\eta + Y_0)$$

wo man wieder $\frac{1}{2}(V_0 + V'_0)$ statt V_0 und V'_0 substituiren

darf. Diese Ausdrücke geben die Werthe der Berichtigungen der Abmessungen auf den Coordinatenachsen, und es folgt daraus, dass die berichtigten Abmessungen selbst durch die Ausdrücke

$$\frac{\xi + X_0}{1 + V_0} \text{ und } \frac{\eta + Y_0}{1 + V'_0}$$

gegeben werden.

31.

Die im vorvor. Art. erhaltenen Gleichungen lassen sich in Bezug auf ihre Auflösung auf zweierlei Weise behandeln. Man kann die Werthe der Unbekannten, die sie enthalten, durch das allgemeine Verfahren, welches zur Auflösung eines Systems von linearischen Gleichungen dient, erhalten, ihre Form gestattet aber auch das weit kürzere Verfahren, welches unter dem Namen der allgemeinen Interpolationstheorie bekannt ist, anzuwenden. Ich werde daher die Sätze dieser Theorie auf die genannten Gleichungen anwenden.

Halten wir uns blos an die Gleichung

$$X = U + V\xi + A\xi^2 + B\xi^3 + \ldots$$

da die übrigen drei Gleichungen, die hier in Betracht kommen, dieser völlig ähnlich sind. Bezeichnen wir die durch die Substitution der Abmessungen in den Ausdruck für X erhaltenen speciellen Werthe dieser Function mit X^0, X', X'', etc. so wie die correspondirenden Werthe der Coordinaten mit x^0, x', x'', etc. und ξ^0, ξ', ξ'', etc., so erhalten wir das folgende System von Gleichungen,

$$\begin{aligned}
X^0 &= U + V\xi^0 + A\xi^{02} + B\xi^{03} + \text{etc.}\\
X' &= U + V\xi' + A\xi'^2 + B\xi'^3 + \text{etc.}\\
X'' &= U + V\xi'' + A\xi''^2 + B\xi''^3 + \text{etc.}\\
X''' &= U + V\xi''' + A\xi'''^2 + B\xi'''^3 + \text{etc.}\\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

deren Anzahl der Anzahl der Unbekannten gleich ist, und in welchen

$$X^0 = n x^0 - \xi^0,\quad X' = n x' - \xi',\quad X'' = n x'' - \xi'',\quad X''' = n x''' - \xi''',$$

etc. sind. Die Interpolationstheorie zeigt nun vor Allem, dass diesen Gleichungen durch den allgemeinen Ausdruck

$$X = k^0 X^0 + k' X' + k'' X'' + k''' X''' + \text{etc.}$$

Genüge geleistet wird, wenn man

$$k^0 = \frac{(\xi - \xi')\,(\xi - \xi'')\,(\xi - \xi''')\ldots}{(\xi^0 - \xi')\,(\xi^0 - \xi'')\,(\xi^0 - \xi''')\ldots}$$

$$k' = \frac{(\xi - \xi^0)\,(\xi - \xi'')\,(\xi - \xi''')\ldots}{(\xi' - \xi^0)\,(\xi' - \xi'')\,(\xi' - \xi''')\ldots}$$

$$k'' = \frac{(\xi - \xi^0)\,(\xi - \xi')\,(\xi - \xi''')\ldots}{(\xi'' - \xi^0)\,(\xi'' - \xi')\,(\xi'' - \xi''')\ldots}$$

$$k''' = \frac{(\xi - \xi^0)\,(\xi - \xi')\,(\xi - \xi'')\ldots}{(\xi''' - \xi^0)\,(\xi''' - \xi')\,(\xi''' - \xi'')\ldots}$$

etc. etc.

setzt. Man kann diesen Ausdruck in den folgenden verwandeln, den man am Einfachsten dadurch erhält, dass man in dem vorstehenden nach und nach annimmt, dass nur die zwei Werthe ξ^0, ξ', oder die drei Werthe ξ^0, ξ', ξ'', oder die vier ξ^0, ξ', ξ'', ξ''', u. s. w. vorhanden sind:

$$X = X^0 + \gamma^0(\xi - \xi^0) + \delta^0(\xi - \xi^0)(\xi - \xi') + \varepsilon^0(\xi - \xi^0)(\xi - \xi')(\xi - \xi'') + \text{etc.}$$

Hier sind die Coefficienten γ, δ, ε, etc. durch die folgenden Gleichungen zu berechnen

$$\gamma^0 = \frac{X' - X^0}{\xi' - \xi^0},\quad \gamma' = \frac{X'' - X'}{\xi'' - \xi'},\quad \gamma'' = \frac{X''' - X''}{\xi''' - \xi''},\quad \text{etc.}$$

$$\delta^0 = \frac{\gamma' - \gamma}{\xi'' - \xi^0},\quad \delta' = \frac{\gamma'' - \gamma'}{\xi''' - \xi'},\quad \text{etc.}$$

$$\varepsilon^0 = \frac{\delta' - \delta}{\xi''' - \xi^0},\quad \text{etc.}$$

Man kann schon durch diese Formeln für jeden beliebigen Werth von ξ den entsprechenden Werth von X berechnen, ohne die Unbekannten U, V, A, B, etc. zu kennen, und somit eine Tafel für die Verbesserung der Abmessungen auf der Projection aufstellen. Aber auch die genannten Unbekannten, wenn man derselben bedarf, um ihre Werthe mit den in den Artt. 25 u. 26 erhaltenen Gleichungen vergleichen zu können, lassen sich durch die vorstehenden Gleichungen erhalten. Man findet leicht

$$U = X^0 - \gamma^0\xi^0 + \delta^0\xi^0\xi' - \varepsilon^0\xi^0\xi'\xi'' \pm \text{etc.}$$

$$V = \gamma^0 - \delta^0(\xi^0 + \xi') + \varepsilon^0\{\xi^0\xi' + (\xi^0 + \xi')\xi''\} \mp \text{etc.}$$

$$A = \delta^0 - \varepsilon^0(\xi^0 + \xi' + \xi'') \pm \text{etc.}$$

$$B = \varepsilon^0 \mp \text{etc.}$$

etc.

die man fortsetzen kann so weit man will, da die Ausdrücke der Coefficienten von γ^0, δ^0, ε^0, etc. eine regelmässige Zusammen-

setzung haben. Sie sind nemlich, in so weit sie von ± 1 verschieden sind, die Summen der Combinationen zu je 1, je 2, je 3, u. s. w. der Coordinaten ξ^0; ξ^0 und ξ'; ξ^0, ξ' und ξ''; u. s. w. mit Weglassung der letzten dieser Coordinaten.

32.

Wenn die oben gestellte Forderung, dass die auf dem Urbilde gezogenen Linien sehr nahe gleiche Abstände von einander haben sollen, erfüllt ist, so kann das im vor. Art. erklärte Verfahren noch wesentlich abgekürzt werden. Da ausserdem immer vorausgesetzt wird, dass der Unterschied an Proportionalität zwischen dem Urbilde und der Projection klein ist, so kann man, ohne an der Genauigkeit Merkliches zu vergeben, durch einfache Interpolation die Abmessungen so abändern, dass paarweise die Abmessungen auf der Projection einander gleich werden. Man gelangt hiedurch dahin, das gegebene System von Gleichungen in zwei von einander unabhängige Systeme zerlegen zu können, deren jedes nur die halbe Anzahl von Unbekannten besitzt, und da die Auflösung von zwei Systemen von linearischen Gleichungen, deren jedes m Unbekannte enthält, weit weniger Arbeit verursacht, als die Auflösung Eines Systems von $2m$ Unbekannten, so verursacht dieses Verfahren, namentlich wenn viele Unbekannte vorhanden sind, wesentliche Abkürzung der Rechnungen.

Seien x^h und x^{-h} die absolut genommenen Werthe der Coordinaten von irgend zwei, in fast gleichen Abständen vom Nullpunkt zu beiden Seiten desselben auf dem Urbilde liegenden Durchschnittspunkten, und ξ^h und ξ^{-h} die entsprechenden Abmessungen auf der Projection, so correspondiren zufolge der Interpolationstheorie auch sehr nahe

$$x^h - \tfrac{1}{2}(\xi^h - \xi^{-h})\,\frac{x^h + x^{-h}}{\xi^h + \xi^{-h}} \text{ und } \tfrac{1}{2}(\xi^h + \xi^{-h})$$

so wie

$$x^{-h} + \tfrac{1}{2}(\xi^h - \xi^{-h})\,\frac{x^h + x^{-h}}{\xi^h + \xi^{-h}} \text{ und } \tfrac{1}{2}(\xi^h + \xi^{-h})$$

mit einander, und können der weiteren Rechnung zu Grunde gelegt werden.

Nennt man nun die auf der positiven Seite liegenden Durchschnittspunkte der Reihe nach $+1$, $+2$, $+3$, etc. und die auf

der negativen Seite liegenden -1, -2, -3, etc., bezeichnet die absoluten Werthe der zufolge der vorstehenden Regel interpolirten Coordinaten des Durchschnittspunkts

$$\begin{array}{llll} +1 & \text{mit } x^0 & \text{und} & \xi^0 \\ -1 & - \; x' & - & \xi^0 \\ +2 & - \; x'' & - & \xi' \\ -2 & - \; x''' & - & \xi' \\ & \text{etc.} & & \end{array}$$

und setzt

$$X^0 = n x^0 - \xi^0,\; X' = n x' - \xi^0,\; X'' = n x'' - \xi',\; X''' = n x''' - \xi',\; \text{etc.}$$

so bekommt man die Gleichungen

$$\begin{array}{ll} X^0 = & U + V\xi^0 + A\xi^{02} + B\xi^{03} + C\xi^{04} + D\xi^{05} + \ldots \\ X' = & -U + V\xi^0 - A\xi^{02} + B\xi^{03} - C\xi^{04} + D\xi^{05} \pm \ldots \\ X'' = & U + V\xi' + A\xi'^2 + B\xi'^3 + C\xi'^4 + D\xi'^5 + \ldots \\ X''' = & -U + V\xi' - A\xi'^2 + B\xi'^3 - C\xi'^4 + D\xi'^5 \pm \ldots \\ & \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

die sich offenbar durch Additionen und Subtractionen in zwei von einander unabhängige Systeme zerlegen lassen. Setzt man

$$\alpha^0 = \frac{X^0 + X'}{2\xi^0},\; \alpha' = \frac{X'' + X'''}{2\xi'},\; \alpha'' = \frac{X^{IV} + X^{V}}{2\xi''},\; \text{etc.}$$

$$\beta^0 = \frac{X^0 - X'}{2},\; \beta' = \frac{X'' - X'''}{2},\; \beta'' = \frac{X^{IV} - X^{V}}{2},\; \text{etc.}$$

$$\xi_{,}^0 = \xi^{02},\; \xi_{,}' = \xi'^2,\; \xi_{,}'' = \xi''^2,\; \text{etc.}$$

so sind die beiden Systeme von Gleichungen

$$\begin{array}{l} \alpha^0 = V + B\,\xi_{,}^0 + D\,\xi_{,}^{02} + \ldots \\ \alpha' = V + B\,\xi_{,}' + D\,\xi_{,}'^2 + \ldots \\ \alpha'' = V + B\,\xi_{,}'' + D\,\xi_{,}''^2 + \ldots \\ \quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \beta^0 = U + A\,\xi_{,}^0 + C\,\xi_{,}^{02} + \ldots \\ \beta' = U + A\,\xi_{,}' + C\,\xi_{,}'^2 + \ldots \\ \beta'' = U + A\,\xi_{,}'' + C\,\xi_{,}''^2 + \ldots \\ \quad \text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

die den Gleichungen des vor. Art. völlig ähnlich sind, und daher durch dasselbe Verfahren aufgelöst werden können. Es wird nicht überflüssig sein, die Auflösung mit Hinzufügung einer vierten Unbekannten in jedem System hier anzuführen. Bezeich-

nen α und β die allgemeinen Werthe von α^0, α', etc. und β^0, β', etc. so wie $\xi_,$ den allgemeinen Werth der $\xi_,^0$, $\xi_,'$, etc., so werden

$$\alpha = \alpha^0 + \gamma^0 (\xi_, - \xi_,^0) + \delta^0 (\xi_, - \xi_,^0)(\xi_, - \xi_,') + \varepsilon^0 (\xi_, - \xi_,^0)(\xi_, - \xi_,')(\xi_, - \xi_,'') + \ldots \qquad (A)$$

$$\beta = \beta^0 + \gamma_,^0 (\xi_, - \xi_,^0) + \delta_,^0 (\xi_, - \xi_,^0)(\xi_, - \xi_,') + \varepsilon_,^0 (\xi_, - \xi_,^0)(\xi_, - \xi_,')(\xi_, - \xi_,'') + \ldots \qquad (B)$$

wo

$$\gamma^0 = \frac{\alpha' - \alpha^0}{\xi_,' - \xi_,^0}, \quad \gamma' = \frac{\alpha'' - \alpha'}{\xi_,'' - \xi_,'}, \quad \gamma'' = \frac{\alpha''' - \alpha''}{\xi_,''' - \xi_,''}, \text{ etc.}$$

$$\delta^0 = \frac{\gamma' - \gamma}{\xi_,'' - \xi_,^0}, \quad \delta' = \frac{\gamma'' - \gamma'}{\xi_,''' - \xi_,'}, \text{ etc.}$$

$$\varepsilon^0 = \frac{\delta' - \delta}{\xi_,''' - \xi_,^0}, \text{ etc.}$$

etc.

$$\gamma_,^0 = \frac{\beta' - \beta^0}{\xi_,' - \xi_,^0}, \quad \gamma_,' = \frac{\beta'' - \beta'}{\xi_,'' - \xi_,'}, \quad \gamma_,'' = \frac{\beta''' - \beta''}{\xi_,''' - \xi_,''}, \text{ etc.}$$

$$\delta_,^0 = \frac{\gamma_,' - \gamma_,}{\xi_,'' - \xi_,^0}, \quad \delta_,' = \frac{\gamma_,'' - \gamma_,'}{\xi_,''' - \xi_,'}, \text{ etc.}$$

$$\varepsilon_,^0 = \frac{\delta_,' - \delta_,}{\xi_,''' - \xi_,^0}, \text{ etc.}$$

etc.

sind, und woraus man schon für jeden beliebigen Werth von ξ die entsprechenden Werthe von α und β, und damit die entsprechenden zwei Werthe von X erhalten kann.

Die Coefficienten der linearischen Gleichungen erhalten jetzt die Ausdrücke

$$V = \alpha^0 - \gamma^0 \xi_,^0 + \delta^0 \xi_,^0 \xi_,' - \varepsilon^0 \xi_,^0 \xi_,' \xi_,'' \pm \ldots$$
$$B = \gamma^0 - \delta^0 (\xi_,^0 + \xi_,') + \varepsilon^0 \{\xi_,^0 \xi_,' + (\xi_,^0 + \xi_,') \xi_,''\} \mp \ldots$$
$$D = \delta^0 - \varepsilon^0 (\xi_,^0 + \xi_,' + \xi_,'') \pm \ldots$$
$$F = \varepsilon^0 \mp \ldots$$

etc.

$$U = \beta^0 - \gamma_,^0 \xi_,^0 + \delta_,^0 \xi_,^0 \xi_,' - \varepsilon_,^0 \xi_,^0 \xi_,' \xi_,'' \pm \ldots$$
$$A = \gamma_,^0 - \delta_,^0 (\xi_,^0 + \xi_,') + \varepsilon^0 \{\xi_,^0 \xi_,' + (\xi_,^0 + \xi_,') \xi_,''\} \mp \ldots$$
$$C = \delta_,^0 - \varepsilon_,^0 (\xi_,^0 + \xi_,' + \xi_,'') \pm \ldots$$
$$E = \varepsilon_,^0 \mp \ldots$$

etc.

und man erhält damit die allgemeine Gleichung

$$X = U + V\,\xi + A\,\xi^2 + B\,\xi^3 + C\,\xi^4 + D\,\xi^5 + E\,\xi^6 + F\,\xi^7 + \text{etc.}$$

die auch für jeden darin substituirten Werth von ξ den entsprechenden Werth von X giebt; die Anwendung der Gleichungen (A) und (B) ist jedoch einfacher und sicherer.

33.

Ich will hier sogleich eine andere Berichtigung erklären, deren möglicher Weise die Abmessungen ausser der vorhergehenden werden bedürfen können.

Es kann sich ereignen, dass die beiden auf dem Urbilde gezogenen Systeme von graden Linien einander nicht genau rechtwinklig schneiden; zwar darf man annehmen, dass der geschickte Künstler die verlangte Perpendicularität sehr nahe hergestellt hat, aber schon eine ganz kleine Abweichung davon kann in der Anwendung der Resultate auf einen Venusvorübergang merklichen Einfluss äussern.

Die Untersuchung ist leicht auszuführen. Nachdem man auf den Coordinatenachsen des Urbildes die Entfernungen der Durchschnittspunkte vom Anfangspunkt der Coordinaten gemessen hat, messe man auch die vier Entfernungen der äussersten Durchschnittspunkte auf den Achsen der x und y von einander, wodurch man in den Stand gesetzt wird, mit Hülfe der ebenen Trigonometrie den Winkel berechnen zu können, den die Coordinatenachsen selbst mit einander machen, und für denselben vier Werthe erhält, die bis auf die Wirkung der unvermeidlichen Abmessungsfehler mit einander in Einklang stehen müssen. Durch Messung solcher zu anderen Durchschnittspunkten gehörigen Linien kann man diese Resultate vervollständigen, und zugleich untersuchen, ob die Linien grade sind.

Sei $90^0 - \psi$ der auf diese Weise erhaltene Winkel zwischen den positiven Armen der Coordinatenachsen, so sind, wenn bei unverändert gelassener Lage der Achse der ξ die rechtwinkligen Coordinaten irgend eines Punkts ξ_0 und η_0 genannt werden, und ψ sehr klein angenommen wird,

$$\xi_0 = \xi + \eta\,\psi$$
$$\eta_0 = \eta$$

Denkt man sich daher die Achse der ξ in der Richtung der

Verticale, so müssen die verticalen Coordinaten die Verbesserung $+\eta\psi$ bekommen, während die horizontalen Coordinaten keine Veränderung erleiden.

34.

Ich halte es für nicht undienlich, das oben entwickelte Verfahren zur Berechnung des Fehlergesetzes eines Linsensystems durch ein Beispiel zu erläutern, sehe mich indess genöthigt ein fingirtes Beispiel anzuwenden, da das einzige bis jetzt veröffentlichte Beispiel dieser Gattung fehlerhaft ist. Die folgenden, vorher berechneten, Daten sollen angesehen werden als wären sie Abmessungen auf einer, auf der positiven Seite der y liegenden Parallele zur Achse der x des Urbildes, so wie der correspondirenden Punkte der Projection. Das Ocular, von welchem die Projection des Urbildes herrührt, und dessen Vergrösserung in der optischen Achse ich $= 5,0$ angenommen habe, ist überdies in der vorangegangenen Berechnung der folgenden Daten als vollkommen bearbeitet, und das Lichtbild frei von Verzerrungen angenommen worden.

Ferner sind

$$\eta = +20^{mm},0, \quad u = -0^{mm},5, \quad v = +0^{mm},5$$

gesetzt, und die Durchschnittspunkte der beiden Liniensysteme wie oben mit ± 1, ± 2, ± 3, ± 4 bezeichnet worden. Die folgenden Zahlenwerthe stellen nun die erhaltenen Abmessungen vor.

Durchschnitts-punkte.	Coordinaten auf dem Urbilde. x	Coordinaten auf der Projection. ξ
+ 1	1^{mm},99005	9^{mm},98280
− 1	2, 02637	10, 17020
+ 2	3, 99600	20, 05822
− 2	4, 04052	20, 28582
+ 3	6, 01160	30, 14552
− 3	6, 03207	30, 24252
+ 4	8, 01332	39, 99803
− 4	7, 97933	39, 79603

Aus diesen Daten erhielt ich durch die im Art. 32 erklärte vorläufige Interpolation die folgenden, die der ferneren Rechnung zu unterwerfen sind.

Durchschnittspunkte.	Coordinaten auf dem Urbilde. x	Coordinaten auf der Projection. ξ
+ 1	2^{mm},00873	10^{mm},07650
− 1	2, 00789	
+ 2	4, 01867	20, 17202
− 2	4, 01783	
+ 3	6, 02127	30, 19402
− 3	6, 02240	
+ 4	7, 99308	39, 89703
− 4	7, 99957	

Man bekommt hieraus zuerst durch die betreffenden Ausdrücke des Art. 32

$$X^0 = -0.03285^{mm}, \quad X^{\text{iv}} = -0.08767^{mm}$$
$$X' = -0.03705, \quad X^{\text{v}} = -0.08202$$
$$X'' = -0.07864, \quad X^{\text{v}\prime} = +0.06837$$
$$X''' = -0.08277, \quad X^{\text{v}\prime\prime} = +0.10982$$

bei deren Berechnung infolge der obigen Angabe der Werth $n = 5{,}0$ angewandt worden ist. Wenn man nun, um die allzugrosse Anzahl von Nullen linker Hand in den Resultaten zu vermeiden, 10^{mm} zur Einheit aller Coordinaten macht, und demgemäss $\frac{\xi}{10}$ statt ξ in die Formeln substituirt, so geben die Ausdrücke des Art. 32 ferner

$$\alpha^0 = -0.034685, \quad \beta^0 = +0.00210, \quad \xi_,{}^0 = 1.0154$$
$$\alpha' = -0.040015, \quad \beta' = +0.00205, \quad \xi_,{}' = 4.0691$$
$$\alpha'' = -0.028100, \quad \beta'' = -0.02825, \quad \xi_,{}'' = 9.1168$$
$$\alpha''' = +0.021204, \quad \beta''' = -0.016225, \quad \xi_,{}''' = 15.9177$$

$$\gamma^0 = -0.0017454, \quad \delta^0 = +0.00050681, \quad \varepsilon^0 = -0.00000632$$
$$\gamma' = +0.0023605, \quad \delta' = +0.00041265$$
$$\gamma'' = +0.0072498$$

$$\gamma_,{}^0 = -0.0000164, \quad \delta_,{}^0 = -0.00011719, \quad \varepsilon_,{}^0 = +0.000002175$$
$$\gamma_,{}' = -0.0009658, \quad \delta_,{}' = -0.00008478$$
$$\gamma_,{}'' = -0.0019703$$

womit die Auflösung schon ausgeführt ist, da man jetzt durch die Gleichungen (A) und (B) des Art. 32 schon eine Tafel für die Werthe von X für beliebige Werthe von ξ berechnen kann. Ehe wir diess vornehmen, sollen aber die Werthe der Coefficienten U, V, A, B, etc. berechnet, und mit den Formeln des

Art. 26, so weit wie möglich, verglichen werden. Die betreffenden Gleichungen des Art. 32 geben

$$V = -0.030579$$
$$B = -0.0046408$$
$$D = +0.00059655$$
$$F = -0.00000632$$

$$U = +0.001551$$
$$A = +0.0006893$$
$$C = -0.00014807$$
$$E = +0.00000217 5$$

und hiemit bekommen wir zunächst für u die vier Werthe

$$u = -\overset{\text{mm}}{0.508}$$
$$-0.495$$
$$-0.495$$
$$-0.492$$

die unter einander eine gute Uebereinstimmung gewähren, und auch mit dem, in der Vorberechnung dieses fingirten Beispiels angenommenen Werthe $u = -0.5$ möglichst nahe übereinstimmen. Da ausserdem, wie oben angeführt, $\eta = 20.0$ und $v = +0.5$ angenommen worden ist, so erhalten wir aus B, D, F

$$a = -0.0100076$$
$$b = +0.00067656$$
$$c = -0.00000632$$

und rechnet man hiemit die Werthe von U, A, C, E, so wird man die oben gefundenen Werthe dieser Coefficienten sehr nahe wieder erhalten.

Zur Berechnung der Tafel für die Werthe von X für eine Reihe von Werthen der ξ durch die Gleichungen (A) und (B), will ich den stets positiv anzunehmenden Werth von ξ mit ξ^i, so wie die beiden diesem entsprechenden Werthe von X, den für $+\xi^i$ mit X^{+i}, und den für $-\xi^i$ mit X^{-i} bezeichnen. Es nehmen hierauf die Gleichungen (A) und (B) die folgende Form an

$$\tfrac{1}{2}(X^{+i} - X^{-i}) = \xi^i \{\alpha^0 + \gamma^0 (\xi_{,}^{i} - \xi_{,}^{0}) + \delta^0 (\xi_{,}^{i} - \xi_{,}^{0})(\xi_{,}^{i} - \xi_{,}') + \varepsilon^0 (\xi_{,}^{i} - \xi_{,}^{0})(\xi_{,}^{i} - \xi_{,}')(\xi_{,}^{i} - \xi_{,}'') + \text{etc.}\}$$

$$\tfrac{1}{2}(X^{+i} + X^{-i}) = \beta^0 + \gamma_{,}^{0} (\xi_{,}^{i} - \xi_{,}^{0}) + \delta_{,}^{0} (\xi_{,}^{i} - \xi_{,}') + \varepsilon_{,}^{0} (\xi_{,}^{i} - \xi_{,}^{0})(\xi_{,}^{i} - \xi_{,}')(\xi_{,}^{i} - \xi_{,}'') + \text{etc.}$$

Die für unser Beispiel auf diese Weise erhaltene Tafel ist die folgende:

ξ^i	X^i	Diff.		ξ^i	X^i	Diff.	
-40^{mm}	$-0^{mm},104$			0^{mm}	$+0^{mm},002$		0
		62				6	
38	−0.042		14	+2	−0.004		1
		48				7	
36	+0.006		12	4	0.011		0
		36				7	
34	0.042		11	6	0.018		0
		25				7	
32	0.067		9	8	0.025		1
		16				8	
30	0.083		7	10	0.033		0
		9				8	
28	0.092		6	12	0.041		1
		3				9	
26	0.095		4	14	0.050		0
		1				9	
24	0.094		4	16	0.059		1
		5				10	
22	0.089		2	18	0.069		1
		7				9	
20	0.082		2	20	0.078		1
		9				8	
18	0.073		0	22	0.086		2
		9				6	
16	0.064		0	24	0.092		2
		9				4	
14	0.055		0	26	0.096		5
		9				1	
12	0.046		0	28	0.095		5
		9				6	
10	0.037		0	30	0.089		7
		9				13	
8	0.028		2	32	0.076		7
		7				20	
6	0.021		0	34	0.056		10
		7				30	
4	0.014		1	36	−0.026		12
		6				42	
−2	0.008		0	38	+0.046		13
		6				55	
0	+0.002		0	+40	+0.071		

Aus dieser Tafel bekommt man, in Bezug auf die Linie, welcher sie angehört, für jeden Werth den ξ annehmen kann, den Werth der dazu gehörigen Grösse X, also auch den von $\xi+X$, welcher zufolge des Art. 30 die berichtigte Abmessung ist.

35.

Aus dem Inhalt des Art. 25 ergiebt sich unmittelbar das folgende Theorem:

»Aus der Tafel des vor. Art., und jeder ähnlichen erhält »man den Werth von u auf folgende Weise. Man nehme aus der »Tafel irgend einen beliebigen Werth von ξ, nebst dem dazu »gehörigen Werthe von X', und suche aus derselben Tafel den »Werth von ξ, welcher dem Werthe von $-X$ entspricht. Den »letzt genannten Werth von ξ bezeichne man mit ξ', worauf

$$u = -\tfrac{1}{2}(\xi + \xi')$$

»wird. Eben so erhält man aus den Tafeln für η und Y den »Werth von v.«

Z. B. die obige Tafel giebt die zu einander gehörigen Werthe

$$\xi = +32.0, \quad X = -0.076$$

und durch Interpolation findet man, dass $\xi' = -31.00$ zu $X = +0.076$ gehörte. Es wird daher

$$u = -\tfrac{1}{2}(32.0 - 31.00) = -0.5$$

wie oben. Ferner gehören

$$\xi = -18.0, \text{ und } X = +0.073$$

zusammen, und die Tafel giebt für $-X$ den Werth $\xi' = +18.80$, woraus

$$u = -0.40$$

folgt; so nahe wie möglich mit dem Vorhergehenden übereinstimmend. Diese Bestimmungen kann man fortsetzen.

Eine Nichtübereinstimmung in den auf diese Weise sich ergebenden Werthen von u (oder bez. v) zeigt entweder Verzerrungen des Lichtbildes, oder mangelhafte Bearbeitung des Oculars an.

Es ist hiebei noch zu bemerken, dass in der Gegend der Tafel, wo die Differenzen von X (oder bez. von Y) klein sind, dieses Verfahren unsicher werden kann, aber die Unsicherheit dadurch entfernt wird, dass man die betreffenden Werthe von X (oder Y) mit einer grösseren Anzahl von Decimalen berechnet. Auch ist dafür Sorge zu tragen, dass man nicht auf eine unrichtige Wurzel kommt. Es würde im obigen ersten Beispiel auch nahe $\xi' = -18.6$ dem Werthe $-X$ entsprechen, welches aber eine unrichtige Wurzel ist, die zu nahe $\xi = +19.5$ gehört.

36.

Wenn man nun auf einer hinreichenden Anzahl von Linien der Projection, die den ξ entsprechen, so wie auf der Achse dieser Coordinate selbst, die erforderlichen Abmessungen ausgeführt, und die entsprechenden Tafeln berechnet hat, so lassen sich diese in Eine Tafel zusammenstellen, die auf der ganzen Oberfläche der Projection, mit den Argumenten ξ und η, die berichtigten Werthe der ξ giebt, und ebenso lässt sich eine zweite Tafel herstellen, die auf der ganzen Oberfläche der Projection, mit denselben Argumenten, die berichtigten Werthe der η giebt.

Hat man nun während eines Venusvorüberganges vor der Sonne eine Reihe Lichtbilder dieser Erscheinung aufgenommen, und die Ortszeit, die jedem derselben entspricht, niedergeschrieben, so muss man beide Coordinaten der einander gegenüber stehenden Venus- und Sonnenränder so genau wie möglich abmessen, und alle diese Abmessungen durch Anwendung der oben beschriebenen Tafeln auf ihre berichtigten Werthe hinführen. Nachdem diese letzteren von der Wirkung der atmosphärischen Strahlenbrechung befreit worden sind, kann man daraus die Coordinaten der Mittelpunkte, und die Halbmesser der Venus und der Sonne berechnen, und hieraus die in Bogentheilen ausgedrückten Coordinaten der Venus in Bezug auf die Sonne erhalten. In der weiteren Behandlung dieser auf verschiedenen Stationen erhaltenen Coordinaten, zur Berechnung der Sonnenparallaxe, müssen diese Coordinaten so mit einander combinirt werden, dass aus den betreffenden Gleichungen so viele Unbekannte verschwinden wie möglich. In früheren Abhandlungen habe ich das Verfahren dazu ausführlich erklärt, und bin auf sehr einfache und strenge Gleichungen gekommen, die diesen Zweck erfüllen. Jedes andere, diese Grundsätze verkennende Verfahren zur Benutzung der Lichtbilder muss als unangemessen und der Wissenschaft nicht genügend bezeichnet werden.

37.

Auf die eben beschriebene Weise kann man zur Bestimmung des Sonnenhalbmessers auf dem Lichtbilde nur zwei Werthe erhalten; man kann denselben nur in horizontaler und verticaler Richtung bestimmen. Zur Erlangung einer grösseren Anzahl von Bestimmungen kann aber immer noch das im Art. 13 u. f. entwickelte Verfahren, welches auf die Gleichung (20)

$$R = \frac{f_0 f}{f_0 + f}\delta$$

geführt hat, angewandt werden. Die Messung des quasi Durchmessers, welche dieses Verfahren verlangt, kann man immer in einem der Punkte anfangen, wo irgend eine der mitabgebildeten Linien den Sonnenrand schneidet, und daher die Coordinaten dieses Punkts mit Leichtigkeit erhalten. Seien dieselben ξ_0 und η_0, dann werden

$$\varrho_0 = \sqrt{(\xi_0 + u)^2 + (\eta_0 + v)^2}, \quad r_0 = \sqrt{(\xi_0 + X + u)^2 + (\eta_0 + Y + v)^2}$$

$$f_0 = \frac{r_0}{\varrho_0}$$

wo X und Y mit den Argumenten ξ_0 und η_0 aus den Tafeln zu entnehmen sind. Da man den Endpunkt der gemessenen, mit δ bezeichneten Linie auch kennen lernt, so kann man auch die Coordinaten desselben erhalten, welche auf dieselbe Art den Werth von f geben. In den meisten Fällen, oder wohl immer, wird man hinreichend genaue Werthe der Coordinaten des Endpunkts von δ durch die Annahme erhalten können, dass die gemessene Linie den Mittelpunkt der Sonne schneidet, was immer sehr nahe der Fall ist und aus dem Grunde angenommen werden darf, weil für Punkte, die einander nahe liegen, f seinen Werth nur wenig ändert.

Seien die Coordinaten des Mittelpunkts der Sonne auf dem Lichtbilde $\xi = p$, $\eta = q$, die man dem Vorhergehenden zufolge schon kennt, dann rechne man π_0 und θ aus den folgenden Gleichungen

$$\pi_0 \sin\theta = \eta_0 - q$$
$$\pi_0 \cos\theta = \xi_0 - p$$

und ξ und η aus den folgenden

$$\xi = p - (\delta - \pi_0)\cos\theta$$
$$\eta = q - (\delta - \pi_0)\sin\theta$$

worauf sehr nahe ξ und η die Coordinaten des Endpunkts von δ sein werden. Man bekommt darauf ebenso wie oben

$$\varrho = \sqrt{(\xi + u)^2 + (\eta + v)^2}, \quad r = \sqrt{(\xi + X + u)^2 + (\eta + Y + v)^2}$$

$$f = \frac{r}{\varrho}$$

wo X und Y mit den Argumenten ξ und η aus den Tafeln zu entnehmen sind.

38.

Wenn die Abmessungen auf dem Lichtbilde zu erkennen gegeben haben, dass das Ocular, von welchem es herrührt, so vollkommen gearbeitet ist, dass die unvermeidlichen Fehler des Oculars so geringe Wirkung äussern, dass man sie ausser Acht lassen kann, dann nimmt das im Vorhergehenden beschriebene Verfahren eine weit grössere Kürze an. Man braucht alsdann die im Art. 36 beschriebenen Tafeln gar nicht zu berechnen,

sondern nachdem man die Grössen u, v, a, b, c, etc. gefunden hat, nur eine Tafel für f oder $f-1$ nach der Formel

$$f = 1 + a\varrho^2 + b\varrho^4 + c\varrho^6 + \text{etc.}$$

zu berechnen, die zu allen Zwecken dient, da das Argument derselben

$$\varrho = \sqrt{(\xi + u)^2 + (\eta + v)^2}$$

immer leicht erhalten werden kann. Man bekommt hiemit sogleich zur Reduction der Abmessungen

$$X = (f-1)(\xi + u)\,, \quad Y = (f-1)(\eta + v)$$

Für das im Art. 34 gegebene Beispiel wird die folgende Tafel entstehen:

ϱ	$f-1$	Diff.		ϱ	$f-1$	Diff.	
0mm	0.00000			23mm	−0.00349		1
1	−0.00001	1	2	24	0.00364	15	2
2	0.00004	3	2	25	0.00377	13	3
3	0.00009		2	26	0.00387	10	3
4	0.00016	7	2	27	0.00394	7	2
5	0.00025	9	1	28	0.00399	5	3
6	0.00035	10	2	29	0.00401	2	4
7	0.00047	12	2	30	0.00399	2	3
8	0.00061	14	1	31	0.00394	5	5
9	0.00076	15	2	32	0.00384	10	4
10	0.00093	17	1	33	0.00370	14	5
11	0.00111	18	1	34	0.00354	19	4
12	0.00130	19	1	35	0.00328	23	6
13	0.00150	20	1	36	0.00299	29	5
14	0.00171	21	0	37	0.00265	34	6
15	0.00192	21	0	38	0.00225	40	6
16	0.00213	21	0	39	0.00179	46	5
17	0.00234	21	0	40	0.00128	51	6
18	0.00255	21	0	41	0.00071	57	7
19	0.00276	21	1	42	−0.00007	64	6
20	0.00296	20	1	43	+0.00063	70	7
21	0.00315	19	1	44	0.00140	77	6
22	0.00333	18	2	45	0.00223	83	7
23	−0.00349	16	1	46	+0.00313	90	

39.

Im Vorhergehenden ist stets vorausgesetzt worden, dass die Lichtbilder, deren man sich zur Bestimmung der Sonnenparallaxe aus einem Vorübergange der Venus vor der Sonnenscheibe bedienen will, das durch die Brechung des Lichts beim Durchgange durch die Linsen des Oculars entstehende Bild des Gegenstandes mit grösster Genauigkeit wiedergeben; denn zur sicheren Bestimmung der Sonnenparallaxe müssen auf diesem Bilde verschiedene Abmessungen so genau ausgeführt werden, wie die feinsten mikroskopischen Messapparate sie zu geben vermögen. Den vorhandenen Erfahrungen zufolge giebt aber die Anwendung des gewöhnlichen Verfahrens der Photographie keine so genauen Lichtbilder, sondern man erhält dadurch stets mehr oder weniger verschobene oder verzerrte Bilder. Es kann sich ereignen, dass ein durch dieses Verfahren erhaltenes Lichtbild nur kleine Verschiebungen zeigt, aber dieselben können sich auch bis zum Zerreissen der Collodiumhaut, folglich auch des Bildes, steigern. Nie bekommt man das Bild vollkommen getreu, da die Collodiumhaut sich immer beim Trocknen zusammenzieht, und selbstverständlich ist kein Grund vorhanden um anzunehmen, dass diese Verschiebungen allenthalben bis auf mikroskopische Grössen dieselben wären; schon die ungleiche Dicke der Belegung der Glasplatte steht der Annahme einer vollkommen gleichmässigen Verschiebung entgegen.

Mehr noch, es sollen die Verzerrungen nicht blos beim Trocknen der Belegung der Glasplatte, sondern auch später entstehen können. Da nun bei den Venusvorübergängen die Lichtbilder häufig in weit entfernten Gegenden aufgenommen werden müssen, wie bei dem nächstbevorstehenden Vorübergange der Fall ist, und eine lange Reise durch die verschiedensten Klimate machen müssen, ehe die Abmessungen an denselben vorgenommen werden können, so läuft man Gefahr bei der Zurückkunft der Expeditionen lauter zerrissene Lichtbilder vor sich zu sehen. Auch die Anwendung der sogenannten Trockenbilder muss dieselben Bedenken erregen, da sie, abgesehen von späteren Verzerrungen, die auch hier eintreten können, bei der Hervorrufung des Bildes mit Flüssigkeiten behandelt werden müssen, wodurch schon Verschiebungen hervorgerufen werden können.

Das Hülfsmittel durch Anbringung eines Quadratnetzes auf

dem Träger eines Bildes, die Verzerrungen, die dieser Träger im Laufe der Zeit erleiden möchte, möglichst unschädlich zu machen, habe ich schon vor vielen Jahren in Bezug auf die Karten einer Katastervermessung angegeben; es ist dasselbe zuerst auf die Karten der Katastervermessung des Herzogthums Gotha in Anwendung gebracht, und auch später in andern Ländern eingeführt worden. Da das im Art. 23 beschriebene künstliche Urbild in einem Netz von nahe quadratischen Figuren besteht, und sich auf dem Lichtbilde auch darstellt, so scheint es, als könnte man auch im gegenwärtigen Falle durch Zuziehung des Netzes auf dem Urbilde, indem man die erforderlichen Abmessungen von den nächsten Linien desselben ausgehen lässt, die Verzerrungen des Lichtbildes unschädlich machen. Bei genauer Betrachtung der Sachlage stellt sich diess jedoch anders heraus. Das Papier, auf welchem die Karten einer Katastervermessung gezeichnet werden, ist nur relativ geringen Veränderungen unterworfen, wenn es vor ausserordentlichen schädlichen Einflüssen geschützt wird, und auf diesen Karten brauchen keine mikroskopischen Abmessungen vorgenommen zu werden. Dagegen sind die Veränderungen, denen die oben beschriebenen Lichtbilder ausgesetzt sind, relativ viel grösser, da sie bis zum Zerreissen derselben sich erstrecken können, und auf diesen müssen die Abmessungen mit der grösstmöglichen mikroskopischen Genauigkeit ausgeführt werden. Man ist daher keineswegs sicher, dass nicht in kleinen Entfernungen die Verzerrungen schon so viel von einander verschieden sind, dass sie die Grenzen der mikroskopischen Abmessungen weit übersteigen; das angeführte Hülfsmittel wird daher im gegenwärtigen Falle illusorisch und trügerisch. Schon das wahre Fehlergesetz des Ocularbildes kann auf diese Weise gar nicht gefunden werden.

Weit günstigeren Erfolg darf man von dem Verfahren erwarten, welches Daguerre erfunden hat, und wodurch überhaupt die Anfertigung von Lichtbildern ins Leben gerufen wurde. Das Silber einer damit plattirten Kupferplatte wird Joddämpfen ausgesetzt, und die so vorbereitete Platte den von den Gegenständen, deren Bild man erhalten will, zurückgeworfenen oder ausgehenden Lichtstrahlen in einem dazu geeigneten Apparat dargeboten. Da das durch die genannte Vorbereitung entstandene Jodsilber, in welchem sich das Lichtbild erzeugt, mit dem Silber der Platte fest verbunden ist und einen Theil desselben

ausmacht, so ist an keine Verschiebung oder Verzerrung zu denken, und man kann auf vollständige Uebereinstimmung des Lichtbildes mit dem Ocularbilde rechnen. Eben so wenig sind bei der Hervorrufung des Bildes, die durch Quecksilberdämpfe bewirkt wird, Verschiebungen oder Verzerrungen desselben denkbar. Auch die dritte Operation, die Fixirung des Bildes, die in nichts Weiterem als in der Abwaschung des übrig gebliebenen Jods besteht, kann zu keiner Veränderung des Bildes Anlass geben, da dieses alsdann dem Silber schon vollständig eingeprägt ist. Endlich ist noch hervorzuheben, dass die auf diese Art erhaltenen Lichtbilder weit schärfere Umrisse der Gegenstände und der einzelnen Theile derselben darbieten, als die gewöhnlichen Photographien.

Fassen wir die beiden Verfahrungsarten zur Herstellung von Lichtbildern kurz zusammen, so können wir uns dahin aussprechen, dass das gewöhnliche photographische Verfahren Lichtbilder giebt, die mit einem veränderlichen Pflanzenstoffe auf Glas geklebt sind, während die Daguerreotypie in Metall eingegrabene Lichtbilder liefert. Es möchte schon diese einfache Betrachtung das Verfahren bestimmen können, welches in so feinen Untersuchungen, wie die Bestimmung der Sonnenparallaxe aus einem Venusvorübergange durch Hülfe von Lichtbildern, anzuwenden ist.

Noch näher liegt die Schlussfolge, dass man die Versuche, die im Voraus zur vollständigen Orientirung angestellt werden müssen, jedenfalls auf die Anwendung der Daguerreotypie ausdehnen muss, und eine etwaige Beiseitesetzung dieser als eine Einseitigkeit angesehen werden muss, die schwer wiegende Folgen nach sich ziehen kann.

F. Zöllner, *Ueber die electrische und magnetische Fernewirkung der Sonne.*

In einer soeben in den »Astronomischen Nachrichten« erschienenen Abhandlung von *Zenker*[1]) befinden sich u. A. folgende Sätze:

»Mit Uebergehung mancher anderen Theorien, wende ich mich zu derjenigen, welche in neuester Zeit von *Zöllner*[2]) aufgestellt worden ist, und welche in Anlehnung an eine von *Olbers* seiner Zeit ausgesprochene Vermuthung die Electricität als diejenige treibende Kraft hinstellt, der die Bildung der Cometenschweife zuzuschreiben sei.«.....

»Auch gegen diese Theorie muss ich mich mit der grössten Entschiedenheit erklären, denn nimmermehr ist die Annahme einer einartig electrischen Ladung der Sonne zu gestatten.«.....

»Nicht als ob an dem Vorhandensein gewaltiger electrischer Processe auf der Sonnenoberfläche zu zweifeln wäre.«.....

»Aber alle diese Electricitäts-Entwickelung ist ja doch in Wahrheit (d. h. nach den aus den bisherigen Erfahrungen gewonnenen Anschauungen) nur eine Electricitäts-Vertheilung eine Trennung der beiden Electricitäten, deren eine dem ruhenden, dichteren, schwereren oder kälteren, deren andere dem bewegten, dünneren, leichteren oder wärmeren Stoffe folgt. Die Annahme, dass die eine Electricität ohne die andere oder nur in grösserer Quantität als

---

1) Ueber die physikalischen Verhältnisse und die Entwickelung der Cometen von Dr. *W. Zenker*. Astronomische Nachrichten No. 1890—1893 (1872. Juni 15).

2) Berichte der Königl. Sächs. Ges. d. W. Sitzung am 6. Mai 1871 und »Natur der Cometen etc.« p. 77— p. 162.

die andere entstehe, widerspricht durchaus den Grundanschauungen der Electricitätslehre.«.....

»Der Erfolg der Electricitätserregung an der Sonnenoberfläche kann mithin nur der sein, dass sich concentrisch um den Mittelpunct der Sonne zwei Kugelschalen freier Electricität legen, die eine in der Atmosphäre, die andere von entgegengesetztem Vorzeichen im Sonnenkörper. Die Wirkung jeder Kugelschale nach aussen berechnet sich alsdann so, als ob die ganze Electricitätsmenge derselben im Mittelpuncte der Kugel zusammengehäuft läge. Es ist also klar, dass bei der Sonne die beiden gleich starken aber entgegengesetzten Kräfte virtuell von demselben Puncte aus wirken und dass daher die beiden Wirkungen einander nach jeder Richtung hin aufheben.«

Da der Verfasser diese Argumentationen als Beweise gegen die Zulässigkeit der von mir und Anderen gemachten Annahme einer electrischen Fernewirkung der Sonne anführt, so hat er vermuthlich in meinem von ihm selber citirten Buche: »Ueber die Natur der Cometen etc.« die p. 297 u. 298 unter der Ueberschrift: »Ueber die electrische Fernewirkung der Sonne« gemachten Bemerkungen übersehen. Denn ich habe dort ganz dieselben Einwendungen nur kürzer mit folgenden Worten angeführt und zu beseitigen versucht:

»Es wurde jedoch . . . auch der Versuch gemacht, den Ursprung jener Electricität durch Vorgänge an der Sonnenoberfläche nach Analogie irdischer Processe zu erklären. Da aber die in solcher Weise geschiedenen electrischen Fluida bezüglich ihrer Fernewirkungen im Mittelpuncte der Sonne concentrirt gedacht werden können, so würden ihre Wirkungen in die Ferne nur unter Voraussetzung einer der beiden folgenden Bedingungen aufgehoben, nämlich:

1) wenn, wie bisher angenommen, die Potentiale gleicher Quantitäten der geschiedenen Fluida gleich gross sind.
2) wenn die Träger der geschiedenen Electricitäten stets in gleicher Quantität an der Oberfläche der Sonne bleiben.

Dass die zweite Annahme auf Grund der im ganzen ersten Theile meiner Untersuchungen entwickelten Anschauungen über die allgemeine Verdampfung (p. 86—97) aus-

geschlossen werden muss, und daher die erste Annahme überflüssig wird, bedarf bei aufmerksamer Erwägung der dort entwickelten Gesichtspuncte keiner weiteren Erörterung.

Die Sonne muss demgemäss unter den gemachten Voraussetzungen in ähnlicher Weise eine electrische Fernewirkung ausüben wie eine Dampfelectrisirmaschine, deren negativ oder positiv electrische Dämpfe sich durch fortdauernde Entfernung vom erhitzten Kessel im Raume verbreiten und so bewirken, dass der Körper, auf welchen die Fernewirkung ausgeübt wird, sich nicht in gleichem Masse ausserhalb der Ansammlung der Gesammtmenge beider geschiedenen Electricitätsmengen befindet.«

Dass die Annahme einer partiellen Fortführung des einen electrischen Fluidums durch die Verdampfungsprocesse an der Sonnenoberfläche nichts den »Grundanschauungen der Electricitätslehre« und den »aus den bisherigen Erfahrungen gewonnenen Anschauungen« Widersprechendes enthält, beweist unter Anderem eine von *Becquerel* erst ganz kürzlich zur Erklärung der Luftelectricität aufgestellte Hypothese, welche derselbe der französischen Akademie am 12. Juni 1871 vorlegte. Ich erlaube mir hier die characteristischen Stellen dieser vom Verfasser auszugsweise in den Comptes rendus T. 72. p. 709—712 mitgetheilten Abhandlung anzuführen:

»*On ignore encore l'origine de l'électricité atmosphérique, malgré les recherches faites jusqu'ici pour y parvenir;*«....

»*Nous avons commencé par montrer que toutes les causes physiques, chimiques et physiologiques qui dégagent de l'électricité à la surface de la terre ne peuvent fournir les quantités énormes d'électricité répandues dans les espaces planétaires*.....

»*Il restait à examiner jusqu' à quel point il était possible de lui attribuer une origine céleste.*«

»*On a commencé par rappeler les notions que l'on possède sur la formation de la terre, sur les éruptions volcaniques et les effets électriques puissants qui les accompagnaient dans les temps primitifs ainsi que sur la constitution physique et chimique du soleil, telle que nous la connaissons aujourd'hui.*«....

»*Les protubérances ne sont donc que les portions les plus saillantes de la matière hydrogénée qui entoure de toutes parts le soleil. Peut-être ne sont elles que des projections gazeuses.*«

»Or l'hydrogène qui ne paraît être, d'ici, que le résultat d'une décomposition, emporte avec lui de l'électricité positive, qui se répand dans les espaces planétaires, puis dans l'atmosphère terrestre et même dans la terre, en diminuant toujours d'intensité, à cause la mauvaise conductibilité des couches d'air de plus en plus denses, et de celle de la croûte superficielle de la terre. Celle-ci ne serait donc négative que parce qu'elle serait moins positive que l'air.

»Pour montrer comment l'électricité positive émanant du soleil se répand dans les espaces planétaires, on a commencé par rappeler que l'électricité ne se propage dans un milieu qu'autant que ce milieu contient de la matière qui lui sert de véhicule.

»La présence de l'électricité n'est constatée, dans les expériences dont il est question, que par des effects lumineux; mais il y a d'autres moyens à l'aide desquels on peut manifester cette présence: il suffit pour cela de mettre en communication avec le conducteur d'une machine électrique en action un vase de métal, contenant un liquide vaporisable; on ne tarde pas à s'apercevoir que l'évaporisation est plus grande que celle qui a lieu dans un vase semblable, contenant le même liquide, mais non électrisé. Il est prouvé par la que l'éctricité peut se repandre dans un espace vide, quand elle peut entraîner avec elle de la matière. On a démontré cette vérité par de nombreuses réactions chimiques, dont les résultats seront exposés dans un Mémoire que nous présenterons prochainement à l'Académie.«

Im Hinblick auf diese vor einem Jahre veröffentlichten Anschauungen *Becquerel's* gewinnt eine am 10. Mai dieses Jahres der Akademie der Wissenschaften zu Wien von dem Director der Sternwarte in Prag, Herrn Prof. *Hornstein*, übersandte Abhandlung: »Ueber den Einfluss der Electricität der Sonne auf den Barometerstand« ein erhöhtes Interesse. *Hornstein* führt als Resultat seiner Untersuchungen die beiden folgenden Sätze an:

1) »Die aus den stündlichen Barometer-Beobachtungen seit 1841 von Jahr zu Jahr sich ergebenden Werthe des Coëfficienten k des atmosphärischen Ebbe- und Fluthgliedes für Prag und München werden sehr befriedigend dargestellt

durch die Voraussetzung, dass k die längere (70-jährige) Periode mit den Polarlichtern und Sonnenflecken gemein hat, und gleichzeitig mit diesen Erscheinungen sein Maximum oder Minimum erreicht.

Im dritten Abschnitte wird nachgewiesen, dass auch die jährliche Schwankung des Luftdruckes mit dem Verlaufe der Polarlichter im innigen Zusammenhange steht, so dass sich der Satz aussprechen lässt:

Die aus den Beobachtungen seit 1763 erhaltenen Werthe der jährlichen Schwankung des Barometerstandes in Prag, Mailand, Wien und München werden sehr befriedigend dargestellt durch die Voraussetzung, dass die jährliche Schwankung des Luftdruckes die längere (70-jährige) Periode mit den Polarlichtern und Sonnenflecken gemein hat und gleichzeitig mit diesen Erscheinungen ihr Maximum oder Minimum erreicht.«

Dass die »Grundanschauungen der Electricitätslehre« nicht in dem Masse als bestimmte und sicher begründete anzunehmen sind, wie dies Herr Dr. *Zenker* vorauszusetzen scheint, beweisen unter Anderem einige Sätze in den erst vor Kurzem veröffentlichten Untersuchungen: »Ueber den Durchgang der Electricität durch Gase von *G. Wiedemann* und *R. Rühlmann*.[1]) Die Verfasser gelangen dort zu dem Satze:

»Dass zur Einleitung einer Entladung an der positiven Electrode ein grösseres Potential der gesammten Electricitäten auf die auf der Flächeneinheit aufgehäufte Electricität erforderlich ist, als an der negativen Electrode.« (l. c. p. 384.)

.... mithin muss die Bewegung der Electricität selbst oder der mit Electricität geladenen Gastheilchen von der Electrode fort mit grösserer Anfangsgeschwindigkeit vor sich gehen, wenn die Electrode positiv ist, als wenn sie negativ ist.« (p. 486.)

»Die eigentliche Ursache dieses scheinbaren Uebergangswiderstandes ist bei unserer völligen Unkenntniss über die wahre Natur der Electricitäten noch nicht zu ergründen.« (p. 394.)

---

1) Diese Berichte Sitzung von 25. Juli 1871. Pogg. Ann. Bd. CXLV p. 364 ff. (1872).

Wenn man daher selbst die Hypothese machte, dass die beiden bisher angenommenen electrischen Fluida sich nicht völlig neutralisirten, sondern eine derselben bei allen Körpern in einem ihrer Masse proportionalen Ueberschusse existirte, so würde eine solche Annahme in keiner Weise den bisherigen Erfahrungen widersprechen, so lange dieser Ueberschuss so klein angenommen wird, dass er für alle bei unseren bisherigen Versuchen ins Spiel kommenden Massen als ein unmerklicher d. h. für unsere Wahrnehmung verschwindender betrachtet werden darf.

Hieraus würde aber ebenso wenig die Nichtwahrnehmbarkeit dieses electrischen Ueberschusses bei kosmischen Massen zu folgern sein, wie aus der unter gewöhnlichen Verhältnissen vollkommen verschwindenden Gravitationswirkung der Materie auf die Abwesenheit derselben bei den Himmelskörpern. Bekanntlich sind erst durch die subtilen Versuche von *Maskelyne*, *Cavendish* und *Reich* auch im Bereiche irdischer Massen jene allgemeinen Fernewirkungen der Materie empirisch nachgewiesen worden, deren Existenz zuerst aus den Gesetzen der kosmischen Bewegungen gefolgert wurde.

Ohne jedoch durch diese Bemerkungen zu Gunsten einer solchen electrischen Fernewirkung der Materie überhaupt entscheiden zu wollen, da die bereits oben erwähnten Thatsachen, wie mir scheint, vorläufig ausreichend sind, um nach den bisherigen Erfahrungen wenigstens qualitativ die Existenz einer electrischen Fernewirkung der Weltkörper zu begründen, so sollen dieselben nur dazu dienen, den grossen Spielraum zu erläutern, welcher auf diesem Gebiete noch hypothetischen Annahmen zur Erklärung beobachteter Thatsachen gestattet ist.

Als weitere Bestätigung für die Zulässigkeit dieser Anschauungen erlaube ich mir auf die im vorigen Jahre von dem schwedischen Akademiker *Edlund* publicirte neue Theorie aller electrischen Erscheinungen zu verweisen.

Vollkommen übereinstimmend mit den Ansichten *Euler's*[1]) versucht *Edlund* alle Phänomene der Electricität als Gleichgewichtsstörungen einer überall verbreiteten, feinen elastischen Materie darzustellen — die nach seiner Ansicht wahrscheinlich

1) *Leonhard Euler's* »Briefe über verschiedene Gegenstände aus der Naturlehre.« Leipzig, 1793, Bd. II. p. 149 ff.

identisch mit dem Lichtäther ist — deren Theilchen gegenseitig eine dem *Weber*'schen Gesetze entsprechende repulsive Fernewirkung auf einander ausüben [1]) Im Sinne dieser Theorie würde mit Berücksichtigung der beobachteten Fortführung materieller Theilchen bei Störungen des electrischen Gleichgewichtes ein jeder verdampfende Körper gleichsam als ein Evacuationscentrum im Aether d. h. als ein mit negativ electrischer Fernewirkung begabter Körper zu betrachten sein, gleichgültig wie gering und unmerklich diese Wirkung unter gewöhnlichen irdischen Verhältnissen sein mag.

Euler sagt a. a. O.

»Die meisten Physiker gestehen ihre Unwissenheit, sobald es darauf ankommt, diese Wirkungen zu erklären. Es scheint, dass die grosse Mannigfaltigkeit der electrischen Erscheinungen, die sich täglich durch neue Entdeckungen vergrössert, sie so verwirrt, dass sie alle Hoffnung verlieren, die wahre Ursache derselben jemals zu ergründen. So viel sehen sie wohl ein, dass eine feine Materie, welche sie die electrische Materie nennen, dabei am meisten wirksam ist, aber sie sind so wenig im Stande ihre Natur und ihre Eigenschaften zu bestimmen, dass dadurch in der Hauptsache so viel wie nichts gewonnen wird.«

»Es ist wohl keinem Zweifel unterworfen, dass man die Quelle aller electrischen Erscheinungen in einer feinen, flüssigen Materie suchen muss; aber wir brauchen eine solche Materie nicht erst zu erdichten. Der Aether, diese feine Materie, deren Wirklichkeit ich Ew. H. schon zu einer andern Zeit bewiesen habe, ist hinreichend, auch die auffallendsten electrischen Erscheinungen auf die natürlichste Weise zu erklären.«

(p. 164.) »Dies vorausgesetzt darf ich behaupten, dass alle Erscheinungen der Electricität eine natürliche Folge von der Störung des Gleichgewichtes unter den verschiedenen Theilen des Aethers sind: überall, wo das Gleich-

---

1) *E. Edlund,* Sur la Nature de l'Électricité (Mémoire présenté à l'Académie des Sciences de Stockholm, le 10 mai 1871). Traduction communiquée par l'auteur aux Archives des Sciences de la Bibliothèque universelle à Genève. (April 1872.)

gewicht des Aethers aufgehoben wird, müssen sich electrische Erscheinungen zeigen; und folglich ist die Electricität nichts anderes als eine Störung in dem Gleichgewichte des Aethers.«

(p. 162.) »Hieraus entspringen zwei verschiedene Arten von Electricität: die eine, wo der Aether elastischer oder stärker zusammengedrückt ist, heisst die positive Electricität; die andere, wo er weniger elastisch oder dünner ist, nennt man die negative Electricität.«

Die analogen Stellen in *Edlund's* Theorie a. a. O. sind folgende:

(p. 2.) »*Nous allons essayer de montrer dans ce travail que les phénomènes électriques, tant statiques que dynamiques, se laissent expliquer à l'aide d'un seul fluide, qui, selon toutes les probabilités, n'est autre chose que l'éther.*«

(p. 3.) »*Nous admettons l'existence d'une matière subtile, élastique au plus haut degré, répandue dans l'univers entier, et cela non-seulement dans le vide, mais encore dans les parties de l'espace occupées par la matière pondérable. Nous admettons de même que deux molécules d'éther, placées à distance l'une de l'autre, se repoussent mutuellement le long de leur ligne de jonction et en raison inverse des carrés des distance.*«

Dass diese Wechselwirkung der Aethermolecüle nur im Zustande der Ruhe gültig ist und im Zustande relativer Bewegung eine dem *Weber*'schen Gesetze entsprechende Modification erleidet, sucht *Edlund* u. A. durch folgende Betrachtungen zu begründen:

(p. 14.) »*Quand une action reciproque commence entre deux corps matériels ou entre deux molécules d'éther cette action n'atteint pas à un moment mathématique la pleine valeur déterminée par la distance réciproque.*«...

»*La thèse formulée plus haut: »»tout ce qui passe ou s'effectue dans la nature extérieure exige un certain temps,«« peut être, relativement à son importance, comparée à la thèse que l'on peut dire constituer la base de la theorie mécanique de la chaleur, et qui s'exprime par ces mots: »»rien ne naît de rien«« (ex nihilo nihil fit). La thèse établie doit tout particulièrement trouver son application dans le domaine de*

l'électricité, vu que la grande vitesse de propagation de ce phénomène provoque des modifications rapides dans l'action réciproque que les molécules d'éther exercent l'une sur l'autre.«

(p. 6.) »*Nous admettons qu' un corps soi-disant chargé d'électricité positive, contient plus d'.éther qu'à l'état normal, et que la quantité d'éther d'un corps électronégatif est moindre que lorsque l'état électrique est normal.*« [1])

Die andern Einwendungen *Zenker's* gegen die Zulässigkeit meiner Cometentheorie, namentlich aber seine Erklärung der Repulsivkraft der Sonne auf die Cometenschweife durch die Reaction von Dampfstrahlen, welche sich aus den vom Kerne abgelösten Tropfen oder »Bällen« auf ihrer der Sonne zugewandten Seite entwickeln, glaube ich ohne irgend eine ausführliche Erörterung übergehen zu dürfen. Denn diese Anschauungen erledigen

---

1) Die Hypothesen *Edlund's* und *Euler's* über die Natur der Electricität gewinnen an Interesse, wenn man von ihrem Standpuncte die erst kürzlich veröffentlichten Untersuchungen *W. v. Bezold's*: »*Ueber das Bildungsgesetz der Lichtenberg'schen Figuren*« (Pogg. Ann. Bd. 144. p. 338 — p. 363 und p. 526 — p. 550) zu interpretiren versucht. Auf Grund zahlreicher, ebenso interessanter als sinnreicher, Versuche gelangt *Bezold* u. A. zu folgenden Resultaten:

(p. 545.) »*Während der Bildung einer Lichtenberg'schen Figur (im lufterfüllten Raume) gehen die Bewegungen der Electricität auf der isolirenden Platte so langsam vor sich, dass von electrischen Kräften nur die electrostatische Fernewirkung in Betracht kommt, d. h. das erste Glied des Weber'schen Grundgesetzes.*

Aus der grossen Verschiedenheit, welche positive und negative Figuren hinsichtlich elektrostatischer Einflüsse zeigen, folgt, dass der Mechanismus der Entladung in beiden Fällen ein gänzlich verschiedener sein muss.«

(p. 549.) »*Bei dem Aus- und Einströmen von Flüssigkeiten aus oder in feinen Röhren, welche eine grössere Horizontal-Fläche der gleichen Flüssigkeiten berühren, treten Erscheinungen ein, welche den Lichtenberg'schen Figuren vollkommen analog sind. Kleine Körperchen, welche als Marken auf der Flüssigkeit schwimmen, ordnen sich in dem einen Falle zu einem Ring oder Fleck, im andern zu einem Sterne an. Dies führt zu der Vermuthung, dass bei der positiven Entladung eine Bewegung gegen den Zuleiter hin stattfinde, bei den negativen eine solche vom Zuleiter gegen die Peripherie, die aber dann nicht im radialen Sinne bleiben kann, sondern zu Wirbelbewegungen Anlass geben muss.*

Das verschiedene Verhalten des positiven und negativen Lichtes der Geissler'schen Röhren gegen Magnete stimmt hiermit überein.«

sich von selbst, wenn man berücksichtigt, dass die entwickelten und durch Reaction auf die Elemente des Schweifes wirkenden Dämpfe doch sichtbar sein müssten und daher bei ihrer nothwendig viel grösseren Geschwindigkeit (wegen der nach Massgabe der grösseren Masse verschwindenden Reactionsbewegung der »Bälle«) stets nur einen der Sonne zugewandten Schweif des Cometen erzeugen könnten. Das vom Verfasser nach dem Vorgange *Bessel's* (bei der Ausströmung des *Halley*'schen Cometen) angezogene Beispiel einer Rakete hätte ausreichen können, ihm die Unhaltbarkeit seiner eigenen Anschauungen über den Ursprung der Repulsivkraft der Sonne zum Bewusstsein zu bringen. Denn die Ausströmungsöffnung eines Raketenkörpers im Weltraume könnte nur eine im Vergleich zur Ausströmungsgeschwindigkeit der glühenden Theilchen verschwindende Reactionsbewegung zeigen; sie würde uns relativ fast still zu stehen scheinen, während sich die an Masse viel geringere ausströmende Materie nach der Richtung der Ausströmungsmündung schnell fortbewegte. Ganz dasselbe muss daher auch bezüglich der Dampfstrahlen stattfinden, welche sich nach *Zencker's* Theorie aus den »Bällen« entwickeln sollen.

Wenn daher Herr Dr. *Zenker,* unmittelbar nach Anführung der Worte *Bessel's,* bezüglich der möglichen Reactionswirkung der Ausströmung auf den Kern des *Halley*'schen Cometen, folgendermassen fortfährt:

> »Wunderbar genug, dass der hierin ausgesprochene Gedanken, der Rückstoss des sich entwickelnden und fortgeschleuderten Dampfs könne als treibende Kraft auftreten, dass dieser Gedanke bisher niemals eine weitere Ausführung erfahren hat,«

so dürfte nach den obigen Bemerkungen der in diesem Satze ausgesprochene Vorwurf einer mangelhaften Combination einfacher und längst bekannter Thatsachen zur Erklärung der fraglichen Phänomene weniger *Bessel* und die bisherigen Interpreten derselben als vielmehr den Verfasser selber treffen.

Anmerkung. In meiner Abhandlung »*Ueber die Stabilität kosmischer Massen und die physische Beschaffenheit der Cometen*« (diese Berichte, Sitzung am 6. Mai 1871) habe ich in §. 18 an einem numerisch durchgeführten Beispiele zu zeigen versucht, dass eine kleine Kugel von 11 Millimeter Durchmesser und einer Masse entsprechend einer Quantität atmosphärischer Luft von 76 Millimeter Barometerdruck und gleichem Volumen, unter dem Einflusse einer electrischen Repulsion der Erde Geschwindig-

keiten erlangt, welche von gleicher Ordnung mit denjenigen sind, die wir bei der Entwickelung und Ausbreitung der Cometenschweife beobachten. Es war hierzu die Kenntniss der Kraft in absolutem Masse erforderlich, mit welcher irgend ein electrisirter Körper eine Kugel von der angegebenen Masse und Grösse abstösst. Bei dem gänzlichen Mangel umfassender Bestimmungen dieser Art an künstlich electrisirten Oberflächen war ich erfreut, in den umfangreichen Untersuchungen *Hankel's* »*Ueber die Messung der atmosphärischen Electricität nach absolutem Maasse*« wenigstens eine solcher Bestimmungen für die Luftelectricität zu finden.

Es lag bei dieser beispielsweise durchgeführten Rechnung nicht in meiner Absicht, auf Grund des von *Hankel* erlangten Werthes (der mit Berücksichtigung einer hierbei willkürlich vorausgesetzten Constanten noch ausserordentlich reducirt werden muss) ein Urtheil über die wahre electrische Fernewirkung der Erde im Weltraume abzuleiten. Wenn ich mir daher aus den Betrachtungen des betreffenden Abschnittes den Schluss zu ziehen erlaubte, »dass es vollkommen genügt, der Sonnenoberfläche selbst quantitativ nur diejenigen electrischen Eigenschaften beizulegen, welche man durch directe Beobachtungen an der Erdoberfläche nachzuweisen im Stande ist,« so muss die Allgemeinheit dieser Analogie bezüglich der kosmischen Fernewirkungen durch die Worte »an der Erdoberfläche« entsprechend limitirt werden.

Die durch die electrischen Fernewirkungen der Weltkörper der feinvertheilten Schweifmaterie der Cometen ertheilten Geschwindigkeiten können jedoch bei entsprechender Reduction ihrer Dichtigkeit, d. h. also der bewegten Massen, dieselben bleiben. Wenn man nun berücksichtigt, dass die oben ganz willkürlich vorausgesetzte Dichtigkeit (Luft von 7. 6 mm Barometerdruck,) die wirkliche Dichtigkeit der Cometenschweife wahrscheinlich um viele Billionen Male übertrifft, (im Hinblick auf die ausserordentliche Dicke der durchschauten Schicht,) so dürfte schon eine verhältnissmässig sehr geringe Intensität der electrischen Fernewirkung der Sonne und anderer Weltkörper ausreichend sein, um einen sichtbaren Einfluss auf die feinvertheilten Massen cometarischer Dünste auszuüben.

Denn so lange nicht bestimmte, auf diese Verhältnisse besonders gerichtete Untersuchungen vorliegen, wird wohl bei Beurtheilung der den Körpern durch electrische Fernewirkungen ertheilten Geschwindigkeiten der a. a. O. p. 215 in folgender Weise formulirte Satz den Ausgangspunct aller darauf bezüglichen Deductionen bilden müssen:

> »Steht ein Körper gleichzeitig unter dem Einflusse der Gravitation und freien Electricität eines andern, so prävalirt bei zunehmender Masse die Gravitation, bei abnehmender Masse die Electricität als bewegende Kraft.«

Es sei schliesslich bemerkt, dass vor kurzem auch ein Italienischer Gelehrter, *Felix Marco* in *Turin*, von dessen Arbeiten ich erst nachträglich erfuhr, die electrische Fernewirkung der Sonne und ihre Einwirkung auf die gleichfalls electrisch erregten Dämpfe der Cometen zur Erklärung der Schweifbildung benutzt hat. (Vgl. Les Mondes T. 17 p. 538.)

Die magnetische Fernewirkung der Sonne, die gegenwärtig durch unwiderlegliche Thatsachen als bewiesen anzusehen sein dürfte,[1] habe ich in meiner am 20. October 1871 der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegten Abhandlung: »Ueber den Ursprung des Erdmagnetismus und die magnetischen Beziehungen der Weltkörper« physikalisch zu begründen versucht. Gestützt auf den durch zahlreiche Beobachtungen erwiesenen, innigen Zusammenhang zwischen den Bewegungen flüssiger Leiter und den in ihnen erregten galvanischen Strömen, habe ich die, in der glühendflüssigen Masse noch nicht vollkommen erstarrter Weltkörper, vorhandenen Strömungen als gleichzeitig mit electrischen Strömungen verknüpft vorausgesetzt. In einem der Arbeit während des Druckes beigefügten Nachtrage habe ich ferner Beobachtungen über electrische Ströme mitgetheilt, welche man beim Durchfliessen von Wasser durch weite Röhren beobachtet. Ich sprach a. a. O. die Vermuthung aus, dass die Ursache dieser Ströme dieselbe sein dürfte, wie diejenige, welche den von *Quincke* beim Durchströmen des Wassers durch die engen Canäle einer porösen Scheidewand beobachteten Strömen zu Grunde liegt.

Die mitgetheilten Versuche haben bereits eine Bestätigung erhalten,[2] indessen scheint ihr Ursprung nach den Versuchen des Herrn *Beetz* nicht der von mir vermuthete sondern einfach darin begründet zu sein, dass durch die Verschiedenheit der während des Strömens in leitende Verbindung gesetzten Einfluss- und Ausflussöffnungen ein *Volta*'sches Element gebildet wird. Ich bin bis jetzt noch nicht in der Lage gewesen, die von Herrn *Beetz* vermuthete Gleichheit der Bedingungen unserer

---

1) *Sabine.* Philosophical Transactions 1852. May 6.
Wolf, Mittheilungen der Berner naturforschenden Gesellschaft, No. 245.
Comptes rendus, 18. Sept. 1852.
Astronomische Nachrichten, No. 820.
Poggendorff's Annalen CXVII, p. 502.
Gautier, Bibliothèque Universelle. 1852. Juillet et Août 1852.
Hornstein, »Ueber die Abhängigkeit des Erdmagnetismus von der Rotation der Sonne.« Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie zu Wien. Juni 1871.

2) *Beetz*, Berichte der Königl. Academie der Wissenschaften zu München. Sitzung vom 4. Mai 1872.

beiderseitigen Experimente durch Versuche zu constatiren. Indessen bin ich mit der Construction eines Apparates beschäftigt, durch welchen ich hoffe, in unzweideutiger Weise über die Nachweisbarkeit solcher Flüssigkeitsströme entscheiden zu können. Denn die Existenz dieser Ströme in der Nähe fester Wandungen dürfte nach den Beobachtungen *Quincke's* nicht bezweifelt werden. Die Frage, um welche es sich handelt, ist nur die, ob ihre Intensität auch unter solchen Bedingungen eine für ihre Wahrnehmung genügende ist, wo das Strömen der Flüssigkeit (wie z. B. in weiteren Röhren) direct beobachtet werden kann, was bei den feinen Canälen poröser Scheidewände nur indirect möglich ist. Ob dann ferner die unter analogen kosmischen Verhältnissen erzeugten galvanischen Ströme hinreichende Intensität besitzen, um die an der Oberfläche der Erde beobachteten magnetischen Erscheinungen hervorzurufen, kann a priori (d. h. ohne besonders zu diesem Zwecke angestellte Versuche,) ebenso wenig endgültig entschieden werden, wie die Identität der Ursachen bei dem Knistern des geriebenen Bernsteins und dem vom Krachen des Donners begleiteten Blitzstrahl.

F. Zöllner, *Ueber das spectroskopische Reversionsfernrohr.*

(Mit einer Tafel.)

Vor einem Jahre hatte ich die Ehre, der Königlichen Gesellschaft die erfolgreiche Anwendung des früher von mir construirten Reversionsspectroskopes zur Beobachtung der Rotation der Sonne mitzutheilen. In dem Bestreben, das diesem Instrumente zu Grunde liegende und so ausserordentlich empfindliche Princip der Reversion der Spectra allgemein bei der Positionsbestimmung von Linien in die Spectralanalyse einzuführen, war ich bemüht, die Umstände, welche dem vor drei Jahren construirten Reversionsspectroskope[1]) nur eine beschränkte Anwendbarkeit gestatten, zu beseitigen. Es waren diese Umstände im Wesentlichen darin begründet, dass erstens die Anwendung von Prismen mit gerader Durchsicht unbedingt erforderlich war, und zweitens, die relative Verschiebung der beiden Spectra nur mit Hülfe der Verschiebung der beiden Objectivhälften des angewandten Fernrohres bewirkt werden konnte. Beides waren Bedingungen, durch welche die Anwendbarkeit des Princips jederzeit nur auf einen bestimmten und eng begrenzten Raum des Spectrums beschränkt bleiben musste. Durch die im Allgemeinen unveränderliche und feste Verbindung des leuchtenden Objectes (des Spaltes) mit dem Beobachtungsfernrohr ist man jedoch bei allen spectroskopischen Untersuchungen in den Stand gesetzt, die Reversion des ganzen oder getheilten Spectrums einfach durch ein Reversionsprisma mit tolaler Reflexion zu bewirken. Hierdurch ist gleichzeitig die relative Verschiebung der beiden Spectra an die Winkelveränderungen der Reflexionsebene zur optischen Axe des Collimators geknüpft, und somit die Verschiebbarkeit der beiden Objectivhälften parallel der Schnittfläche nicht mehr erforderlich. Die Winkelveränderungen

1) Diese Berichte, Sitzung vom 6. Februar 1869.

der total reflectirenden Prismenfläche können in doppelter Weise bewirkt werden, entweder durch eine mikrometrische Bewegung des Prisma's allein, oder durch eine Bewegung des ganzen, mit dem Prisma verbundenen, Beobachtungsfernrohres. Es dürfte im Allgemeinen zweckmässig sein, beide Bewegungen zu vereinigen, so dass die erstere mikrometrisch für Differentialbestimmungen, die zweite für Positionsbestimmungen aller Linien des Spectrums mit Hülfe von Index und Gradbogen ausführbar ist.

Das Reflexionsprisma kann im Wesentlichen an zwei verschiedenen Stellen des Beobachtungsfernrohres angebracht werden, nämlich entweder am Objectiv oder am Ocular.

Die Vortheile, welche sich den besonderen Zwecken entsprechend bei Anwendung der einen oder andern Construction darbieten, habe ich a. a. O. erörtert.

Ich erlaube mir gegenwärtig ein vollständig ausgeführtes Exemplar eines spectroskopischen Fernrohrs mit Reversions-Objectiv vorzulegen, und gleichzeitig Messungen mitzutheilen, welche mit Anwendung eines Reversions-Oculars an einem andern, von Herrn *Merz* nach meinen Angaben ausgeführtem Spectroskope erhalten worden sind.

Das Fernrohr mit Reversions-Objectiv ist in beistehender Zeichnung (Fig. 1.) in $^1/_3$ seiner natürlichen Grösse abgebildet.

Das Fernrohr *A* enthält bei *B* die durch die Schraube *C* senkrecht zur Schnittfläche beweglichen Objectiv-Hälften. Durch diese Bewegung ist man im Stande, die beiden Spectra beliebig übereinandergreifen oder scharf, wie Nonius und Maassstab, nebeneinander erscheinen zu lassen; sie gestattet zu diesem Zwecke nur die beiden Objectiv-Hälften mehr oder weniger von einander zu entfernen und nicht, wie früher, parallel den Schnittflächen nach Art der Heliometer mikrometrisch zu verschieben.

In dem Behälter *E* ist das Reflexions-Prisma angebracht, welches vor der einen Objectiv-Hälfte durch die Schraube *F* beweglich ist. Die Schraube *G* gestattet das ganze Fernrohr um die Axe *K* zu bewegen, und bewirkt hierdurch, wie oben bemerkt, die relative Verschiebung der beiden Spectra. Die Grösse dieser Winkelbewegung kann an einem getheilten Gradbogen *H* mit Hülfe der Lupe *L* abgelesen werden.

Bei *I* treten die Strahlen aus dem Prismensysteme in das Fernrohr; mit Hülfe des Schraubengewindes *M* kann das

beschriebene Instrument mit jedem Spectralapparate in Verbindung gesetzt werden; es lässt sich dasselbe behufs der Justirung der brechenden Kanten des zerstreuenden und reflectirenden Prisma's (E) vermittelst des ringförmigen Ansatzes I um seine Längsaxe drehen.

Das *Merz*'sche Spectroskop enthält zwei Prismensysteme mit gerader Durchsicht, welche einzeln oder combinirt angewandt werden können. Da bei der gewöhnlichen Einrichtung derartiger Spectroskope der Collimator jederzeit fest und unveränderlich mit dem Prismensatze verbunden ist, so ist man bei der starken Zestreuung der angewandten Prismen nur auf einen verhältnissmässig geringen Theil des Spectrums beschränkt. Ich schlug daher Herrn *Merz* vor, diesem Uebelstande dadurch abzuhelfen, dass auch das Collimator-Fernrohr in ähnlicher Weise beweglich und seine Lage durch Index und Gradbogen controlirbar gemacht wird, wie dies beim Beobachtungsfernrohr geschieht. Es erwies sich diese Abänderung, welche ich schon früher bei den hier angefertigten Spectroskopen hatte anbringen lassen, vollkommen dem Zwecke entsprechend. Es dient alsdann selbstverständlich der Gradbogen am Collimator nicht zum Messen sondern nur als Marke für die einem bestimmten Orte des Spectrums am besten entsprechende Stellung des Collimators.

Die Grösse der Zerstreuung und die Klarheit der Bilder bei dem für mich angefertigten und mir kürzlich aus München zugesandten Spectroskope ist so bedeutend, dass man zwischen den beiden Natronlinien im Sonnenspectrum ausser der Nickellinie noch deutlich eine feinere, brechbarere Linie erblickt, und zwar bei höchstem Stande der Sonne.

Die Verwandlung in ein Reversionsspectroskop wird bei diesem Instrumente einfach dadurch bewirkt, dass der Oculardeckel mit einem anderen vertauscht wird, welcher auf seiner inneren Seite ein kleines, die Ocularöffnung gerade zur Hälfte verdeckendes Reflexionsprisma enthält. Die reflectirende Fläche steht parallel der optischen Axe des Instrumentes und bewirkt hierdurch bei gleichzeitigem Parallelismus mit den brechenden Kanten der Zerstreuungsprismen eine partielle Umkehrung des Spectrums. Richtet man das mit einem solchen Reversionsoculare versehene Instrument auf eine mit Natron imprägnirte Kerzenflamme, so erblickt man zwei theilweise übereinandergreifende Spectra, die sich durch mikrometrische Bewegung des

Beobachtungsfernrohres in entgegengesetztem Sinne verschieben, und eine ausserordentlich genaue Beobachtung der Coïncidenz homologer Linien gestatten. Um auch bei Beobachtung der dunklen Linien im Sonnenspectrum das erwähnte theilweise Uebereinandergreifen der beiden Spectra zu bewirken, ist es erforderlich, ebenfalls divergente Strahlen auf den Spalt fallen zu lassen. Befindet sich daher das Spectroskop nicht in Verbindung mit einem Fernrohre, wo dann bei Coïncidenz der Spaltebene mit dem optischen Bilde der Sonne der erwähnten Bedingung von selbst genügt ist, so reicht eine kleine Linse von kurzer Brennweite aus, welche vor dem Spalte befestigt den Sonnenstrahlen die erforderliche Eigenschaft ertheilt.

Figur 2 auf beistehender Tafel versinnlicht den Eindruck, welchen die beiden Natronlinien mit Anwendung des stärksten Oculars in dem beschriebenen Spectoskope machen; mit n ist die Nickellinie, mit x die oben erwähnte schwächere Linie bezeichnet.

Um eine Vorstellung von der grossen Genauigkeit zu geben, welche man mit Anwendung des Reversionsprisma's bei Positionsbestimmungen von Linien erzielt, erlaube ich mir beifolgend eine Anzahl von Messungen über den Abstand der Natronlinien (a b) und der beiden andern, dazwischen befindlichen, Linien zu geben. Die angegebenen Zahlen sind Theile des Schrauben-Umfanges, wobei zu bemerken ist, dass für diese Messungen das Gewinde noch nicht fein genug war, indem die Zehntel der angegebenen Werthe geschätzt werden mussten. Die bei den Messungen zur Coïncidenz gebrachten Linien sind durch die über jeder Columne zusammengestellten Buchstaben bezeichnet.

1. Reihe.				2. Reihe.			
aa_1	bb_1	$bb_1 - aa_1$	$\frac{1}{2}(bb_1 - aa_1)$	aa_1	an_1	ax_1	ab_1
25.7	31.6	5.9	2.95	26.0	27.4	28.0	29.0
25.7	31.7	6.0	3.00	26.0	27.5	28.0	29.1
25.8	31.7	5.9	2.95	26.0	27.6	28.1	29.0
25.9	31.8	5.9	2.95	26.1	27.6	28.1	29.1
25.9	31.8	5.9	2.95	26.1	27.6	28.1	29.1
26.0	31.8	5.8	2.90	26.2	27.5	28.1	29.1
25.9	31.8	5.9	2.95	26.2	27.6	28.2	29.0
25.8	31.9	6.1	3.05	26.2	27.7	28.1	29.1
26.0	31.9	5.9	2.95	26.1	27.5	28.2	29.1
25.9	31.9	6.0	3.00	26.2	27.5	28.1	29.0
		Mittel:	2.965 ± 0.009	26.11	27.55	28.10	29.06

Wie man sieht ist die Empfindlichkeit der Messungen eine ausserordentlich grosse und berechtigt bei der schnellen Vervollkommung der spectroskopischen Instrumente wohl zu der Hoffnung, dass meine Bemühungen, die Rotation der Erde in ähnlicher Weise durch Verschiebung von Linien im Sonnenspectrum nachzuweisen, wie dies bereits in befriedigender Weise durch die Beobachtungen *Vogel's* bezüglich der Rotation des Sonnenkörpers geschehen ist[1], in nicht allzu langer Zeit von Erfolg begleitet sein werden. Denn ein Punkt des Äquators bewegt sich beim Aufgange der Sonne mit einer Geschwindigkeit von ungefähr $\frac{1}{16}$ geogr. Meile auf dieselbe zu, beim Untergange um dieselbe Grösse von derselben fort, so dass vermöge der Rotation ein Punkt des Äquators innerhalb 24 Stunden in seiner relativen Bewegung zur Sonne eine Geschwindigkeitsänderung von ca. $\frac{1}{8}$ Meile erfährt. Diese Grösse würde aber bereits die Position der Natronlinien um $\frac{1}{160}$ ihres Abstandes verändern, und daher mit Hülfe des Reversionsprisma's auf $\frac{1}{300}$ des wahrgenommenen Abstandes steigen. Da nun der oben aus 10 Beobachtungen abgeleitete Mittelwerth bereits nur einen wahrscheinlichen Fehler von $\frac{1}{329}$ des besagten Abstandes zeigt, so mag man hieraus ersehen, wie nahe die erfolgreiche Lösung des gestellten Problems bereits gerückt. Eine wie grosse Wichtigkeit diese Bestimmungen für die Ermittelung der Lichtgeschwindigkeit und durch ihre Verbindung mit der Aberrationsconstante für die Ermittelung der Sonnenparallaxe gewinnen können, lässt sich a priori nicht bemessen und hängt ganz von der fortschreitenden Verbesserung der spectroskopischen Instrumente ab.

Bezüglich der allgemeinen und leichten Anwendbarkeit des Reversionsprincipes bei spectrometrischen Untersuchungen erlaube ich mir schliesslich die Mittheilung zu machen, dass es mir gelungen ist, durch Combination zweier Reflexionsprismen, die unmittelbar hinter dem Oculardeckel angebracht sind, ein Reversionsocular zu construiren, welches auch die oben geforderte Bedingung einer scharfen Uebereinanderlagerung der beiden Spectra in vollkommener Weise erfüllt. Die reflectirenden Hypotenusenflächen der Prismen sind einfach senkrecht

---

1) Vergl. diese Berichte, Sitzung am 1. Juli 1871 und: »Beobachtungen angestellt auf der Sternwarte des Kammerherrn *von Bülow* zu *Bothkamp* von Dr. *H. C. Vogel*, Astronom der Sternwarte«. Leipzig (*Engelmann*) 1872.

zu einander gestellt und zwar die eine parallel der Breite, die andere parallel der Länge des Spectrums. Die eine Hälfte der Ocularöffnung wird durch Licht aus dem ersten, die andere durch Licht aus dem zweiten Prisma gespeist, so dass das erste Prisma die R e v e r s i o n, das andere bei entsprechender Neigung der Reflexionsebene die J u x t a p o s i t i o n des (bezüglich der Farbenordnung) u n v e r ä n d e r t e n Spectrums bewerkstelligt. Die Wirkung dieses Oculars ist eine überraschende; wird dasselbe z. B. mit einem kleinen *Browning*'schen Miniaturspectroskope in Verbindung gesetzt, so ist dasselbe sofort in einen Messapparat verwandelt, welcher durch mikrometrische Bewegung des Reversionsprisma's die Positionsbestimmung der Spectrallinien durch Coïncidenzen mit aller bei einem so compendiösen Instrumente nur wünschenswerthen Empfindlichkeit gestattet.

Sobald eine genügende Anzahl von Messungen vorliegt, die nach dieser Methode an Sternspectren ausgeführt sind, werde ich mir erlauben, der Königlichen Gesellschaft die Ergebnisse meiner Beobachtungen mitzutheilen.

Fig. 1.

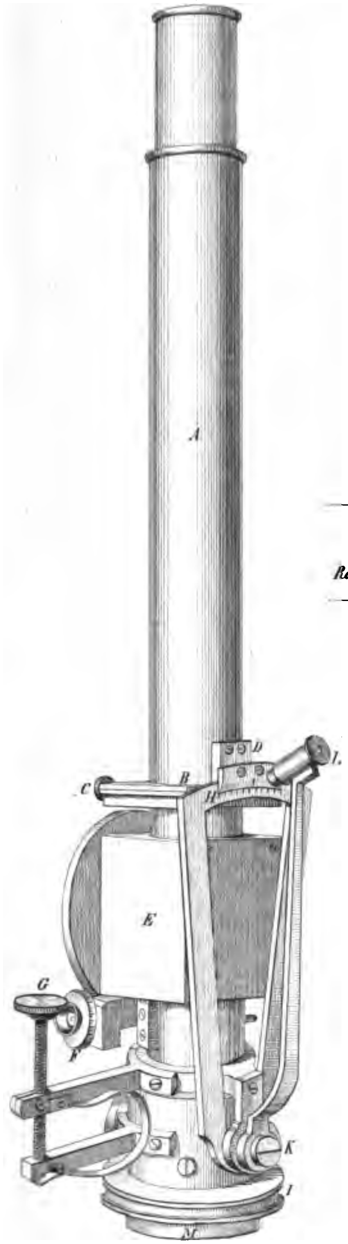
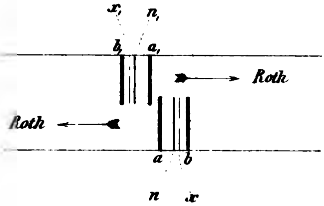


Fig. 2.



Berichte d. K. S. Ges. d. Wiss. math. phys. Cl. 1872.
Zur Abhandlung v. F. Zöllner.

H. C. Vogel, *Ueber die Absorption der chemisch wirksamen Strahlen in der Atmosphäre der Sonne*, vorgelegt von *F. Zöllner*.

Die Abschwächung des Lichtes nach den Rändern der Sonnenscheibe, durch die Absorption der die Sonne umgebenden Atmosphäre hervorgebracht, ist schon von *Bouguer* beobachtet und durch photometrische Messungen das Verhältniss der Helligkeit eines um $\frac{3}{4}$ des Halbmessers von der Mitte der Scheibe befindlichen Punktes, zu der im Mittelpunkt vorhandenen Helligkeit, zu $\frac{35}{48}$ bestimmt worden. Aus neuerer Zeit finden sich einige dahin schlagende Beobachtungen von *Secchi*[1]) und *Liais*[2]) vor. *Secchi* hat die Beobachtungen noch dahin erweitert, dass er die Absorption welche die Sonnenatmosphäre auf Wärmestrahlen ausübt zu bestimmen suchte.

Es dürfte gewiss von Interesse sein die Beobachtungen auch auf die chemisch wirksamsten, stärker brechbaren Strahlen auszudehnen. Obgleich nun ein jedes photographische Bild der Sonne eine sehr starke Lichtabnahme von der Mitte der Sonnenscheibe nach dem Rande hin erkennen lässt, ist es bisher nicht gelungen, die absorbirende Wirkung der Sonnenatmosphäre für chemische Strahlen, durch Intensitätsmessungen an verschiedenen Punkten der Sonnenoberfläche zu bestimmen. Ich habe mich um die Lösung dieser Aufgabe bemüht und erlaube mir in Folgendem meine zu dem Zwecke angestellten Beobachtungen mitzutheilen.

Die Lichtstärke durch photographische Schwärzungen in allgemein vergleichbarem Maasse auszudrücken, ist schon von

---

1) *Le Soleil* pag. 121 u. f.

2) *Liais. Sur l'intensité relative de la lumière dans les divers points du disque du soleil. Mém. de Cherbourg* XII 1866 p. 277—342.

Herschel[1]), *Claudet*[2]) und Anderen versucht worden, allein die Versuche scheiterten daran, dass es nicht gelingen wollte eine photographische Schicht von stets gleicher Empfindlichkeit herzustellen und einen nach bestimmten Gesetzen erfolgenden Zusammenhang zwischen Schwärzung der lichtempfindlichen Schicht, Dauer der Exposition und Lichtstärke ausfindig zu machen. Die photochemischen Untersuchungen von *Bunsen* und *Roscoe*[3]) haben sogar dargethan, dass bei Anwendung photographischen Papiers zwischen der wirkenden Lichtintensität und der dadurch in gleicher Zeit erzeugten Schwärzung keine Proportionalität bestehe. Ihre mit grosser Sorgfalt angestellten Beobachtungen ergaben aber: »dass innerhalb sehr weiter Grenzen, gleiche Producten aus Lichtintensität und Insolationsdauer, gleichen Schwärzungen auf Chlorsilberpapier entsprechen«, also bei gleichen Schwärzungen die Gleichung $It = I_1 t_1$ (wenn man mit I die Lichtintensität, mit t die Insolationsdauer bezeichnet) bestehe. Erst mit der Auffindung dieses wichtigen Satzes ist der Weg gegeben, mittelst einfacher Beobachtungen chemische Lichtwirkungen in allgemein vergleichbarem Maasse auszudrücken.

Da sich die Beobachtungen von *Bunsen* und *Roscoe* nur auf Chlorsilber-Papier beziehen, für Photographien auf Collodium aber nicht in aller Strenge gültig bleiben, weil bei dem Collodiumverfahren, durch das sogenannte Hervorrufen des Bildes, wie jedem Photographen bekannt, die relativen Verhältnisse der Schwärzung innerhalb gewisser Grenzen verändert werden können, habe ich zum Zwecke der Messung der Lichtintensitäten für verschiedene Punkte der Sonnenscheibe, Sonnenphotographien direct auf Chlorsilber-Papier ausgeführt.

Das sorgfältig bereitete Papier wurde auf einer Glasplatte aufgespannt und so in der am Fernrohr befestigten Camera exponirt. Am 8. März 1872 wurden zwei Sonnenbilder angefertigt, das erste war 30 Secunden, das zweite 40 Secunden exponirt. Der Durchmesser der Bilder betrug 108^{mm}, die Abstufung des Lichtes nach dem Rande der Scheibe, war auf beiden Bildern deutlich zu erkennen. Auf einer auf photographischem Wege

1) *Phil. Trans.* 1840 pag. 46.
2) *London Phil. Magazin* 3. Ser. Tom. 33. pag. 329.
3) *Pogg. Ann.* CXVII. pag. 529 u. f.

hergestellten Scala, wurden nun für verschiedene Punkte des photographischen Sonnenbildes, Punkte gleicher Schwärzung aufgesucht[1].

Da bei der Anfertigung der Scala die Intensität des Lichtes i constant anzunehmen ist, ebenso die Expositionszeit t bei einem Sonnenbilde für alle Punkte des Bildes dieselbe war, so hat man, wenn I_0 die Intensität des Lichtes in der Mitte der Sonnenscheibe, I_1 die in einem anderen Punkte befindliche Intensität bedeutet:

$$I_0\, t = i\, t_1$$
$$I_1\, t = i\, t_2$$

Die Intensitäten I_0 und I_1 werden sich demnach im vorliegenden Falle wie die, der betreffenden Schwärzung der Scala entsprechenden Zeiten t_1 und t_2 verhalten.

Die recht gut übereinstimmenden Beobachtungen sind im Folgenden zusammengestellt, es sind dabei der leichteren Vergleichung wegen, die sich direct ergebenden Zahlen, in dem Verhältniss verändert worden, dass bei beiden Bildern für die Intensität des Lichtes im Mittelpunkt der Scheibe, die Zahl 100 resultirt.

Entfernung vom Mittelpunkt. Radius = 54.	Intensitäten. 1. Bild.	2. Bild.
0	100.0[2]	100.0
4	100.0	99.0
8	—	97.9
9	99.0	—
11	98.9	—
12	—	100.0
13	97.9	—
15	97.9	—
16	—	95.8
17	95.6	—

1) Ich halte es für überflüssig, eingehendere Beschreibung über die Art und Weise, wie die Anfertigung der Scala und die Vergleichung derselben mit dem Sonnenbilde ausgeführt wurde, zu geben, da das Verfahren dem von *Bunsen* und *Roscoe* angewandten und in ihren »photochemischen Untersuchungen« genau beschriebenen, im Wesentlichen gleich war.

2) Bei den Beobachtungen wurden die den Intensitäten entsprechenden Zahlen nur durch ganze Zahlen ausgedrückt, die hier angesetzten Decimalen sind bei der Reduction entstanden.

Entfernung vom Mittelpunkt. Radius = 54.	Intensitäten. 1. Bild.	2. Bild.
19	95.6	—
20	—	95.0
21	93.4	—
23	93.4	—
24	—	90.1
25	93.3	—
27	90.4	—
28	—	85.1
29	85.9	—
31	83.7	—
32	—	84.5
33	78.5	—
35	77.2	—
36	—	78.1
37	75.0	—
39	68.8	—
40	—	67.7
41	64.6	—
43	60.3	—
44	—	56.4
45	53.1	—
46	—	48.4
47	45.8	—
48	—	41.5
49	37.3	—
50	—	25.8
51	29.8	—
52	—	18.0
53	15.9	10.1
53.5	10.7	—

Am 13. März wurden die Versuche wiederholt und ebenfalls zwei auf Glasplatten aufgezogene Papiere 30ˢ resp. 40ˢ exponirt. Die hier folgenden Zahlen, sind Mittelwerthe aus 4 Beobachtungen. Auf jeder Platte wurden nämlich die Intensitäten für Punkte bestimmt, die gleichweit von der Mitte entfernt und auf senkrecht zu einander stehenden Durchmessern gelegen waren.

Entfernung vom Mittelpunkt. Radius = 54.	Intensitäten.
0	100.0
4	100.0
14	98.9
24	94.3
34	78.5
40	70.0
45	53.9
47	40.0
49	32.6
51	28.6
53	18.7

In den ersten Tagen des Mai wurden zahlreiche Beobachtungen von kleineren im Brennpunkte des grossen Aequatoreals angefertigte Sonnenphotographien ausgeführt, welche einen Durchmesser von nur 45.4 Millim. hatten. Um die Beobachtungen mit den soeben mitgetheilten, an vergrösserten Sonnenphotographien angestellten, vergleichen zu können, habe ich in der folgenden Zusammenstellung den Radius dieser kleinen Photographien ebenfalls = 54 gesetzt und mussten daher die ursprünglich in Millimeter ausgedrückten Entfernungen von der Mitte, im Verhältniss 22.7 : 54 vergrössert werden, um sie auf den neuen Maassstab zu reduciren. Die hier aufgeführten Intensitäten, sind Mittelwerthe aus 8 Beobachtungen an 6 Photographien.

Entfernung vom Mittelpunkt. Radius = 54.	Intensitäten.
0.0	100.0
11.9	98.3
23.8	93.0
35.7	78.0
47.6	49.9
51.6	22.0
52.8	14.5

Auch noch eine vergrösserte Sonnenphotographie wurde am 5. Mai angefertigt und für symmetrisch von der Mitte auf einem Durchmesser gelegene Punkte, die relativen Helligkeiten im Vergleich zum Mittelpunkt bestimmt. Der Durchmesser der Photographien betrug 102.9 Millimeter. Es wurde die Vergleichung

mit zwei zu verschiedenen Zeiten angefertigten Scalen vorgenommen.

Entfernung vom Mittelpunkt. Radius = 54.	Intensitäten. Scala 1.	Scala 2.
0.0	100.0	100.0
10.5	98.4	99.0
21.0	90.0	94.1
31.5	84.3	86.3
41.9	65.9	68.3
47.2	49.0	48.0
52.5	28.1	30.7
53.5	18.8	19.5

An mehreren grösseren Sonnenflecken auf dieser Photographie, habe ich noch das relative Helligkeitsverhältniss zwischen Fleck, Penumbra und den nächstliegenden Theilen der Sonnenoberfläche zu bestimmen gesucht. Im Mittel aus mehreren Beobachtungen ergab sich das Helligkeitsverhältniss der Kernflecke zu den nächstliegenden Theilen der Sonne zu 0.067, das der Penumbra dagegen zu 0.630 [1]).

Werden die Entfernungen vom Mittelpunkt als Abscissen, die zugehörenden, aus obigen Beobachtungen resultirenden Intensitäten, als Ordinaten aufgetragen, so stellt die, durch die so bestimmten Punkte gehende Curve, die Abnahme der Intensitäten von der Mitte der Sonnenscheibe nach dem Rande hin dar. Die Ordinaten *I*, der sich den Beobachtungen am Besten anschliessenden Curve, sind für die Entfernungen *E* vom Mittelpunkte der Sonnenscheibe, wie folgt bestimmt worden:

$E = \sin\theta$. Radius = 12.	θ.	*I*.
0	0° 0′.0	100.0
1	4 46.8	100.0
2	9 35.7	99.4
3	14 28.6	98.2
4	19 28.3	96.4
5	24 37.5	93.7

1) Die Beobachtungen sind nur als vorläufige zu betrachten und sollen, sobald sich grosse Sonnenflecken zeigen, wiederholt werden. *Liais* (a. a. O. pag. 326) bestimmt für Strahlen mittlerer Brechbarkeit das Helligkeitsverhältniss der Penumbra zu den nächstliegenden Theilen der Sonnenoberfläche zu 0.5, das der Kernflecke aber zu 0.01.

$E = \sin\theta$ Radius = 12.	θ.	I.
6	30° 0'.0	89.8
7	35 41.2	84.5
8	41 48.6	77.0
9	48 35.4	66.0
10	56 26.6	51.0
11	66 26.6	33.0
12	90 0.0	13.5

Vergleicht man die vorstehenden Beobachtungen mit denen von *Liais*, *Secchi* und Anderen, für die weniger brechbaren Strahlen (d. h. der optisch wirksamsten und der Wärmestrahlen) so zeigt sich, dass die Absorption für die chemischen Strahlen in der Sonnenatmosphäre eine beträchtlich stärkere ist.

Würden diese Untersuchungen über die Abnahme der Intensität der Licht- und Wärmestrahlen nach dem Rande der Sonnenscheibe hin, für homogene Strahlen ausgeführt, so liessen sich an solche Messungen interessante Discussionen über die Constitution der Sonnenatmosphäre knüpfen.

Prof. **Schwalbe,** *Ueber Lymphbahnen der Netzhaut und des Glaskörpers.* Aus dem phys. Institute, vorgelegt von dem wirkl. Mitgliede *C. Ludwig.*

His beschrieb in der Netzhaut als Lymphbahnen sogenannte perivasculäre Kanäle welche Venen und Kapillaren nach Art von Scheiden vollständig umgeben, während die Arterien wahrscheinlich nur streifenweise von ihnen begleitet werden. Er gelangte zu diesem Resultate durch forcirte Injection der Blutgefässe, in Folge deren die Gefässwand einriss und die Injectionsmasse sich in den Lymphscheiden verbreitete. — Verf. schlug bei seinen Untersuchungen über die Lymphbahnen der Retina ein anderes Verfahren ein. Es wurde der Opticusstamm unterbunden und zwischen der Unterbindungsstelle und dem Augapfel eine feine Stichkanüle vorsichtig unter die innere Scheide des Sehnerven geführt. Die in dieser Weise an ganz frischen Schaf- und Schweinsaugen ausgeführten Einstich-Injectionen (als Injectionsmasse diente entweder durch Alkannin gefärbtes Terpentinöl oder in Wasser gelöstes Berliner Blau) ergeben constant eine Füllung perivasculärer Räume der Retina und zwar zeigten sich nur Venen und Kapillaren mit solchen Scheiden umgeben; dem Verlaufe der Arterien entsprechend waren nie Gefässbahnen gefüllt. Die Injectionsmasse ist in den perivasculären Räumen nur noch durch ein einfaches Endothelrohr vom Gefässlumen getrennt. Ausser in diesen Kanälen breitet sich zweitens die injicirte Flüssigkeit von der Papilla n. optici her etwa 4^{mm} weit in der Opticusfaserschicht der Retina strahlenförmig zwischen den einzelnen Sehnervenfaserbündeln aus, sodass dadurch eine höchst zierliche Strahlenfigur entsteht. Man findet hier in den von der farbigen Masse gefüllten Spalten, den Nervenfaserbündeln anhaftend, zahlreiche platte Zellen, Endothelzellen gleichend. Ferner wird bei dem genannten Verfahren ein Eindringen der Injec-

tionsmasse zwischen Glaskörper und Limitans retinae beobachtet und endlich gelingt es nicht selten den Centralkanal des Glaskörpers gleichzeitig mit den genannten Bahnen zu füllen. Da nun bei dem beschriebenen Versuche die injicirte Flüssigkeit durch zahlreiche feine Öffnungen auf der Oberfläche der innern Sehnervenscheide hervortritt und so in den intervaginalen Raum, einen anerkannten Lymphraum, gelangt, ist der Zusammenhang der im Glaskörper und in der Retina injicirten Gefässe mit dem Lymphgefässsystem nachgewiesen, und zwar wird die Verbindung vermittelt durch ein reichliches Spaltensystem, welches überall die Nervenfaserbündel innerhalb des Sehnervenstammes umgibt und bei dem genannten Verfahren äusserst leicht in grosser Ausdehnung sich füllt. Es hängt in der Papilla optici mit den erwähnten Lymphräumen der Retina und des Glaskörpers direct zusammen, während es andrerseits durch zahlreiche Öffnungen in der inneren Opticusscheide in den intervaginalen Lymphraum mündet. — Schliesslich sei noch erwähnt, dass sehr häufig bei den beschriebenen Injectionen auch Masse zwischen Retina und Pigmentepithel in der Umgebung des Opticus gefunden wird, und zwar an ganz frischen Augen und bei Injection von Alkannin-Terpentin. Es entsteht dadurch das Bild einer Netzhautablösung. An frischen gefrorenen Augen war in Übereinstimmung hiermit constant ein Eisscheibchen zwischen Netzhaut und Pigmentepithel zu finden.

SITZUNG AM 3. AUGUST 1872.

Carl Neumann, *Ueber das Elementargesetz derjenigen elektromotorischen Kräfte, welche in einem gegebenen Conductor hervorgebracht werden durch elektrische Ströme, sei es, dass diese Ströme in demselben Conductor, sei es dass sie in irgend einem andern gegen jenen sich bewegenden Conductor stattfinden.* *)

Die Kräfte, welche im Vorhandensein elektrischer Ströme ihren Grund haben, oder durch solche Ströme hervorgerufen werden, können, und zwar ihrer *Wirkungsweise* nach, in zwei Kategorien gebracht werden, in ponderomotorische und elektromotorische. Die ersteren sind diejenigen, in Folge deren die ponderablen Träger der Ströme bald anziehend bald abstossend auf einander einwirken, die letzteren diejenigen, denen die sogenannten inducirten elektrischen Ströme ihre Entstehung verdanken. Diese beiderlei Gattungen von Kräften sind beinahe die *einzigen*, welche im Folgenden betrachtet werden, und können daher häufig kurzweg bezeichnet werden als die *ponderomotorischen* und *elektromotorischen* Kräfte. Ausserdem mag der in einem Drahte vorhandene elektrische Strom *gleichförmig* oder *ungleichförmig* genannt werden, jenachdem die Stromstärke *nur* eine Function der Zeit, oder aber eine Function von Zeit und Bogenlänge ist.

§. 1.
Ueber die Frage, ob für die Elemente elektrischer Ströme ein Potential existiren kann.

Sind A und B zwei Drahtringe, welche durchflossen sind von *gleichförmigen* elektrischen Strömen J_0 und J_1, so wird das

*) Das Manuscript wurde während der Sitzung eingereicht.

Potential P der beiden Stromringe aufeinander — nach der von meinem Vater gegebenen Definition — dargestellt sein durch

$$(1.)\quad P = -A^2 J_0 J_1 \Sigma\Sigma \left(\frac{1+k}{2}\frac{\cos\varepsilon}{r} + \frac{1-k}{2}\frac{\cos\vartheta_0 \cos\vartheta_1}{r}\right) Ds_0\, Ds_1$$

die Integration $\Sigma\Sigma$ ausgedehnt gedacht über alle Elemente Ds_0 und Ds_1 der beiden Ringe. Dabei bezeichnet r die gegenseitige Entfernung der Elemente Ds_0, Ds_1; ferner haben ε, ϑ_0, ϑ_1 die bekannten Bedeutungen:

$$\varepsilon = (Ds_0, Ds_1), \quad \vartheta_0 = (Ds_0, r), \quad \vartheta_1 = (Ds_1, r),$$

wo die *Richtung* r gerechnet sein soll von Ds_1 nach Ds_0 hin. Endlich repräsentiren A^2 und k zwei Constanten, von denen die letztere *ad libitum* gewählt werden darf, weil das Integral

$$\Sigma\Sigma \left(\frac{\cos\varepsilon}{r} - \frac{\cos\vartheta_0 \cos\vartheta_1}{r}\right) Ds_0\, Ds_1$$

jederzeit *Null* ist, wie beschaffen die beiden Ringe hinsichtlich ihrer Form und relativen Lage auch sein mögen. Alsdann gilt folgender Satz:

Befinden sich die Stromringe A, B in beliebiger Bewegung, so wird die während eines Zeitelementes dt von B auf A ausgeübte ponderomotorische Arbeit dS_A^B dargestellt sein durch:

$$(2.)\quad dS_A^B = -\left(\frac{\partial P}{\partial \pi} d\pi + \frac{\partial P}{\partial \pi'} d\pi' + \ldots\right),$$

vorausgesetzt, dass man unter π, π', ... irgend welche Parameter versteht, durch deren Werthe die räumliche Lage des Ringes A in jedem Augenblick sich bestimmt mit Bezug auf ein absolut unbewegliches Axensystem.

Oder kürzer ausgedrückt: *Für jedes Zeitelement ist die vom Ringe B auf den Ring A ausgeübte ponderomotorische Arbeit gleich dem negativen partiellen Zuwachs des Potentials P, genommen nach der räumlichen Lage von A.*

Dieser Satz ist durch eine leichte Verallgemeinerung aus denjenigen Sätzen hervorgegangen, welche von meinem Vater aufgestellt worden sind, speciell mit Bezug auf *parallel fortschreitende* oder *drehende* Bewegungen.

Das Potential P (1.) kann so dargestellt werden:

$$(3.)\quad P = \Sigma\Sigma p\, Ds_0\, Ds_1,$$

wo alsdann p definirt ist durch die Formel:

$$(4.)\quad p\, Ds_0\, Ds_1 = -A^2 J_0 J_1 \left(\frac{1+k}{2}\frac{\cos\varepsilon}{r} + \frac{1-k}{2}\frac{\cos\vartheta_0 \cos\vartheta_1}{r}\right) Ds_0\, Ds_1.$$

Andererseits kann die Arbeit dS_A^B dargestellt werden durch:

$$(5.)\qquad dS_A^B = \Sigma\Sigma\, dS_0^1,$$

wo alsdann dS_0^1 diejenige Arbeit vorstellt, welche ein *einzelnes* Element Ds_1 des Ringes B ausübt auf ein *einzelnes* Element Ds_0 des Ringes A.

Durch Substitution der Werthe (3.), (5.) gewinnt der oben genannte in (2.) enthaltene allgemeine Satz folgende Gestalt:

$$(6.)\qquad \Sigma\Sigma\, dS_0^1 = -\Sigma\Sigma\left(\frac{\partial p}{\partial \pi}\, d\pi + \frac{\partial p}{\partial \pi'}\, d\pi' + \dots\right) Ds_0\, Ds_1.$$

Die von B auf A ausgeübte Arbeit ist also — können wir sagen — von solcher Beschaffenheit, als *würde* von jedem einzelnen Element Ds_1 auf jedes einzelne Element Ds_0 eine Arbeit dS_0^1 ausgeübt von dem Werthe:

$$(7.)\qquad dS_0^1 = -\left(\frac{\partial p}{\partial \pi}\, d\pi + \frac{\partial p}{\partial \pi'}\, d\pi' + \dots\right) Ds_0\, Ds_1,$$

$$= -\left(\frac{\partial\,(p\, Ds_0\, Ds_1)}{\partial \pi}\, d\pi + \frac{\partial\,(p\, Ds_0\, Ds_1)}{\partial \pi'}\, d\pi' + \dots\right).$$

Jene frühere Formel (2.) ist zu bezeichnen als ein für zwei gleichförmige Stromringe gültiges *Integralgesetz*; andererseits wird die Formel (7.) zu charakterisiren sein als ein aus diesem Integralgesetz, durch Repartirung auf die einzelnen Elementenpaare, sich ergebendes *Elementargesetz*.

Selbstverständlich ist ein solcher Process der Repartirung vom mathematischen Standpuncte aus völlig unberechtigt, ebenso unberechtigt, als wollte man aus einer gegebenen Gleichung $a + b = \alpha + \beta$ den Schluss ziehen, dass $a = \alpha$ und $b = \beta$ sein müsse. Auch würde die Formel (7.) ein Elementargesetz repräsentiren, welches, wie leicht zu übersehen, mit dem *Ampère*'schen Elementargesetz in Widerspruch steht.

Doch könnte man die Dinge von einem *andern* Standpuncte aus betrachten. Man könnte nämlich behaupten, wirklich durch Erfahrung constatirt sei das *Ampère*'sche Elementargetz keineswegs, sondern nur das aus diesem sich ergebende, durch (2.) angedeutete, Integralgesetz. Demgemäss habe *jedes andere* Elementargesetz, falls dasselbe nur ebenfalls hinleite zu jenem Integralgesetz (2.), *gleiche* Berechtigung wie das *Ampère*'sche. Der Acceptirung des durch (7.) ausgedrückten *neuen* Elementargesetzes an Stelle des *Ampère*'schen stünde also kein Bedenken entgegen;

überdiess falle zu seinen Gunsten noch der Umstand ins Gewicht, dass dasselbe, dem *Ampère*'schen gegenüber, den Vorzug habe, verträglich zu sein mit der Existenz eines *elementaren* Potentiales; denn dieses *neue* Elementargesetz (7.) einmal acceptirt, sei offenbar der Ausdruck $p\,Ds_0\,Ds_1$ nichts Anderes als das Potential zweier Elemente Ds_0 und Ds_1 aufeinander.

Auf solche Empfehlung hin mag nun das proponirte neue Elementargesetz (7.) in der That einer genaueren Betrachtung unterworfen werden. — Der Ausdruck $p\,Ds_0\,Ds_1$, (4.), ist abhängig von den *Orten*, zugleich aber auch von den *Richtungen* der Elemente Ds_0, Ds_1. Jenem neuen Elementargesetz (7.) zufolge ist daher die ponderomotorische Einwirkung dieser beiden Elemente auf einander von solcher Art, dass durch sie eine *gewisse* (nämlich von Null verschiedene) Arbeit z. B. auch dann verrichtet wird, wenn das eine Element fest aufgestellt, das andere aber in Umdrehung versetzt wird um seinen festgehaltenen Mittelpunct. Mit anderen Worten: Jenem Gesetze (7.) zufolge besteht die ponderomotorische Einwirkung zweier Stromelemente aufeinander nicht nur in gewöhnlichen promovirenden, sondern daneben noch in gewissen revolvirenden Kräften. [1])

Im höchsten Grade bedenklich müsste es wohl sein, wenn man irgend ein Elementargesetz adoptiren wollte, welches in Widerspruch steht mit dem allgemeinen Princip der Action und Reaction. Zu untersuchen ist daher, ob jene durch das Elementargesetz (7.) zwischen zwei elektrischen Stromelementen Ds_0, Ds_1 indicirten Promoventen und Revolventen den Anforderungen dieses Princips Genüge leisten, ob sie von solcher Beschaffenheit sind, dass zwischen ihren Wirkungen gegenseitige Zerstörung stattfindet, sobald die beiden Elemente starr mit einander verbunden gedacht werden. Eine derartige Untersuchung lässt sich leicht anstellen und führt zu folgendem Ergebniss:

Sollen die durch das neue Elementargesetz (7.) *zwischen irgend zwei elektrischen Stromelementen indicirten ponderomotorischen Promoventen und Revolventen dem allgemeinen Princip der*

---

1) Man unterscheidet zwischen translatorischen Kräften einerseits und zwischen Koppelkräften oder Drehungsmomenten andererseits. Es mag mir hier der Bequemlichkeit willen gestattet sein, die erstern als *promovirende Kräfte* oder kürzer als *Promoventen*, die letztern als *revolvirende Kräfte* oder kürzer als *Revolventen* zu bezeichnen.

Action und Reaction entsprechen, so ist erforderlich und ausreichend, dass der bisher unbestimmt gelassenen Constanten k der Werth + 1 zuerkannt werde. Die Constante k in dieser Weise einmal festgesetzt, gewinnen übrigens jene Promoventen und Revolventen eine sehr einfache Orientirung, indem die erstern zusammenfallen mit der Verbindungslinie r der betrachteten Elemente Ds_0, Ds_1, und die letztern senkrecht zu stehen kommen gegen die mit Ds_0, Ds_1 parallele Ebene. [1])

Der Annahme des Gesetzes (7.) scheint also kein Hinderniss entgegenzustehen. Würde doch auch die damit verbundene Fixirung der Constanten k in gutem Einklang stehen mit den Ansichten von *Helmholtz*. — Auf diese Ueberlegungen gestützt, hatte ich in der That zu Anfang des gegenwärtigen Jahres jenes neue *ponderomotorische* Elementargesetz (7.) in sorgfältigster Weise untersucht, und z. B. gefunden, dass demselben zur Seite gestellt werden kann ein nicht minder einfaches *elektromotorisches* Elementargesetz, und dass beide Gesetze zusammen genommen den Anforderungen des allgemeinen Axiomes der lebendigen Kraft in bester Weise entsprechen.

Da traten plötzlich, vor etwa drei bis vier Monaten, Hindernisse mir in den Weg, welche ich für unübersteiglich halte, und welche mich nöthigten, den mit Mühe gebahnten Weg vollständig zu verlassen.

Denkt man sich nämlich den Stromring A zusammengesetzt aus zwei Theilen, von denen der eine α drehbar ist um eine feste Axe MN, während der andere α' eine völlig feste Aufstellung besitzt, und andererseits den Stromring B ersetzt durch ein fest aufgestelltes Solenoid, dessen geometrische Axe zusammenfällt mit der Linie MN, so wird die *relative Lage* zwischen dem Theile α und zwischen dem Solenoid B, falls man jenen Theil α um die Linie MN in Umdrehung versetzt, fortwährend *dieselbe* bleiben. Die während irgend eines Zeitelementes dt dieser Umdrehung vom Solenoide B auf den *Theil* α ausgeübte ponderomotorische Arbeit $dS_\alpha{}^B$ hat, zufolge des neuen Elementargesetzes (7.) den Werth:

---

1) Darunter ist zu verstehen, dass die bekannten *geometrischen Charakteristiken* dieser Revolventen (oder Koppelkräfte) gegen die genannte Ebene senkrecht stehen, dass also die Ebenen dieser Revolventen (oder Koppelkräfte) jener genannten Ebene parallel sind.

(8.) $$dS_\alpha^B = -\frac{\partial(\Sigma\Sigma p\, Ds_0\, Ds_1)}{\partial\pi}\, d\pi,$$

falls man nämlich unter π den Umdrehungswinkel, unter $d\pi$ seinen Zuwachs während der Zeit dt versteht. Dabei ist im Ausdrucke

(9.) $$\Sigma\Sigma p\, Ds_0\, Ds_1$$

die Integration $\Sigma\Sigma$ ausgedehnt zu denken über alle Elemente Ds_0 des *Theiles* α, und über alle Elemente Ds_1 des Solenoides B. Die relative Lage zwischen α und B bleibt aber während der Umdrehung, wie schon bemerkt, beständig *dieselbe*, mithin der Werth des Integrales (9.) ebenfalls beständig *derselbe*. Somit folgt aus (8.) sofort, dass

(10.) $$dS_\alpha^B = 0$$

ist, dass also die vom Solenoide B auf den Theil α während seiner Umdrehung ausgeübte ponderomotorische Arbeit beständig *Null* ist, und dass mithin jener Theil α, falls er etwa zu Anfang in Ruhe sich befindet, trotz der Einwirkung des Solenoides beständig in Ruhe *bleiben* wird. Solches aber steht in directem Widerspruch mit bekannten empirischen Thatsachen.

Die Vorstellung, das Ampère'sche Elementargesetz dürfe oder müsse ersetzt werden durch jenes neue in (7.) genannte Elementargesetz, überhaupt die Vorstellung, für die den elektrischen Strömen eigenthümlichen ponderomotorischen Kräfte existire ein elementares Potential, — diese Vorstellungen brechen also zusammen unter dem Gewicht der empirischen Thatsachen.

Das Wort Potential kann allerdings in sehr verschiedenen Bedeutungen gebraucht werden; hiedurch ist geboten, das eben ausgesprochene Ergebniss etwas sorgfältiger zu formuliren, nämlich etwa in folgender Weise:

Für die ponderomotorischen Kräfte, welche zwei gleichförmige elektrische Stromringe auf einander ausüben, ist von meinem Vater ein Potential P eingeführt worden, welches die charakteristische Eigenschaft besitzt, durch seinen negativen partiellen Zuwachs nach der räumlichen Lage des einen Ringes jederzeit diejenige ponderomotorische Arbeit auszudrücken, welche dieser von Seiten des anderen Ringes erleidet. — Dass ein derselben Eigenschaft sich erfreuendes Potential auch existiren könne für irgend zwei einzelne Stromelemente, ist den empirischen Thatsachen gegenüber ein Ding der Unmöglichkeit.

Mit Bezug auf gewisse specielle Fälle wird allerdings der Anwendbarkeit eines solchen elementaren Potentials kein Hinderniss entgegenstehen. Doch wird ein solches Potential, eben *weil* seine Anwendbarkeit auf specielle Fälle eingeschränkt ist, niemals angesehen werden dürfen als der Ausdruck des *wirklichen* Elementargesetzes, sondern als der eines *scheinbaren*, welches in jenen speciellen Fällen mit dem wirklichen aequivalent ist.

§. 2.

Ueber diejenigen Untersuchungen, welche ihren Ausgang genommen haben von der Annahme teleskopischer Wirkungen.

Maxwell und *Hankel* haben bekanntlich Theorien construirt auf der Basis *mikroskopischer* Einwirkungen, mit Zuhülfenahme eines umgebenden Mediums. *Hier* indessen werde ich mich beschränken auf die Betrachtung der von der Annahme *teleskopischer* Wirkungen ausgehenden Untersuchungen, also vorzugsweise auf die Arbeiten *Ampère*'s, *Weber*'s und meines Vaters. Demgemäss werden im Ganzen dreierlei Gattungen von Gesetzen zu unterscheiden sein:

Punctgesetze,
Elementargesetze,
Integralgesetze;

indem jedes Gesetz mit dem ersten, zweiten oder dritten Namen zu bezeichnen ist, jenachdem es sich bezieht auf zwei elektrische *Massenpuncte*, oder auf zwei *Elemente* elektrischer Ströme, oder endlich auf zwei *geschlossene* Ströme.

Ueber die Untersuchungen Ampère's.

Ampère stellt sich die Aufgabe, die ponderomotorische Wirkung zweier elektrischer Stromelemente aufeinander zu ermitteln, und geht dabei aus von gewissen Prämissen, die theilweise allerdings eine Stütze finden in seinen experimentellen Untersuchungen, strenge genommen aber als Hypothesen zu bezeichnen sind. Diese Hypothesen können in folgender Weise ausgesprochen werden.

(α.) *Erste Hypothese.* Die ponderomotorische Einwirkung zweier elektrischen Stromelemente aufeinander

ist proportional mit den Längen Ds und Ds_1 der beiden Elemente, und, abgesehen von diesen Factoren, nur noch abhängig von der relativen Lage der beiden Elemente und von ihren Stromstärken.

(β.) *Zweite Hypothese.* Sie ist mit jenen Stromstärken J und J_1 *proportional*, und schlägt also in ihr Gegentheil um, sobald in einem der beiden Elemente die Strom*richtung* umgekehrt wird.

(γ.) *Dritte Hypothese.* Ein Stromelement JDs kann, was seine ponderomotorische Einwirkung auf ein anderes Stromelement betrifft, ersetzt werden durch seine rechtwinkligen Componenten JDx, JDy, JDz.

(δ.) *Vierte Hypothese.* Die ponderomotorische Einwirkung zweier Stromelemente aufeinander besteht aus zwei entgegengesetzten Promoventen [1]) in der Richtung ihrer Verbindungslinie.

(ε.) *Fünfte Hypothese.* Die ponderomotorische Wirkung zweier Stromelemente aufeinander ist, falls man die Winkel, welche die Elemente mit ihrer Verbindungslinie und mit einander einschliessen, constant erhält, umgekehrt proportional mit dem Quadrate ihrer Entfernung.

(ζ.) *Sechste Hypothese.* Die ponderomotorische Wirkung eines geschlossenen elektrischen Stromes auf ein einzelnes Stromelement steht gegen letzteres *senkrecht.*

Am zuverlässigsten scheinen unter diesen Hypothesen die drei ersten (α, β, γ) zu sein; wenigstens sind dieselben bisher noch nie in Zweifel gezogen worden.

Bedenklich hingegen erscheint (nach meiner Ansicht) die Hypothese (δ.). Denn dem allgemeinen Princip der Action und Reaction, durch welches *Ampère* bei Annahme derselben sich leiten liess, wird auch dann noch Genüge geschehen, wenn man jenen beiden Promoventen zwei einander entgegengesetzte Revolventen von übrigens beliebiger Richtung hinzugefügt sich denkt. — Sollte in der That die Hypothese (δ.) einer solchen Correction bedürftig sein, so würden dadurch auch afficirt werden die beiden folgenden Hypothesen (ε, ζ).

---

1) Vergl. die Note auf pag. 147.

Hievon abgesehen scheint die Hypothese (ε.) bedenklich für den Fall *sehr kleiner* Entfernungen, die Hypothese (ζ.) aber allgemein bedenklich, weil der betreffenden, von *Ampère* angestellten experimentellen Untersuchung offenbar nur wenig beweisende Kraft beizumessen ist.

Das ponderomotorische Elementargesetz, zu welchem Ampère auf Grund der Hypothesen (α, β, γ, δ, ε, ζ) *gelangt, sagt bekanntlich aus, dass zwischen zwei Stromelementen $J_0\,Ds_0$ und $J_1\,Ds_1$ eine gegenseitige ponderomotorische Kraft R stattfindet, welche (repulsiv gerechnet) den Werth besitzt:*

$$R = A^2 J_0 J_1 Ds_0 Ds_1 \frac{3\cos\vartheta_0\cos\vartheta_1 - 2\cos\varepsilon}{r^2},$$

wo die Constante A^2, ebenso r, ϑ_0, ϑ_1, ε dieselben Bedeutungen haben, wie früher (pag. 145.).

Ueber die Untersuchungen F. Neumann's.

Diese Untersuchungen nehmen ihren Ausgang von dem eben genannten *Ampère*'schen *Elementar*gesetz. Von dieser Grundlage aus gelang es meinem Vater zwei *Integral*gesetze zu entdecken, welche für eine tiefer gehende Erforschung der den elektrischen Strömen eigenthümlichen Kräfte von hervorragender Wichtigkeit sein dürften. Das *eine* derselben, schon vorhin (pag. 145) erwähnt, kann so ausgesprochen werden:

Das ponderomotorische Integralgesetz. Befinden sich zwei gleichförmige Stromringe A und B in irgend welchen Bewegungen, befinden sich ferner die in ihnen vorhandenen Stromstärken J_0 und J_1 (unbeschadet ihrer Gleichförmigkeit) in irgend welchen Zuständen der Veränderung, und bezeichnet man mit P das Potential der beiden Ringe aufeinander, so wird für jedes Zeitelement die von B auf A ausgeübte ponderomotorische Arbeit dargestellt sein durch den negativen partiellen Zuwachs von P, genommen nach der räumlichen Lage von A.

Das *andere* jener beiden Integralgesetze bezieht sich auf die *elektromotorischen* Kräfte, und kann mit Bezug auf die eben genannten Stromringe *A* und *B* so formulirt werden:

Das elektromotorische Integralgesetz. Die Summe der vom Ringe B im Ringe A während irgend eines Zeitelements hervorgebrachten (inducirten) elektromotorischen Kräfte ist immer

identisch mit dem vollständigen Zuwachs des Quotienten $\frac{P}{J_0}$, *dieser Zuwachs noch multiplicirt mit einer gewissen Constanten* ε *(der sogenannten Inductionsconstanten)*.

In den betreffenden Abhandlungen meines Vaters ist ausser dem elektromotorischen *Integral*gesetz, auch das elektromotorische *Elementar*gesetz in Betracht gezogen worden, aber doch eigentlich immer nur beiläufig, immer nur als ein Durchgangspunct zur Auffindung des erstern. So sind z. B. in jenen Abhandlungen für *den* Fall, dass die elektromotorische Kraft ihren Grund hat in einer Veränderung der Stromstärke des inducirenden Elementes, parallel neben einander zwei ganz verschiedene *Elementar*gesetze hingestellt worden, weil dieselben unter einander aequivalent sind hinsichtlich des *Integral*gesetzes.

Zugleich ist zu bemerken, dass in jenen Abhandlungen nirgends von einem Potential zwischen Strom*elementen*, sondern immer nur von dem Potential *geschlossener gleichförmiger* Ströme auf einander die Rede ist. Letzteres aber kann *ad libitum* durch die Formel

$$P = -A^2 J_0 J_1 \Sigma \Sigma \frac{\cos \varepsilon}{r} Ds_0 Ds_1$$

oder durch die Formel

$$P = -A^2 J_0 J_1 \Sigma \Sigma \frac{\cos \vartheta_0 \cos \vartheta_1}{r} Ds_0 Ds_1$$

ausgedrückt werden. Man darf also nicht behaupten, dass die früher (pag. 145) eingeführte Constante k bei der Theorie meines Vaters den Werth $+1$ besitze. Vielmehr bleibt ihr Werth bei jener Theorie *vollkommen unbestimmt*. Allerdings ist zuzugeben, dass von den vorstehenden beiden Formeln die erstere, als die *einfachere*, einigermassen bevorzugt wird; hierauf dürfte die Bemerkung von *Helmholtz*, dass nach jener Theorie $k = +1$ sei, nothwendig zurückzuführen sein.

Ueber die Untersuchungen Weber's.

Ebenso wie mein Vater, ebenso adoptirt auch *Weber* das von *Ampère* aufgestellte *ponderomotorische* Elementargesetz. Gestützt auf dieses und auf das *Coulomb*'sche elektrostatische Gesetz gelingt es ihm emporzusteigen zur Höhe seines *Punctgesetzes*:

$$\frac{\mu_0\mu_1}{r^2}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+\frac{2r}{c^2}\frac{d^2r}{dt^2}\right],$$

und sodann von dieser Höhe herab den Weg zu finden, welcher hinleitet zur Entdeckung des *elektromotorischen* Elementargesetzes.

Das Aufsteigen in jene Höhe ist insofern nicht ohne Bedenken, als dazu bestimmte Vorstellungen erforderlich sind über die *innere Mechanik* des elektrischen Stromes, so z. B. die Vorstellung, dass durch den Querschnitt eines solchen Stromes während einer gegebenen Zeit immer gleich viel positives und negatives Fluidum in entgegengesetzter Richtung hindurchgeht, ferner die Vorstellung, dass eine auf die elektrische Materie ausgeübte Kraft sich unmittelbar überträgt auf den ponderablen Träger derselben. Derartige Vorstellungen aber können, ihrer Natur nach, immer nur als mehr oder minder *hypothetisch* angesehen werden.

Wenn man gegen das *Weber*'sche Punctgesetz den Einwand vorgebracht hat, dasselbe stünde in Widerspruch mit dem allgemeinen Axiom der lebendigen Kraft, so hat man, unbewusster Weise, gerade die *allerstärkste* Seite der Festung angegriffen. Denn der Einklang zwischen jenem Gesetze und dem genannten Axiom ist ein so überraschend vollkommener, dass gerade in diesem Einklange jenes Gesetz eine seiner stärksten Stützen hat.

Was andererseits das Hinabsteigen von der Höhe des Punctgesetzes zum elektromotorischen Elementargesetz betrifft, so ist zu beachten, dass die Operationen, durch welche dieses Hinabsteigen bewerkstelligt wird, ihrer Gültigkeit nach an die Voraussetzung gebunden sind, das betrachtete (inducirende) Stromelement gehöre einem *gleichförmigen* Strome an, unzulässig aber erscheinen für den Fall eines *ungleichförmigen* Stromes. Hiedurch erklärt sich der eigenthümliche Umstand, dass, obwohl jenes Punctgesetz selber mit dem allgemeinen Princip der lebendigen Kraft in Einklang steht, dennoch das aus ihm abgeleitete elektromotorische Elementargesetz eines solchen Einklanges *nicht immer*, sondern *nur dann* sich erfreut, wenn das betrachtete Stromelement einem *gleichförmigen* Strome angehört.

Das elektromotorische Elementargesetz, wie *Weber* es abgeleitet hat, und wie es also nur anwendbar ist auf das Element eines *gleichförmigen* Stromes, giebt für die während eines Zeit-

elementes dt hervorgebrachte elektromotorische Kraft einen Werth von der Form:

$$fJ + \varphi\, dJ,$$

wo J die in dem (inducirenden) Stromelement vorhandene Stromstärke, ferner dJ den Zuwachs von J während der Zeit dt vorstellt, während f, φ nur noch abhängig sind von den gegebenen geometrischen Verhältnissen, sowie von den Aenderungen dieser Verhältnisse während der Zeit dt. Versucht man nun aber, das elektromotorische Elementargesetz aus dem *Weber*'schen Punctgesetz mit derjenigen Genauigkeit abzuleiten, welche für seine Anwendbarkeit auf *ungleichförmige* Ströme erforderlich ist, so verliert das Gesetz jenen einfachen Charakter, indem es aufhört die betreffende Kraft als eine *homogene lineare* Function von J, dJ darzustellen.

Ueber gewisse vom Verfasser angestellte Untersuchungen.

In seinem Aufsatz: »Ueber die Bewegungsgleichungen der Elektricität für ruhende leitende Körper« hat *Helmholtz* [1]) Andeutungen gemacht über eine *neue* Theorie. So gut als es mit Hülfe dieser Andeutungen möglich war, habe ich in jene neue Theorie mich hineinzuversetzen gesucht.

Nachdem ich die eigentlichen Prämissen der Theorie erkannt zu haben glaubte, stellte ich mir die Aufgabe, die Theorie selber ihren Hauptumrissen nach für einen möglichst allgemeinen Fall zu construiren, nämlich für ein System von beliebig vielen Conductoren, die in beliebigen Bewegungen begriffen sind, während gleichzeitig im Innern eines jeden irgend welche elektrische Vorgänge stattfinden. Die Resultate, zu denen ich gelangte, und über welche ich der Königl. Gesellschaft in einer früheren Sitzung [2]) Mittheilung zu machen die Ehre hatte, erwiesen sich als völlig übereinstimmend mit den Anforderungen des allgemeinen Princips der lebendigen Kraft.

Die Art und Weise aber, in welcher jene Theorie damals von mir construirt worden war, ist, wie ich später bemerkte, nur für *den* Fall correct zu nennen, dass jene Conductoren

1) *Borchardt's* Journal. Bd. 72. p. 57.
2) Sitzung vom 20. Octob. 1871. Berichte, p. 450.

beschränkt sind auf *fortschreitende* Bewegungen, nicht aber für den Fall von *drehenden* Bewegungen.

Solches bemerkt, gelang es mir leicht, die erforderliche Rectificirung zu bewerkstelligen; alsdann aber waren die Resultate nicht mehr in Einklang mit dem genannten allgemeinen Princip; der Einklang war *nur dadurch* wiederherzustellen, dass die *Prämissen* der Theorie geändert wurden; und zwar nahmen jene Prämissen, nach Ausführung der so gebotenen Abänderung, eine Gestaltung an, in welcher sie folgendermassen lauteten.

Sind Dv *und* Dv_1 *die Volumelemente von irgend zwei Körpern A und B, in denen elektrische Vorgänge stattfinden, und ist p* Dv Dv_1 *das Potential dieser beiden Stromelemente aufeinander, so ist die von* Dv_1 *auf* Dv *ausgeübte ponderomotorische Wirkung ausgedrückt durch folgende Promoventen und Revolventen:*

$$X = -Dv\,Dv_1\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \varDelta^{(\xi)} = -Dv\,Dv_1\frac{\partial p}{\partial \xi},$$

$$Y = -Dv\,Dv_1\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad \varDelta^{(\eta)} = -Dv\,Dv_1\frac{\partial p}{\partial \eta},$$

$$Z = -Dv\,Dv_1\frac{\partial p}{\partial z}, \qquad \varDelta^{(\zeta)} = -Dv\,Dv_1\frac{\partial p}{\partial \zeta}.$$

Hier sind unter x, y, z die Coordinaten von Dv *zu verstehen in Bezug auf ein beliebig gewähltes absolut unbewegliches Axensystem. Ferner bezeichnet X die auf* Dv *in der Richtung der xAxe ausgeübte Promovente, und* $\frac{\partial p}{\partial x}dx$ *denjenigen Zuwachs, welchen p erleiden würde, falls man das Element* Dv *sich selber parallel in der Richtung der xAxe um die Strecke dx verschieben wollte. Andererseits bezeichnet* $\varDelta^{(\xi)}$ *diejenige auf* Dv *ausgeübte Revolvente, welche eine durch* Dv *parallel zur xAxe gelegte Linie ξ zur Axe hat, und* $\frac{\partial p}{\partial \xi}d\xi$ *denjenigen Zuwachs, welchen p erleiden würde, falls man das Element* Dv *um diese Linie ξ drehen wollte um einen Winkel von der Grösse dξ. Analog sind die Bedeutungen von Y, Z,* $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$, *und von* $\varDelta^{(\eta)}$, $\varDelta^{(\zeta)}$, $\frac{\partial}{\partial \eta}$, $\frac{\partial}{\partial \zeta}$.

Gleichzeitig sind

$$\mathfrak{X}dt = Dv_1\, d\frac{\partial p}{\partial \mathfrak{u}},$$

$$\mathfrak{Y}dt = Dv_1\, d\frac{\partial p}{\partial \mathfrak{v}},$$

$$\mathfrak{Z}dt = Dv_1\, d\frac{\partial p}{\partial \mathfrak{w}}$$

die Componenten der von Dv$_1$ *in irgend einem Puncte von* Dv *während der Zeit dt hervorgebrachten elektromotorischen Kraft. Dabei sind diese Componenten* $\mathfrak{X}dt$, $\mathfrak{Y}dt$, $\mathfrak{Z}dt$ *bezogen zu denken auf ein mit der ponderablen Masse von* Dv *starr verbundenes Axensystem; mit Bezug auf eben dieselben Axen repräsentiren* $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ *die Componenten der augenblicklich in* Dv *vorhandenen elektrischen Strömung. Endlich sind* $d\frac{\partial p}{\partial \mathfrak{u}}$, $d\frac{\partial p}{\partial \mathfrak{v}}$, $d\frac{\partial p}{\partial \mathfrak{w}}$ *die vollständigen Zuwüchse von* $\frac{\partial p}{\partial \mathfrak{u}}$, $\frac{\partial p}{\partial \mathfrak{v}}$, $\frac{\partial p}{\partial \mathfrak{w}}$ *während der betrachteten Zeit dt.*

Nachdem die Prämissen in diese neue Gestaltung versetzt waren, schien nunmehr Alles in Ordnung, und schien es mir gelungen, die Prämissen der *Helmholtz*'schen Theorie wirklich erkannt zu haben. Da brachen plötzlich all' diese auf der Annahme eines *elementaren* Potentiales p Dv Dv$_1$ beruhenden Vorstellungen zusammen unter dem Gewicht einer im Eingange dieser Mittheilung (pag. 148, 149) erwähnten empirischen Thatsache.

Ob jene empirische Thatsache auch in Widerspruch sich befindet mit der eigentlichen Theorie von *Helmholtz selber*, wage ich nicht zu beurtheilen. Das Gesagte bezieht sich auf die von mir nach den *Helmholtz*'schen Andeutungen entworfene Theorie; und immerhin ist es möglich, dass jene Andeutungen von mir in fehlerhafter Weise aufgefasst worden sind.

§. 3.

Darlegung der Prämissen und der Resultate einer neuerdings vom Verfasser durchgeführten Untersuchung.

Die beiden *Integral*gesetze meines Vaters zeichnen sich aus durch ihre Einfachheit, namentlich aber durch den, in Folge experimenteller Prüfung, ihnen zu Theil gewordenen hohen Grad von Zuverlässigkeit. Gleiches kann gesagt werden vom *Joule*'schen Gesetz für die in Folge eines elektrischen Stromes sich entwickelnde *Wärme*. Ohne Bedenken werden daher

(1. α.) *die beiden Integralgesetze* (pag. 152, 153),

und ebenso

(1. β.) *das Joule'sche Gesetz*

als sichere Grundlagen dienen können für die anzustellende Untersuchung.

Als eine fernere Grundlage benutze ich das allgemeine Princip der lebendigen Kraft. Betrachtet man ein System von Körpern, die in beliebigen Bewegungen begriffen sind, während gleichzeitig im Innern eines jeden irgend welche elektrische Vorgänge stattfinden, und denkt man sich dieses System (durch von Augenblick zu Augenblick erfolgende Wärmeableitungen) in constanter Temperatur erhalten, so findet dieses Princip seinen Ausdruck durch die Formel:

$$dT + dQ = dS - dF;$$

d. h.: Für jedes Zeitelement ist die in dem System sich entwickelnde Quantität von lebendiger Kraft und Wärme $(dT + dQ)$ gleich gross mit der während dieses Zeitelements von den einwirkenden *äusseren* Kräften verrichteten Arbeit (dS), hievon noch in Abzug gebracht das *vollständige Differential* einer gewissen, dem Systeme eigenthümlichen Function F, von welcher im Allgemeinen nur bekannt ist, dass sie lediglich abhängen kann vom *augenblicklichen Zustande* des Systems. — Die bei einem solchen System in Betracht kommenden Kräfte sind nach ihrer *Wirkungs*weise einzutheilen in ponderomotorische und elektromotorische, andererseits aber nach ihrer *Entstehungs*weise einzutheilen in ordinäre, elektrostatische und elektrodynamische; wobei als ordinäre Kräfte alle diejenigen bezeichnet sein sollen, welche den ponderablen Massen inhärent sind, ferner als elektrostatische alle diejenigen (theils ponderomotorischen, theils elektromotorischen) Kräfte, welche herrühren von der elektrischen *Vertheilung*, endlich als elektrodynamische alle diejenigen (wiederum theils ponderomotorischen, theils elektromotorischen) Kräfte, welche herrühren von den elektrischen *Strömungen*. Diesen drei Gattungen von Kräften entsprechend, kann die linke Seite der vorstehenden Formel in drei Theile zerlegt werden, in einen Theil ordinären Ursprungs, einen zweiten elektrostatischen, und einen dritten elektrodynamischen Ursprungs; so dass jene Formel die Gestalt annimmt:

$$(dT + dQ)_{\text{Ord. Us}} + (dT + dQ)_{\text{Elst. Us}} + (dT + dQ)_{\text{Eldy. Us}} = \\ = dS - dF.$$

Hält man an der gewöhnlichen Vorstellung fest, dass die ordinären Kräfte nur von den Entfernungen abhängen, legt man ferner in Betreff der elektrostatischen Kräfte die üblichen Annahmen zu Grunde, und setzt man endlich voraus, dass die auf das

System einwirkenden *äusseren* Kräfte (deren Arbeit mit dS bezeichnet ist) nur aus *ordinären* Kräften bestehen, so findet man ohne sonderliche Mühe, dass von den Ausdrücken

$$(dT + dQ)_{\text{Ord. Us}} - dS$$

und

$$(dT + dQ)_{\text{Elst. Us}}$$

jeder für sich *allein* betrachtet ein vollständiges Differential ist. Somit folgt aus jener Formel, dass der Ausdruck

$$(dT + dQ)_{\text{Eldy. Us}}$$

ebenfalls, schon für sich *allein* betrachtet, ein vollständiges Differential sein muss. — In solcher Weise sind wir zu derjenigen Form gelangt, in welcher das in Rede stehende allgemeine Princip für *unsere* Zwecke, nämlich für eine nähere Untersuchung der *elektrodynamischen* Kräfte am besten verwendbar ist. In dieser Form wird jenes Princip so auszusprechen sein:

(1. γ.) *Das Princip der lebendigen Kraft.* — Bewegt sich ein System von Körpern, in denen elektrische Vorgänge stattfinden, unter dem Einfluss seiner inneren Kräfte und unter dem gleichzeitigen Einfluss beliebig gegebener *ordinärer* äusserer Kräfte, und denkt man sich das System (durch von Augenblick zu Augenblick erfolgende Wärmeentziehungen) in constanter Temperatur erhalten, so muss *derjenige* Theil der während irgend eines Zeitelementes dt sich entwickelnden Quantität von lebendiger Kraft und Wärme, welcher herrührt von den *elektrodynamischen* Kräften, die Form

$$-df,$$

besitzen, nämlich das *vollständige Differential* einer Function $-f$ sein, welche lediglich abhängen kann vom *augenblicklichen Zustande* des Systems.

Dabei ist von Neuem zu betonen, dass hier (abweichend vom gewöhnlichen Sprachgebrauch) unter den *elektrodynamischen* Kräften *sämmtliche* Kräfte zu verstehen sind, welche in Folge *elektrischer Strömungen* zu Tage treten, nicht nur die ponderomotorischen (von *Ampère* untersuchten), sondern auch die elektromotorischen (von *Faraday* entdeckten).

Der Satz (1. γ) ist jedenfalls bedenklicher als die Sätze (1. α, β), und zwar aus doppeltem Grunde. Erstens, weil bei Ableitung desselben Gebrauch gemacht wurde von unseren

Kenntnissen über die *elektrostatischen* Kräfte, diese Kenntnisse aber sehr zweifelhafter Natur sein dürften. Zweitens, weil immerhin die Möglichkeit denkbar ist, dass in dem betrachteten System neben lebendiger Kraft und Wärme gleichzeitig noch irgend ein bis jetzt unbekanntes drittes Agens sich entwickelt; dann aber würde neben dT und dQ noch ein diesem dritten Agens zugehöriger Term in Betracht kommen, und in die Formeln aufzunehmen sein.

Es fragt sich nun, ob die Prämissen (1. α, β, γ), etwa in Verbindung mit dem bekannten Princip der Action und Reaction bereits die hinreichenden Mittel repräsentiren zur Feststellung der den elektrodynamischen Kräften entsprechenden *Elementargesetze*, des ponderomotorischen und des elektromotorischen. In der That glaube ich, dass diese Mittel für den genannten Zweck einigermassen ausreichend sein *würden*, falls man diejenigen Anforderungen, welche das Princip der lebendigen Kraft (1. γ) an beide Elementargesetze *zusammengenommen* stellt, zu repartiren im Stande wäre auf die *einzelnen* Gesetze. Solches aber scheint mir vorläufig nicht gut möglich zu sein. — Somit sehe ich mich gezwungen, einen *andern*, wenn auch allerdings vielleicht nur provisorischen Weg einzuschlagen.

Ebenso wie mein Vater und ebenso wie *Weber* gehe ich nämlich von der Voraussetzung aus, dass

(1. δ) *das Ampère'sche ponderomotorische Elementargesetz*

das wirklich *richtige* sei, und suche von diesem Gesetze aus eine Bahn mir zu eröffnen zur Entdeckung des *zweiten*, des bisher noch völlig im Dunkeln schwebenden *elektromotorischen* Elementargesetzes.

Ebenso wie *Weber* suche ich also einen Weg zu finden von dem als bekannt vorausgesetzten *einen* Elementargesetze zu dem noch unbekannten *andern* Elementargesetze hin; ein solcher Uebergang kann ohne Hinzunahme irgend welcher Hypothesen schlechterdings nicht bewerkstelligt werden. Bei der Wahl dieser Hypothesen trennen sich die Wege. Während nämlich die von *Weber* gewählten Hypothesen auf die *innere Mechanik* des elektrischen Stromes sich beziehen, sind die von mir benutzten Hypothesen völlig *anderer* Art; sie dürften sich einigermassen empfehlen durch ihre Einfachheit, ferner durch ihre Analogie mit den drei ersten Hypothesen *Ampère*'s, endlich vielleicht auch

durch den Umstand, dass sie von vielen Physikern (wenn auch nur stillschweigend) bereits anerkannt zu sein scheinen.

Nehmen wir an, die inducirende Ursache sei repräsentirt durch das Element Ds eines Drahtes, der durchflossen ist von irgend einem gleichförmigen oder ungleichförmigen elektrischen Strom J, und das inducirte Object sei repräsentirt durch irgend einen ponderablen Körper von beliebiger Gestalt und Grösse. Jene von mir eingeführten Hypothesen sind alsdann folgende:

(2. α) *Erste Hypothese.* Die elektromotorische Kraft, welche in irgend einem Punct des gegebenen Körpers während der Zeit dt von jenem Stromelement Ds hervorgebracht wird, ist proportional der Länge Ds des Elementes, sonst aber nur noch abhängig von seiner Stromstärke, von seiner relativen Lage (zum gegebenen Körper), und von denjenigen Aenderungen, welche Stromstärke und relative Lage erleiden während der Zeit dt. Sie ist Null, falls solche Aenderungen nicht stattfinden.

(2. β) *Zweite Hypothese.* Sie ist zerlegbar in zwei Kräfte, von denen die eine proportional mit J, die andere proportional mit dJ ist. Mit andern Worten: Ihre rechtwinkligen Componenten sind homogene lineare Functionen von J und dJ. Dabei ist unter dJ derjenige Zuwachs zu verstehen, den die im Elemente Ds vorhandene Stromstärke J annimmt während der gegebenen Zeit dt.

(2. γ) *Dritte Hypothese.* Denkt man sich das Stromelement $J\,Ds$ zerlegt in drei rechtwinklige Componenten $J\,Dx$, $J\,Dy$, $J\,Dz$, welche mit dem Elemente starr verbunden an seiner Bewegung Theil nehmen, so ist die elektromotorische Wirkung von JDs identisch mit der elektromotorischen Gesammtwirkung von $J\,Dx$, $J\,Dy$, $J\,Dz$, vorausgesetzt, dass nicht nur J selber sondern auch die Aenderungen von J für alle vier Elemente übereinstimmend sind.

Man bemerkt, dass diese drei Hypothesen (2. α, β, γ) in der That in vollkommener Analogie stehen mit den drei ersten Hypothesen *Ampère*'s für die ponderomotorischen Kräfte [vergl. (α, β, γ) auf pag. 150, 151].

Von den Prämissen (1. α, β, γ, δ) und (2. α, β, γ) aus ergeben sich nun, unter Anwendung des allgemeinen Princips

der lebendigen Kraft, für das gesuchte Elementargesetz der elektromotorischen Kräfte gewisse Formeln von ziemlich complicirtem Charakter, die überdiess noch behaftet sind mit mehreren unbekannten Functionen der Entfernung.

Eine bedeutende Vereinfachung dieser Formeln stellt sich ein, sobald man noch zwei weitere Hypothesen hinzufügt, die den schon genannten allerdings in hohem Grade ähnlich sind, dennoch aber, falls man streng verfahren will, einer besonderen Nennung bedürfen. Es beziehen sich diese noch hinzuzufügenden Hypothesen auf den Fall, dass das inducirende Stromelement nicht mehr einem Drahte, sondern einem Körper von drei Dimensionen angehört. Denken wir uns als inducirende Ursache einen ponderablen Körper von beliebiger Gestalt und Grösse, in dessen Innern irgend welche elektrische Strömungen stattfinden, so lauten jene Hypothesen folgendermassen:

(2. δ) *Vierte Hypothese.* Ist Dv irgend ein Volumelement des inducirenden Körpers, und wird die in Dv vorhandene elektrische Strömung in Componenten zerlegt gedacht nach drei auf einander senkrechten mit der ponderablen Masse des Körpers starr verbundenen Axen, so soll angenommen werden, dass die elektromotorische Wirkung jener in Dv vorhandenen Strömung immer identisch ist mit der elektromotorischen Gesammtwirkung der genannten drei Componenten.

(2. ε) *Fünfte Hypothese.* Ist Dv ein unendlich kleines *genau kugelförmiges* Volumelement des inducirenden Körpers, und befindet sich der Mittelpunct von Dv in starrer Verbindung mit irgend einem andern Körper *A*, während gleichzeitig jener inducirende Körper um diesen Mittelpunct in beliebiger Drehung begriffen ist, so soll angenommen werden, dass die von Dv in irgend einem Puncte des Körpers *A* hervorgebrachte elektromotorische Kraft immer *Null* ist, falls nur die in Dv vorhandene elektrische Strömung, *beurtheilt mit Bezug auf A*, ihrer Richtung und Stärke nach *constant* bleibt.

Die Benutzung aller dieser Prämissen (1. α, β, γ, δ) und (2. α, β, γ, δ, ε) führt nun schliesslich, und zwar mit mathematischer Nothwendigkeit, zu folgendem Resultat:

Sind zwei Körper A und B in beliebigen Bewegungen begriffen, während gleichzeitig im Innern eines jeden irgend welche elek-

trische Strömungen stattfinden, und bezeichnet m_0 einen Punct des Körpers A, ferner Dv *ein Volumelement von B, so wird die von* Dv *während der Zeit dt im Puncte m_0 hervorgebrachte elektromotorische Kraft im Allgemeinen immer zusammengesetzt sein aus zwei Componenten. Die eine derselben fällt in die Richtung der gegenseitigen Entfernung r, und besitzt die Stärke*

$$-A^2 \mathrm{Dv} \frac{d(rj)}{r^2},$$

wo j die Componente der in Dv *vorhandenen elektrischen Strömung i bezeichnet, genommen nach r, und zwar nach eben derselben Richtung, in welcher jene Kraft gerechnet ist. Die andere Componente ist parallel mit der Strömung i, und besitzt, in der Richtung von i gerechnet, die Stärke:*

$$+ A^2 \mathrm{Dv} \frac{i\,dr}{r^2}.$$

Dabei sind durch die Charakterstik d diejenigen Aenderungen angedeutet, welche stattfinden während der betrachteten Zeit dt. Ausserdem ist A^2 eine Constante, und zwar identisch mit der schon früher benutzten Constanten, welche z. B. sich vorfindet auf pag. 145 *in der Formel* (1.).

Sind also in Bezug auf ein *beliebiges* rechtwinkliges Axensystem (welches seinerseits ebenfalls in irgend welcher Bewegung begriffen sein darf) x_0, y_0, z_0 die Coordinaten von m_0, ferner x, y, z diejenigen von Dv, endlich u, v, w die Componenten der in Dv vorhandenen elektrischen Strömung i, und setzt man zur Abkürzung

$$r = \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2},$$

$$\alpha = \frac{x_0 - x}{r}, \quad \beta = \frac{y_0 - y}{r}, \quad \gamma = \frac{z_0 - z}{r},$$

so werden die Componenten Xdt, Ydt, Zdt der vom Elemente Dv während der Zeit dt im Puncte m_0 hervorgebrachten elektromotorischen Kraft die Werthe besitzen:

$$(3.) \quad \begin{aligned} Xdt &= A^2 \mathrm{Dv} \left(u \frac{dr}{r^2} - \alpha \frac{d[r(\alpha u + \beta v + \gamma w)]}{r^2} \right), \\ Ydt &= A^2 \mathrm{Dv} \left(v \frac{dr}{r^2} - \beta \frac{d[r(\alpha u + \beta v + \gamma w)]}{r^2} \right), \\ Zdt &= A^2 \mathrm{Dv} \left(w \frac{dr}{r^2} - \gamma \frac{d[r(\alpha u + \beta v + \gamma w)]}{r^2} \right). \end{aligned}$$

Was die Prämisse (1. α) betrifft, so sei nachträglich bemerkt, dass das von meinem Vater aufgestellte elektromotorische Integralgesetz bei Ableitung der Formeln (3.) nicht in seiner ganzen Allgemeinheit sondern nur in so weit benutzt zu werden braucht, als es sich auf Stromringe *ohne* Gleitstellen bezieht. Demgemäss muss es fraglich erscheinen, ob diese Formeln (3.), angewendet auf zwei Stromringe, deren jeder mit beliebig vielen Gleitstellen behaftet ist, mit jenem Integralgesetze noch in Einklang sich befinden. Die betreffende specielle Untersuchung aber zeigt, dass dieser Einklang in der That vorhanden ist.

Von Interesse dürfte es noch sein, den Werth anzugeben, der auf Grund meiner Untersuchungen sich herausstellt für die im Princip der lebendigen Kraft (1. γ) enthaltene Function f:

Sind Dv_0, Dv_1 *irgend zwei Volumelemente des betrachteten Systems von Körpern, und* i_0, i_1 *die augenblicklich in ihnen vorhandenen elektrischen Strömungen, so wird der diesen beiden Elementen entsprechende Theil von f dargestellt sein durch*

$$(4.)\qquad A^2 \mathrm{Dv}_0 \mathrm{Dv}_1 \frac{i_0 i_1 \cos\vartheta_0 \cos\vartheta_1}{r},$$

wo r die Entfernung zwischen Dv_0, Dv_1 *bezeichnet, und* ϑ_0, ϑ_1 *diejenigen Winkel sein sollen, unter denen* i_0, i_1 *geneigt sind gegen die Linie r, letztere gerechnet von* Dv_1 *nach* Dv_0. *Dabei ist* A^2 *dieselbe Constante, wie in* (1.) auf pag. 145.

Die Formeln (3.) geben eine elektromotorische Kraft, welche im Allgemeinen *nicht* zusammenfällt mit der Linie der Entfernung. Sollte man hieran Anstoss nehmen, oder sollten irgend welche bestimmten Gründe (vorläufig sehe ich solche nicht) sich angeben lassen, denen zufolge die Richtung dieser Kraft nothwendig mit der Entfernung zusammenfallen muss, so würde Nichts übrig bleiben, als eine Aenderung eintreten zu lassen in den benutzten Prämissen (1. α, β, γ, δ), (2. α, β, γ, δ, ε). Und zwar würde ich in diesem Falle am Geneigtesten sein die Prämisse (1. δ), d. i. das *Ampère*'sche Gesetz fallen zu lassen. Die Aufgabe würde alsdann darin bestehen, an Stelle dieses Gesetzes ein anderes zu suchen, von solcher Beschaffenheit, dass jener Anforderung des Zusammenfallens der elektromotorischen Kraft mit der Linie der Entfernung entsprochen wird.

Dr. Arnold Heller, *Ueber die Blutgefässe des Dünndarmes.* Aus dem physiologischen Institute. Vorgelegt von dem wirkl. Mitglied *C. Ludwig.*

Mit 1 Tafel in Farbendruck.

Ich stellte im vergangenen Sommer im physiologischen Institute zu Leipzig Untersuchungen an, um meine Beobachtungen von rhythmischen Contractionen in den Mesenteriallymphgefässen des Meerschweinchens weiter zu führen. Bei diesen Untersuchungen, welche jedoch noch nicht zu einem Abschlusse gekommen sind, musste auf die Wurzeln der Lymphgefässe in der Darmwand und die Resorptions-Vorgänge daselbst zurückgegangen werden, um über den etwaigen Zusammenhang der genannten Bewegungen mit den von *Lacauchie, Gruby, Delafond* und *Brücke* beobachteten Contractionen der Darmzotten in's Klare zu kommen. Es war dabei die Blutgefässvertheilung in der Darmwand, besonders aber in den Darmzotten, als für die genannten Vorgänge von grösster Bedeutung in Betracht zu ziehen; dabei ergab sich, dass die bis jetzt vorliegenden Angaben theils sehr unklar und ungenau, theils sich widersprechend waren; denn bei den ersten vergleichenden Untersuchungen am Dünndarme des Hundes fanden sich so wesentliche Differenzen, dass eine genauere Untersuchung der Blutgefässvertheilung in der Darmwand unerlässlich schien.

Neben dem Darme des Hundes, von dessen Zergliederung ich ausging, zog ich noch den der Katze, des Schweines, des Igels, der weissen Ratte, des Kaninchens und des Menschen zum Vergleiche bei. Das Ergebniss dieser Untersuchungen soll im Nachfolgenden kurz mitgetheilt werden.

Beim Hund theilt sich die an den Darm herantretende Arterie noch im Mesenterium, bevor sie denselben erreicht, in mehrere verschieden starke Zweige. Die mittleren derselben,

meist von schwächerem Kaliber, durchbohren senkrecht die Darmwand, um sich in der Submucosa fast gleichmässig sternförmig zu zertheilen. Die beiden grösseren der im Mesenterium entstehenden Aeste umfassen das Drittel des Darmes, dessen Mitte dem Mesenterialansatze entspricht, von beiden Seiten ohne in die Wand einzutreten, durchbohren sodann in schräger Richtung die Muskelhäute, um in der Submucosa ein flaches, sehr reiches arkadenartiges Netzwerk von grösseren Stämmen zu bilden, das mit den von der anderen Seite kommenden sowie den am Mesenterialansatze in die Submucosa eintretenden zahleiche Anastomosen eingeht. Aus diesem Netze steigen zahlreiche Arterienstämmchen auf, durchbohren die Muscularis mucosae, theilen sich sodann in mehrfache kleinere Zweige; ein Theil der letzteren löst sich sofort zum Kapillarnetze der sehr mächtigen Schlauchdrüsenschichte auf, während andere in der Drüsenschichte in zwei oder drei Aeste zerfallen, deren jeder ohne mit dem Kapillarnetze der Drüsenschichte zu communiciren, unverästelt zu je einer Zotte aufsteigt; er durchzieht sodann ziemlich central die Zotte, erfährt gegen die Spitze hin eine leichte Erweiterung seines Lumens, ist bei mässig gestreckter Zotte korkzieherartig gewunden und zerfällt in der Zottenspitze in ein mässig reiches Kapillarnetz. Dies letztere communicirt direct sowol mit dem der Drüsenschichte, als auch mit dem der benachbarten Zotte, indem die von einer Zotte zur anderen verlaufenden Gefässchen die Mündungen der Schlauchdrüsen ringförmig umfassen. Aus den Kapillaren der Zottenbasis sammeln sich die Venen, welche zu grösseren bogenförmig verlaufenden Stämmchen noch in der Drüsenschichte zusammentreten und auch aus dieser Zufluss erhalten; sie durchbohren sodann die Muscularis mucosae und bilden im Anschluss an das submuköse Arteriennetz ein ebensolches von zum Theil sehr starken Stämmen; die Hauptstämme durchbohren zusammen mit den Arterien die Muskelhäute, um in's Mesenterium zu gelangen. — Die Muskelhäute werden von Stämmchen versorgt, welche von den Arterien theils vor ihrem Durchtritte durch dieselben, theils während des Durchtrittes abgegeben werden; endlich erhalten sie reichliche Zufuhr aus dem Netzwerke der Submucosa. Ihr Kapillarnetz zeigt die bekannten länglichen Rechtecke, deren Längsdurchmesser dem Muskelfaserverlaufe entspricht. Ihre Venen gehen theils in die der Submucosa,

theils münden sie direct in die die Muskelhäute durchbohrenden stärkeren Stämme.

Ganz ähnlich verhält sich die Sache bei der Katze. Die Darmzotten, wie die des Hundes kegelförmig, besitzen ein reiches Kapillarmaschennetz; dasselbe liegt oberflächlich unter der Epithelschichte; jede Zotte wird von einer einzigen senkrecht die Schlauchdrüsenschichte durchsetzenden, meist bis zur Zottenspitze unverästelten Arterie versorgt. Dieselbe kommt entweder direct aus dem Arteriennetze der Submucosa oder entsteht aus einem die Muscularis mucosae durchbohrenden Stämmchen, das sich unmittelbar unter der Drüsenschichte in mehrere für je eine Zotte bestimmte Aeste theilt. Dicht unter der Zottenbasis entstehen die Venen aus den Kapillaren; dieselben vereinigen sich zu mehrfach anastomosirenden Arkaden, nehmen noch in der Drüsenschichte aus derselben besonders vom Fundus der Schlauchdrüsen her Zweige auf und münden sodann in die grossen submukösen Stämme. Die sehr mächtigen Muskelhäute erhalten ihre Gefässe theils aus der Submucosa, theils vom Peritonealüberzuge her.

Die Zotten im Dünndarme des Schweines sind nicht sehr gross; ihr Kapillarnetz ziemlich einfach von einer aus der Submucosa stammenden, unverästelt die Drüsenschicht durchziehenden und meist erst in der Zottenspitze sich in Kapillaren auflösenden Arterie versorgt. Die Zottenvene beginnt bisweilen in der Mitte, meist erst an der Basis der Zotte, vereinigt sich mit denen der benachbarten Zotten zu grobstämmigen, mehrfach anastomosirenden Arkaden, welche noch in der Drüsenschichte gelegen, reichlichen Zufluss aus dem weitmaschigen Kapillarnetze derselben erhalten. Die Submucosa ist von sehr geringer Mächtigkeit. Die beiden Muskelhäute sind hauptsächlich von Aesten eines zwischen beiden liegenden Gefässnetzes versorgt.

Sehr bequem für die Untersuchung der Gefässvertheilung ist der Dünndarm der weissen Ratte. Ihre Darmzotten stellen flache Läppchen dar, deren längerer Basis-Durchmesser senkrecht zur Achse des Darmes läuft; sie finden sich meist zu grösseren und kleineren rautenförmigen Gruppen geordnet, welche sich anscheinend nach dem Gefässverlaufe in der Submucosa richten. Das Kapillargefässnetz der Zotten ist ein ganz ausserordentlich entwickeltes; dasselbe ist in den einfachen

Zotten von einem schnurgerade aus der Submucosa aufsteigenden Arterienstämmchen versorgt, welches meist unverästelt bis zur Zottenspitze verläuft, bisweilen aber sich schon an der Zottenbasis in zwei parallel nebeneinander aufsteigende, weiterhin bis zur Spitze unverästelt verlaufende Zweige theilt; in seltenen Fällen zeigen die Zottenarterien gleich nach dem Eintritte in die Drüsenschichte eine feine Anastomose mit dem Kapillarnetze der letzteren. Zuweilen finden sich Zotten mit zwei durch eine sattelförmige Einsenkung getrennten Gipfeln; solche zweigipflige Zotten zeigen entweder nur eine einzige, erst an der Trennungsstelle sich theilende Arterie oder auch den bei einfachen vorkommenden Modus von zwei von der Basis an ziemlich parallel verlaufenden Stämmchen. Die Zottenkapillaren treten nahe der Spitze zu einem oder zwei Venenzweigen zusammen, welche sich in der Mitte oder an der Basis der Zotte zu einem stärkeren Stämmchen vereinigen; bisweilen vereinigt sich das aus der einen Hälfte des Zottenkapillarnetzes kommende Venenstämmchen mit einem ebensolchen der benachbarten Zotte, während das der anderen Hälfte ebenfalls mit dem einer benachbarten zusammentritt. Die Stämmchen mehrerer Zotten vereinigen sich noch in der Mucosa zu grösseren der Darmwand parallel laufenden Stämmen, welche an mehreren Stellen kurz umgebogen die Muscularis mucosae durchsetzen. Nur selten nehmen die Venen Aestchen aus dem Drüsenkapillarnetze auf. Die Gefässnetze für die Muskelhäute liegen zwischen beiden und erhalten ihr Blut grossentheils aus der Submucosa.

Die Dünndarmzotten des Igels sind sehr lang und ihre Spitzen einer ausserordentlichen Verlängerung über das Kapillarnetz hinaus fähig. Das letztere ist ziemlich reich entwickelt; die aus der Submucosa kommenden arteriellen Stämmchen theilen sich sofort beim Eintritt in die Drüsenschichte in zwei bis vier je eine Zotte versorgende Aeste, welche unverästelt bis in die Spitzen des Zottenkapillarnetzes aufsteigen. Die für die Zotten bestimmten Arterien geben bisweilen sogleich nach ihrem Durchschnitt durch die Muscularis mucosa Aestchen für das Drüsenkapillarnetz ab, doch kommen meistens die für letzteres bestimmten Arterien direct aus der Submucosa. Eine oder zwei Zottenkapillaren erhalten schon ziemlich nahe der Spitze einen etwas grösseren Durchmesser, treten zu einem stärkeren

meist gerade, seltener bogenförmig die Drüsenschichte durchziehenden Venenstamme zusammen, der aus allen Theilen des Drüsenkapillarnetzes Zufuhr empfängt, ziemlich häufig mit den benachbarten anastomosirt und schliesslich in die starken submukösen Venenstämme übergeht. Die kräftigen Muskelhäute erhalten ihre Blutgefässe meist aus der Submucosa.

Die meisten Untersuchungen über die Blutgefässe des Dünndarmes sind am Kaninchen angestellt; doch ist dies Thier gerade für diesen Zweck weniger geeignet sowol der sehr gering entwickelten Schlauchdrüsen wegen, als auch weil die Zotten meist läppchenförmig sind und selten in einem Schnitte ganz getroffen werden. Bei Durchmusterung einer grösseren Anzahl von Präparaten kann man sich aber überzeugen, dass der Typus der Gefässvertheilung derselbe ist, wie bei den vorher genannten Thieren. Jede Zotte erhält eine aus der Submucosa kommende feine unverästelt verlaufende Arterie, welche sich nahe der Zottenspitze zum Kapillarnetze auflöst; ausserdem geht das Kapillarnetz der Schlauchdrüsenschichte ebenfalls, wie bei den übrigen Thieren in das der Zotte über. Die Zottenvene entsteht schon ziemlich nahe der Spitze als ein starkes Gefäss, das meist ohne Anastomosen direct in die Submucosa führt; bisweilen vereinigt sich die Vene einer Zotte mit der einer benachbarten zu einem Stamme.

Beim Menschen ist die Schlauchdrüsenschichte ebenfalls von keiner sehr bedeutenden Entwicklung; in Folge dessen auch ihr Kapillarnetz ein sehr dürftiges gegenüber z. B. dem des Hundes. Deshalb wurden auch wie beim Kaninchen die aufsteigenden Aestchen derselben, welche sehr schnell an der Zottenbasis in das Kapillarnetz der Zotte übergehen, für gleichwerthig mit der eigentlichen Zottenarterie gehalten. Jede Zotte erhält jedoch noch ihr besonderes arterielles Stämmchen, welches sich meist schon in der Mitte der Zotte in das Kapillarnetz aufzulösen beginnt, oft auch bis nahe zur Spitze unverästelt verläuft. Bisweilen findet sich am Fundus der Schlauchdrüsen eine feine Anastomose zwischen Zottenarterie und Drüsenkapillaren. Die Zottenvene entsteht meist in der Zottenspitze und läuft als ein starkes Stämmchen zur Submucosa, ohne aus der Drüsenschichte Aeste zu erhalten; das Drüsenkapillarnetz steht vielmehr nur durch das der Zotte mit der Vene in Verbindung.

Die Gefässvertheilung in den übrigen Schichten der Darmwand stimmt mit der beim Hunde genauer beschriebenen mit geringen Abweichungen bei einzelnen Thieren überein, sowie mit den seitherigen Angaben hierüber.

Ich fasse das Ergebniss, soweit es die Schleimhaut des Dünndarmes, als den für meinen Zweck wichtigsten Abschnitt betrifft, noch einmal kurz zusammen:

1. *Jede Zotte erhält eine in der Regel unverästelt bis zur Zottenspitze verlaufende Arterie.* Nur beim Menschen beginnt sie meist schon von der Zotten-Mitte an sich in das Kapillarnetz aufzulösen.

2. *Die Zottenvene beginnt entweder schon in der Zottenspitze* (Kaninchen, Mensch) *oder nahe derselben* (Ratte), *und geht dann in der Regel ohne Seitenzweige aufzunehmen direct in die Submucosa — oder sie entsteht nahe der Zottenbasis und nimmt mehr oder weniger zahlreiche Seitenzweige auch aus der Drüsenschichte auf* (Hund, Katze, Schwein, Igel).

3. Bei keinem der untersuchten Thiere findet sich der häufig angegebene Modus eines in der Zotte zur Spitze aufsteigenden arteriellen, eines absteigenden venösen Stämmchens und eines den Verlauf beider Stämmchen vielfach verbindenden Kapillarnetzes.[1]

Man sieht leicht ein, dass die Versorgung der Zotte durch ein arterielles Stämmchen, welches sich erst an der Spitze in Kapillaren vertheilt, nicht bloss für die Kraft von Bedeutung ist, mit welcher die zusammengefaltete Zotte gestreckt werden kann. Denn nur durch die wirklich ausgeführte Art der Vertheilung ist es möglich, alle Zottenkapillaren in gleicher Reich-

---

1) Diese Angabe, welche, wie mir scheint, von *Leydig* (Lehrbuch der Histologie, Frankfurt 1857, p. 295) stammt, geht seitdem fast durch alle Lehrbücher der Anatomie und Histologie. Bei *Kölliker* (Gewebelehre, 5. Aufl. p. 406) finden sich Darmzotten der Maus abgebildet »nach einem *Gerlach*'schen Injectionsapparate.« Es stand mir nun keine Maus zu Gebote; doch überliess mir Herr Professor *Gerlach* mit grosser Freundlichkeit seine noch vorhandenen aus der ersten Zeit seiner Karmininjection stammenden Präparate, nach deren einem die Zeichnung gemacht ist. Nach genauer Untersuchung derselben erscheint mir unzweifelhaft, dass auch die Zotte der Maus von einer dieselbe direct bis gegen die Spitze unverästelt durchziehenden Arterie versorgt ist; die Zottenvene tritt aus den Kapillaren meist erst in der Zottenmitte allmählig zusammen; häufig erscheint eine von der Spitze zur Vene hinablaufende Kapillare so stark, dass das Bild einer schlingenförmigen Umbeugung der Arterie in die Vene entsteht.

Fig. 3.

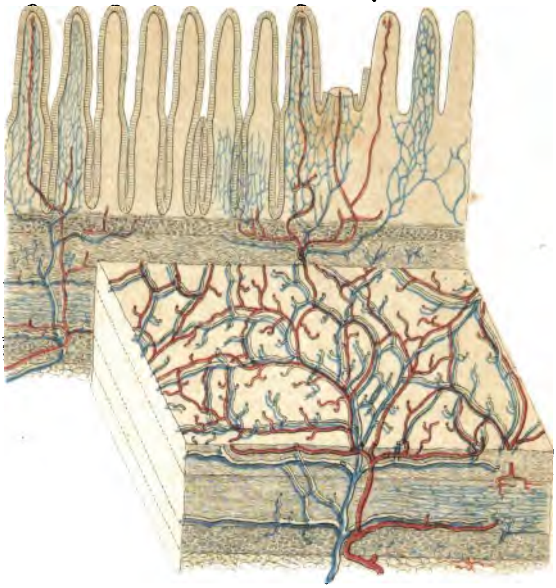
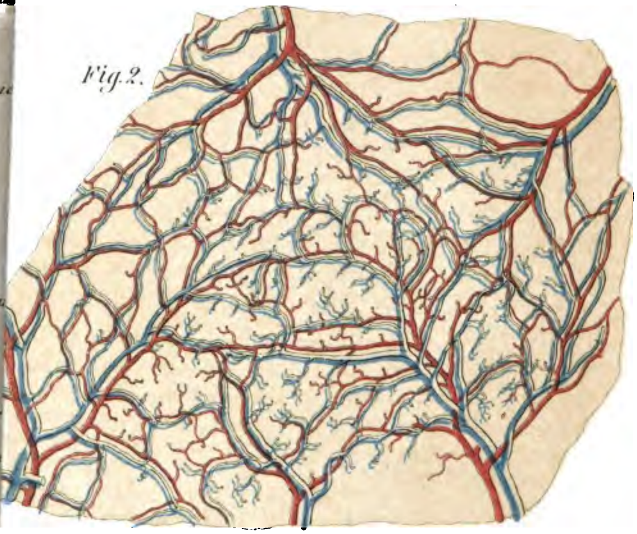


Fig. 2.



Lith. Anst. v. J. G. Bach, Leipzig.

lichkeit aus dem arteriellen Strome zu speisen. — Die reichen Netze in der Ebene der Submucosa, aus denen Zotten- und Drüsenarterien aufsteigen, bedingen die Möglichkeit einer gleichmässigen Vertheilung des Blutes in der Mucosa, vorausgesetzt, dass durch die gerade vorhandene Innervation der Strom aus den Mesenterialarterien seinen Weg durch die Schleimhaut nimmt; denn mit Umgehung dieser Bahn kann sich auch das Blut durch die Muskeln und das Bauchfell aus den Arterien in die Pfortader entleeren.

Erklärung der Tafel.

Der bequemern Uebersicht wegen sind die Arterien roth, die Kapillaren und Venen blau gedruckt.

1. Ein stark vergrösserter Durchschnitt durch die Dünndarmwand des Hundes. In dem ersten Abschnitte der Schleimhaut ist das Drüsenkapillarnetz allein gezeichnet, darin zwei abgeschnittene Zottenarterien sichtbar; eine vollständig injicirte Zotte folgt, sodann eine über der Basis querdurchschnittene; in ihrem Centrum ist die Zottenarterie sichtbar. Weiter nach unten die grossen Gefässstämme der Submucosa, welche die Muskelhäute senkrecht durchbohren. — Der Schnitt aus dem Mesenterialansatz.

2. Ein Stück Submucosa vom Hunde bei Lupenvergrösserung; es ist am Mesenterialansatze aufgeschnitten und zeigt die vielfach arkadenartig anastomosirenden Gefässnetze; die zahlreichen Gefässästchen sind die abgeschnittenen senkrecht zur Mucosa ziehenden Gefässe.

3. Halbschematische Zeichnung eines Dünndarmstückes vom Hunde. An einem Würfel aus der Darmwand denke man sich die Schleimhaut durch einen in der Submucosa verlaufenden Flachschnitt und durch einen dazu senkrechten Schnitt so abgetragen, dass nur die äusserste Schichte der Schleimhaut stehen bleibt. Letztere zeigt die anatomischen Verhältnisse in verschiedenen Abschnitten verschieden weit ausgeführt; die Schnittfläche in der Submucosa zeigt das Gefässnetz derselben; der darauf nach vorn folgende senkrechte Schnitt die Verhältnisse in den Muskelhäuten.

P. A. Hansen, Zusatz zu der »*Ueber die Anwendung von Lichtbildern zur Beobachtung der Venusvorübergänge vor der Sonne*« betitelten Abhandlung. (S. 65 u. f. dieses Bandes.)

Das Verfahren, welches ich in der in der Ueberschrift genannten Abhandlung zur Berechnung des Unterschiedes an Proportionalität zwischen der Projection und dem Urbilde, oder, mit anderen Worten, zwischen dem durch ein vergrösserndes Ocular erhaltenen Lichtbilde und dem entsprechenden Focalbilde eines heliographischen Apparats, entwickelt habe, ist einer kleinen Abänderung fähig, die ich hier entwickeln werde, obgleich, wenigstens in den meisten Fällen, die Aenderung, die durch dieselbe im Resultat hervorgebracht wird, sehr unbedeutend ist. In der angezogenen Abhandlung habe ich blos die auf der Projection ausgeführten Abmessungen, durch Anwendung der allgemeinen Interpolationstheorie, mit den Abmessungen auf dem Urbilde in Uebereinstimmung gebracht, ohne den Anfangspunkt derselben zuzuziehen, welcher in der That von dem Mangel an Proportionalität mit betroffen wird, wenn er nicht in der optischen Achse liegt. Es ist aber an sich klar, dass man allen Coordinaten eine beliebige beständige Grösse hinzufügen darf, man kann daher immer die Berechnung so einrichten, dass der Anfangspunkt der Coordinaten auf der Projection ohne Hinzufügung einer Verbesserung dem Anfangspunkt derselben auf dem Urbilde entspricht. Man kann mit vollem Recht die Bedingung einführen, dass durch die Berechnung ausser den Abmessungen selbst auch der Anfangspunkt derselben genau dargestellt werden soll. Man wird im Folgenden sehen, dass bei der Durchführung dieser Bedingung die in der genannten Abhandlung erhaltenen Rechnungsvorschriften dieselben bleiben, und nur die Zusammensetzung der mit β^0, β', β'', etc. bezeichneten Grössen eine kleine Abänderung erleidet.

Wir müssen nun zwar wieder, gleichwie im Art. 24 der Abhandlung geschehen ist, in den Gleichungen des Art. 2 $\xi + u$ statt ξ, und $\eta + v$ statt η setzen, aber statt x und y müssen $nx + u'$ und $ny + v'$ geschrieben werden, wo u' und v' von u und v im Allgemeinen verschieden sind, jedoch so von einander abhängen, dass gleichzeitig u und u', so wie v und v' Null werden. Es bedeuten nemlich $-u$ und $-v$ die Coordinaten der optischen Achse des Oculars auf der Projection, und $-u'$ und $-v'$ dieselben auf dem n mal vergrösserten Urbilde. Wir bekommen jetzt die Gleichungen

$$nx + u' = f(\xi + u), \quad ny + v' = f(\eta + v)$$

wo f denselben Ausdruck hat, wie a. a. O.

Halten wir uns nun zur Abkürzung blos an die Relationen zwischen x und ξ, da die zwischen y und η jenen vollständig analog sind, so erhalten wir

$$\begin{aligned} nx = u - u' + \xi + a(\xi + u)^3 + b(\xi + u)^5 + \text{ etc.} \\ + a(\xi + u)(\eta + v)^2 + 2b(\xi + u)^3(\eta + v)^2 + \text{ etc.} \\ + b(\xi + u)(\eta + v)^4 + \text{ etc.} \\ + \text{ etc.} \end{aligned}$$

statt der betreffenden Gleichung des Art. 24. Setzen wir ferner, wie im Art. 25,

$$\begin{aligned} n_0 x - \xi = -x\delta n_0 + U + V\xi + A\xi^2 + B\xi^3 \\ + C\xi^4 + D\xi^5 + E\xi^6 + F\xi^7 + \text{ etc.} \end{aligned}$$

und führen die Hülfsgrössen

$$\begin{aligned} \omega &= a(\eta + v)^2 + b(\eta + v)^4 + c(\eta + v)^6 + \dots \\ \alpha &= a + 2b(\eta + v)^2 + 3c(\eta + v)^4 + \dots \\ \beta &= b + 3c(\eta + v)^2 + \dots \\ \gamma &= c + \dots \end{aligned}$$

ein, so ergeben sich die Werthe

$$\begin{aligned} U &= u' - u + \omega u + \alpha u^3 + \beta u^5 + \gamma u^7 + \dots \\ V &= \omega + 3\alpha u^2 + 5\beta u^4 + 7\gamma u^6 + \dots \\ A &= 3\alpha u + 10\beta u^3 + 21\gamma u^5 + \dots \\ B &= \alpha + 10\beta u^2 + 35\gamma u^4 + \dots \end{aligned}$$

$$C = 5\beta u + 35\gamma u^3 + \ldots$$
$$D = \beta + 21\gamma u^2 + \ldots$$
$$E = 7\gamma u + \ldots$$
$$F = \gamma + \ldots$$

die mit Ausnahme des ersten mit denen des Art. 25 völlig identisch sind. Aber in Folge der oben genannten Bedingung, die hier eingeführt werden soll, ist nothwendiger Weise

$$U = 0$$

woraus

$$0 = u' - u + \omega u + \alpha u^3 + \beta u^5 + \gamma u^7 + \ldots$$

folgt. Diese Gleichung dient zur Bestimmung von u', nachdem man die Kenntniss von u und v erlangt hat.

Die Gleichungen des Art. 25 zur Bestimmung von u gehen jetzt in die folgenden über,

$$0 = u' - (1 + V)u + 2Au^2 - 4Bu^3 + 8Cu^4 - 16Du^5$$
$$+ 32Eu^6 - 64Fu^7 \pm \ldots$$
$$0 = A - 3Bu + 8Cu^2 - 20Du^3 + 48Eu^4 - 112Fu^5 \pm \ldots$$
$$0 = C - 5Du + 20Eu^2 - 70Fu^3 \pm \ldots$$
$$0 = E - 7Fu \pm \ldots$$
etc.

von welchen die erste wieder zur Bestimmung von u' dient.

Die Grössen u und v können auch wieder durch das Theorem des Art. 35 bestimmt werden, so wie überhaupt, mit Ausnahme der Formeln, die zur Berechnung der Coefficienten V, A, B, etc. aus den Abmessungen dienen, und eine kleine Abänderung erleiden, alle ferneren Relationen der Abhandlung immer noch Geltung haben, wenn nur in denselben $U = 0$ gesetzt wird.

Wenden wir uns zur Bestimmung der V, A, B, etc. und insbesondere zu dem Verfahren des Art. 32. Nachdem die dort erklärten Vorbereitungen ausgeführt worden sind, kommt man jetzt, da $U = 0$ ist, auf die Gleichungen

$$X^0 = V\xi^0 + A\xi^{02} + B\xi^{03} + C\xi^{04} + D\xi^{05} + E\xi^{06} + \ldots$$
$$X' = V\xi^0 - A\xi^{02} + B\xi^{03} - C\xi^{04} + D\xi^{05} - E\xi^{06} \pm \ldots$$

$$X'' = V\xi' + A\xi'^2 + B\xi'^3 + C\xi'^4 + D\xi'^5 + E\xi'^6 + \ldots$$
$$X''' = V\xi' - A\xi'^2 + B\xi'^3 - C\xi'^4 + D\xi'^5 - E\xi'^6 \pm \ldots$$
etc. etc.

aus welchen man durch Additionen und Subtractionen, nachdem

$$\alpha^0 = \frac{X^0+X'}{2\xi^0}, \quad \alpha' = \frac{X''+X'''}{2\xi'}, \quad \alpha'' = \frac{X^{IV}+X^V}{2\xi''}, \text{ etc.}$$
$$\beta^0 = \frac{X^0-X'}{2\xi_,^0}, \quad \beta' = \frac{X''-X'''}{2\xi_,'}, \quad \beta'' = \frac{X^{IV}-X^V}{2\xi_,''}, \text{ etc.}$$
$$\xi^0_, = \xi^{02}, \; \xi'_, = \xi'^2, \; \xi''_, = \xi''^2, \text{ etc.}$$

gesetzt worden sind, die folgenden zwei von einander unabhängigen Systeme von Gleichungen erhält,

$$\alpha^0 = V + B\xi^0_, + D\xi^0_,{}^2 + \ldots$$
$$\alpha' = V + B\xi'_, + D\xi'_,{}^2 + \ldots$$
$$\alpha'' = V + B\xi''_, + D\xi''_,{}^2 + \ldots$$
etc. etc.

$$\beta^0 = A + C\xi^0_, + E\xi^0_,{}^2 + \text{ etc.}$$
$$\beta' = A + C\xi'_, + E\xi'_,{}^2 + \text{ etc.}$$
$$\beta'' = A + C\xi''_, + E\xi''_,{}^2 + \text{ etc.}$$
etc. etc.

deren jedes dieselbe Form hat, wie die Gleichungen, von welchen wir in dieser Theorie ausgegangen sind. Man sieht, dass sie sich in ihrer Zusammensetzung von denen der Abhandlung nur durch die Werthe der β^0, β', β'', etc. unterscheiden, wie schon oben angekündigt wurde.

Bezeichnet man wieder mit α und β die allgemeinen Werthe der α^0, α', etc. und der β^0, β', etc., so werden jetzt

$$\alpha = \alpha^0 + \gamma^0(\xi_, - \xi^0_,) + \delta^0(\xi_, - \xi^0_,)(\xi_, - \xi'_,) + \varepsilon^0(\xi_, - \xi^0_,)(\xi_, - \xi'_,)(\xi_, - \xi''_,) + \text{ etc.} \quad \text{(A)}$$
$$\beta = \beta^0 + \gamma^0_,(\xi_, - \xi^0_,) + \delta^0_,(\xi_, - \xi^0_,)(\xi_, - \xi'_,) + \varepsilon^0_,(\xi_, - \xi^0_,)(\xi_, - \xi'_,)(\xi_, - \xi''_,) + \text{ etc.} \quad \text{(B)}$$

in welchen wieder

$$\gamma^0 = \frac{\alpha'-\alpha^0}{\xi'_,-\xi^0_,}, \quad \gamma' = \frac{\alpha''-\alpha'}{\xi''_,-\xi'_,}, \quad \gamma'' = \frac{\alpha'''-\alpha''}{\xi'''_,-\xi''_,}, \text{ etc.}$$
$$\delta^0 = \frac{\gamma'-\gamma^0}{\xi''_,-\xi^0_,}, \quad \delta' = \frac{\gamma''-\gamma'}{\xi'''_,-\xi'_,}, \text{ etc.}$$

$$\varepsilon^0 = \frac{\delta' - \delta^0}{\xi'''_{,} - \xi^0_{,}}, \text{ etc.}$$

etc.

$$\gamma^0_{,} = \frac{\beta' - \beta^0}{\xi'_{,} - \xi^0}, \quad \gamma'_{,} = \frac{\beta'' - \beta'}{\xi''_{,} - \xi'_{,}}, \quad \gamma''_{,} = \frac{\beta''' - \beta''}{\xi'''_{,} - \xi''_{,}}, \text{ etc.}$$

$$\delta^0_{,} = \frac{\gamma'_{,} - \gamma^0_{,}}{\xi''_{,} - \xi^0_{,}}, \quad \delta'_{,} = \frac{\gamma''_{,} - \gamma'_{,}}{\xi'''_{,} - \xi'_{,}}, \text{ etc.}$$

$$\varepsilon^0_{,} = \frac{\delta'_{,} - \delta^0_{,}}{\xi'''_{,} - \xi^0_{,}}, \text{ etc.}$$

etc.

sind. Will man die Werthe von V, A, B, etc. kennen lernen, so dienen dazu die folgenden Gleichungen,

$$V = \alpha^0 - \gamma^0 \xi^0_{,} + \delta^0 \xi^0_{,} \xi'_{,} - \varepsilon^0 \xi^0_{,} \xi'_{,} \xi''_{,} \pm \ldots$$

$$B = \gamma^0 - \delta^0 (\xi^0_{,} + \xi'_{,}) + \varepsilon^0 (\xi^0_{,} \xi'_{,} + (\xi^0_{,} + \xi'_{,}) \xi''_{,}) \mp \ldots$$

$$D = \delta^0 - \varepsilon^0 (\xi^0_{,} + \xi'_{,} + \xi''_{,}) \pm \ldots$$

$$F = \varepsilon^0 \mp \ldots$$

etc.

$$A = \beta^0 - \gamma^0_{,} \xi^0_{,} + \delta^0_{,} \xi^0_{,} \xi'_{,} - \varepsilon^0_{,} \xi^0_{,} \xi'_{,} \xi''_{,} \pm \ldots$$

$$C = \gamma^0_{,} - \delta^0_{,} (\xi^0_{,} + \xi'_{,}) + \varepsilon^0_{,} (\xi^0_{,} \xi'_{,} + (\xi^0_{,} + \xi'_{,}) \xi''_{,}) \mp \ldots$$

$$E = \delta^0_{,} - \varepsilon^0_{,} (\xi^0_{,} + \xi'_{,} + \xi''_{,}) \pm \ldots$$

$$G = \varepsilon^0_{,} \mp \ldots$$

etc.

die auch in die folgenden umgeformt werden können,

$$V = \alpha^0 - \gamma^0 \xi^0_{,} + \delta^0 \xi^0_{,} \xi'_{,} - \varepsilon^0 \xi^0_{,} \xi'_{,} \xi''_{,} \pm \ldots$$

$$B = a^0 - b^0 \xi^0_{,} + c^0 \xi^0_{,} \xi'_{,} \mp \ldots$$

$$D = l^0 - m^0 \xi^0_{,} \pm \ldots$$

$$F = u^0 \mp \ldots$$

etc.

$$A = \beta^0 - \gamma^0_{,} \xi^0_{,} + \delta^0_{,} \xi^0_{,} \xi'_{,} - \varepsilon^0_{,} \xi^0_{,} \xi'_{,} \xi''_{,} \pm \ldots$$

$$C = a^0_{,} - b^0_{,} \xi^0_{,} + c^0_{,} \xi^0_{,} \xi'_{,} \mp \ldots$$

$$E = l^0_{,} - m^0_{,} \xi^0_{,} \pm \ldots$$

$$G = u^0_{,} \mp \ldots$$

etc.

in welchen

$$a^0 = \frac{\alpha^0 - V}{\xi^0_{,}}, \quad a' = \frac{\alpha' - V}{\xi'_{,}}, \quad a'' = \frac{\alpha'' - V}{\xi''_{,}}, \text{ etc.}$$

$$b^0 = \frac{a' - a^0}{\xi'_{,} - \xi^0_{,}}, \quad b' = \frac{a'' - a'}{\xi''_{,} - \xi'_{,}}, \text{ etc.}$$

$$c^0 = \frac{b' - b^0}{\xi''_{,} - \xi^0_{,}}, \text{ etc.}$$

etc.

$$l^0 = \frac{a^0 - B}{\xi^0_{,}}, \quad l' = \frac{a' - B}{\xi'_{,}}, \text{ etc.}$$

$$m^0 = \frac{l' - l^0}{\xi'_{,} - \xi^0_{,}}, \text{ etc.}$$

etc.

$$u^0 = \frac{l^0 - D}{\xi^0_{,}}, \text{ etc.}$$

etc.

$$a^0_{,} = \frac{\beta^0 - A}{\xi^0_{,}}, \quad a'_{,} = \frac{\beta' - A}{\xi'_{,}}, \quad a''_{,} = \frac{\beta'' - A}{\xi''_{,}}, \text{ etc.}$$

$$b^0_{,} = \frac{a'_{,} - a^0_{,}}{\xi'_{,} - \xi^0_{,}}, \quad b'_{,} = \frac{a''_{,} - a'_{,}}{\xi''_{,} - \xi'_{,}}, \text{ etc.}$$

$$c^0_{,} = \frac{b'_{,} - b^0_{,}}{\xi''_{,} - \xi^0_{,}}, \text{ etc.}$$

etc.

$$l^0_{,} = \frac{a^0_{,} - C}{\xi^0_{,}}, \quad l'_{,} = \frac{a'_{,} - C}{\xi'_{,}}, \text{ etc.}$$

$$m^0_{,} = \frac{l'_{,} - l^0_{,}}{\xi'_{,} - \xi^0_{,}}, \text{ etc.}$$

etc.

$$u^0_{,} = \frac{l^0_{,} - E}{\xi^0_{,}}, \text{ etc.}$$

etc.

sind. Es ist hiebei der wesentliche Umstand zu bemerken, dass die letzten Grössen einer jeden Abtheilung der vorstehenden Hülfsgrössen nicht nur einander, sondern auch der letzten der Grössen γ^0, δ^0, ε^0, etc. und bez. $\gamma^0_{,}$, $\delta^0_{,}$, $\varepsilon^0_{,}$, etc. gleich sind. Es sind also z. B. in der Ausdehnung, in welcher die vorstehenden Formeln ausgeschrieben worden sind, nemlich in dem Falle, dass jedes der beiden Systeme von Gleichungen vier Unbekannte enthält,

$$c^0 = m^0 = u^0 = \varepsilon^0 \quad \text{und}$$

$$c^0{}_{,} = m^0{}_{,} = u^0{}_{,} = \varepsilon^0{}_{,}$$

u. s. w. für jede andere Anzahl von Unbekannten. Diese Eigenschaft ist für die Anwendung der vorstehenden Formeln von Wichtigkeit, denn es folgt daraus, dass man die letzte Grösse einer jeden Zeile nicht zu berechnen braucht. Sei i die Anzahl der Unbekannten eines jeden der beiden Systeme von Gleichungen, so sind die letzten Grössen einer jeden Zeile, im ersten System

$$\begin{array}{l} a^{i-2},\ b^{i-3},\ c^{i-4},\ \text{etc.} \\ l^{i-3},\ m^{i-4},\ \text{etc.} \\ u^{i-4},\ \text{etc.} \\ \quad \text{etc.} \end{array}$$

und eben so im zweiten System. Man braucht also diese Grössen nicht zu berechnen, sondern darf bei den Grössen

$$\begin{array}{lcl} a^{i-3},\ b^{i-4},\ \text{etc.} & \text{und bez.} & a^{i}{}_{,}{}^{-3},\ b^{i}{}_{,}{}^{-4},\ \text{etc.} \\ l^{i-4},\ \text{etc.} & & l^{i}{}_{,}{}^{-4},\ \text{etc.} \\ \quad \text{etc.} & & \quad \text{etc.} \end{array}$$

die Rechnung schliessen, wodurch an Kürze bedeutend gewonnen wird.

Zur Berechnung der Tafel endlich dienen die folgenden Formeln,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(X^{+i} - X^{-i}) &= \xi^i\{\alpha^0 + \gamma^0(\xi^i{}_{,} - \xi^0{}_{,}) + \delta^0(\xi^i{}_{,} - \xi^0{}_{,})(\xi^i{}_{,} - \xi'{}_{,}) \\ &\quad + \varepsilon^0(\xi^i{}_{,} - \xi^0{}_{,})(\xi^i{}_{,} - \xi'{}_{,})(\xi^i{}_{,} - \xi''{}_{,}) + \text{etc.}\} \\ \tfrac{1}{2}(X^{+i} + X^{-i}) &= \xi^i{}_{,}\{\beta^0 + \gamma^0{}_{,}(\xi^i{}_{,} - \xi^0{}_{,}) + \delta^0{}_{,}(\xi^i{}_{,} - \xi^0{}_{,})(\xi^i{}_{,} - \xi'{}_{,}) \\ &\quad + \varepsilon^0{}_{,}(\xi^i{}_{,} - \xi^0{}_{,})(\xi^i{}_{,} - \xi'{}_{,})(\xi^i{}_{,} - \xi''{}_{,}) + \text{etc.}\} \end{aligned}$$

deren zweite sich von der der Abhandlung durch den allgemeinen Factor ξ^i, oder ξ^{i2} unterscheidet.

Wenden wir nun die vorstehenden Entwickelungen auf das in der angezogenen Abhandlung gegebene Beispiel an, so kann dies im gegenwärtigen Falle, da dieses Beispiel ein fingirtes ist, auf zweierlei Weise geschehen. Die Daten des Beispiels sind unter anderm in der Voraussetzung berechnet, dass $U = +\,0.00455$ ist, da aber jetzt $U = 0$ im Resultat erhalten werden wird, so

müssen wir, wenn man die Eigenschaft des Beispiels, dass es den dioptrischen Forderungen vollständig genügen soll, beibehalten will, von den angegebenen Werthen der x, die positiven Indices angehören, $\frac{1}{5}U$ abziehen, so wie den Werthen der x, die negativen Indices angehören, $\frac{1}{5}U$ hinzufügen. Man findet leicht, dass diese Aenderung darauf hinaus kommt, die halben Summen der X unverändert zu lassen, von den halben Unterschieden der X aber den Werth von U abzuziehen, oder mit anderen Worten, zu diesen die Zahl -0.00155 algebraisch zu addiren. Wir bekommen daher jetzt

$$\tfrac{1}{2}(X^0 - X') = +0.00055$$
$$\tfrac{1}{2}(X'' - X''') = +0.00050$$
$$\tfrac{1}{2}(X^{IV} - X^{V}) = -0.004375$$
$$\tfrac{1}{2}(X^{VI} - X^{VII}) = -0.017775$$

und hieraus folgen die neuen Werthe der β, vermittelst der hier entwickelten Formeln,

$$\beta^0 = +0.0005418$$
$$\beta' = +0.0001229$$
$$\beta'' = -0.0004800$$
$$\beta''' = -0.0011167$$

während die Werthe der α unverändert so bleiben, wie in der Abhandlung. Es folgt hieraus, dass auch die Werthe der γ, δ, ε, so wie die der V, B, D, F dieselben bleiben, wie in der Abhandlung, und nur die der $\gamma_,$, $\delta_,$, $\varepsilon_,$, so wie die der A, C, E, G von Neuem zu berechnen sind. Die Berechnung dieser gab mir

$$\gamma^0_, = -0.0001372, \quad \delta^0_, = +0.00000220$$
$$\gamma'_, = -0.0001194, \quad \delta'_, = +0.00000218$$
$$\gamma''_, = -0.00000936, \quad \varepsilon^0_, = -0.0000000013 = 0$$

die von denen der Abhandlung merklich abweichen. Rechnet man aber hieraus die Werthe von A, C, E, G, so findet man

$$A = +0.0006902$$
$$C = -0.0001485$$
$$E = +0.0000022$$
$$G = 0$$

die mit der Abhandlung bis auf Unmerkliches übereinstimmen. Wollte man nun mit diesen neuen Werthen eine Tafel für die X berechnen, so würde diese mit der in der Abhandlung erhaltenen Tafel bis auf den Unterschied identisch werden, dass alle Werthe von X den beständigen Unterschied von $-$ 0.002 gäben, gleichwie in der Natur der Sache liegt. Die Wirkung des hier entwickelten Verfahrens beschränkt sich also im gegenwärtigen Falle blos darauf, den Anfangspunkt der Coordinaten zu verändern.

Man kann dieses Beispiel auch, indem man alle Daten desselben unverändert lässt, dem hier entwickelten Verfahren unterwerfen, nur darf man es alsdann nicht als ein solches betrachten, welches den Forderungen der Dioptrik vollständig genügt, während es jedoch denselben sehr nahe entspricht. Die neuen Werthe der β werden jetzt

$$\beta^0 = +0.002068$$
$$\beta' = +0.000504$$
$$\beta'' = -0.000310$$
$$\beta''' = -0.001019$$

und hieraus folgen

$$\gamma^0{}_{,} = -0.0005121$$
$$\delta^0{}_{,} = +0.0000433$$
$$\varepsilon^0{}_{,} = -0.0000026$$

so wie

$$A = +0.002864$$
$$C = -0.0008628$$
$$E = +0.0000800$$
$$G = -0.0000026$$

während die Coefficienten V, B, D, F wieder dieselben bleiben, wie in der Abhandlung. Die vorstehenden Werthe der Coefficienten A, C, E, G sind von denen der Abhandlung ziemlich verschieden, geben aber demungeachtet bis auf sehr geringe Unterschiede dasselbe Resultat wie jene.

Bezeichnen wir die Unterschiede der Resultate allgemein mit ΔX, so ergiebt sich der Ausdruck dafür durch die Unterschiede der vorstehenden Werthe mit denen der Abhandlung, und zwar wird

$$\Delta X = -0.00155 + 0.002175\xi^2 - 0.0007143\xi^4 + 0.0000778\xi^6 - 0.0000026\xi^8$$

und für verschiedene specielle Werthe von ξ ergeben sich hieraus die folgenden Unterschiede in der Berichtigung der Abmessungen auf der Projection oder dem Lichtbilde

ξ	ΔX
mm	mm
0	−0.002
± 5	−0.001
10	0.000
15	+0.001
20	0.000
25	+0.001
30	0.000
35	+0.002
40	−0.001

die, wie man sieht, sehr unbedeutend sind. Nur in den Fällen, wo man ein verzerrtes Lichtbild vor sich hat, oder das Ocular, welches zur Hervorbringung desselben gedient hat, mangelhaft bearbeitet ist, können sich grössere Unterschiede zwischen dem Verfahren der Abhandlung und dem hier entwickelten herausstellen.

Die folgenden Schreib- oder Druckfehler der Abhandlung habe ich bemerkt:

Seite 84,	Zeile 20,	v. o.	statt	$\delta = \xi'_0 = \xi'$	lies $\delta = \xi'_0 - \xi'$
» 106,	» 16,	»	»	+0.10982	» +0.10082
» »	» 13 v. u.		»	−0.02825	» −0.002825
» 108	» 4	»	»	X'	» X

SITZUNG AM 2. NOVEMBER 1872.

F. Zöllner, *Zur Geschichte des Horizontalpendels.*

In der Sitzung am 27. November 1869 machte ich der Königl. Gesellschaft eine Mittheilung »über eine neue Methode zur Messung anziehender und abstossender Kräfte«[1]) und erläuterte das entwickelte Princip an einem in kleinem Massstabe ausgeführten Modelle. Am Schlusse der hierauf bezüglichen Abhandlung sah ich mich genöthigt, die Priorität der Idee zu dem erwähnten Instrumente dem französischen Gelehrten Hrn. *Perrot* zu vindiciren, welcher bereits am 31. März 1862 der französischen Akademie ein zu gleichen Zwecken und nach demselben Principe ausgeführtes Instrument beschrieben hat[2]), ohne jedoch, soweit mir bekannt, weitere Beobachtungen mit demselben anzustellen. Ich citirte in meiner Abhandlung wörtlich und ausführlich die wesentlichsten Stellen der *Perrot*'schen Notiz, um so am sichersten allen Ansprüchen der Priorität auch bezüglich der Construction des Instrumentes gerecht zu werden. Inzwischen war ich bemüht, dem Instrumente auf Grund zahlreicher Versuche eine solche Gestalt zu geben, wie sie mir nach meinen bisherigen Erfahrungen am zweckmässigsten erschien. Eine Beschreibung nebst Abbildung dieses Apparates, sowie eine mit demselben angestellte Reihe von Beobachtungen theilte ich in meiner am 20. October 1871 der Königl. Gesellschaft vorgelegten Abhandlung »über den Ursprung des Erdmagnetismus und die magnetischen Beziehungen der Weltkörper«[3]) mit.

Durch eine freundliche Mittheilung des Hrn. Dr. *Klein* in Cöln wurde ich nun neuerdings auf eine in *Dingler's* polytechnischem Journal vor nunmehr 40 Jahren publicirte Abhandlung aufmerksam gemacht, aus welcher hervorgeht, dass der Verfasser derselben nicht nur vollkommen dieselbe Idee wie *Perrot* concipirt hat,

---

1) Diese Berichte (1869.) p. 281 ff.
2) *Comptes rendus* T. 54. p. 728.
3) Diese Berichte (1871.) p. 479.

sondern sogar schon mit einem in grösserem Massstabe ausgeführten Instrumente Beobachtungen über die Attraction des Mondes und der Sonne angestellt hat.

Die erwähnte Abhandlung ist betitelt:

»Astronomische Pendelwage, nebst einer neuen Nivellirwage, erfunden und dargestellt von *Lorenz Hengler*, akademischem Bürger an der Hochschule zu München.«

Dieselbe befindet sich, mit Abbildungen versehen, im 43. Bande von *Dingler's* polytechnischem Journal (Jahrgang (1832) p. 81 — p. 92.

In der Einleitung zu dieser Abhandlung bemerkt der Verfasser Folgendes:

»Es ist allgemein bekannt, welche wichtige Rolle das Pendel sowohl im wissenschaftlichen als civilen Leben spielt; seine ausgebreitete, mannigfaltige Anwendung zu so vielen und verschiedenen Zwecken macht es zu einem der wichtigsten Instrumente. Doch scheint mir noch eine Seite übrig zu sein, von welcher es noch nicht benutzt worden ist, wenigstens noch nicht so, wie es seiner Natur nach hätte benutzt werden können; — ich meine nämlich als Instrument diejenigen bewegenden Kräfte zu messen, welche nicht in paralleler Richtung mit der Schwere wirken.

»Es ist nämlich bekannt, dass das Pendel, wenn es von der Schwere allein afficirt wird, nur in verticaler Lage ruht, und dass eine gewisse Kraft, die aber nicht parallel mit der Schwere wirken darf, gefordert wird dasselbe aus der senkrechten Lage zu bringen, welche Kraft dem Sinus des Elevationswinkels proportional ist; daher liesse sich durch das Pendel jede solche einwirkende Kraft genau bestimmen. Allein da es viele Kräfte giebt, die im Verhältniss zur Schwere so gering sind, dass wir den Sinus des durch sie erzeugten Elevationswinkels bei einem Pendel von der Länge, die wir ihm zu geben im Stande sind, unmöglich wahrnehmen können; so sind wir auch nicht im Stande, solche Kräfte durch ein gewöhnliches Pendel zu messen. So wissen wir wohl, dass z. B. jeder Körper auf der Oberfläche der Erde gegen den Mond, gegen die Sonne u. s. w. zu einer Zeit stärker gravitiren müsse, als zu einer

andern, je nachdem er auf der, diesem Körper zu- oder abgewandten Seite sich befindet; und das Pendel müsste diese Differenz seiner Natur nach genau anzeigen; allein hiezu wäre schon ein Pendel von mehreren tausend Fuss Länge nöthig, um nur eine Spur von dieser Differenz wahrnehmen zu können. Ebenso verhält es sich mit vielen andern Kräften, welche alle ganz genau durch das Pendel bestimmt werden könnten, wenn wir im Stande wären, ihm jede beliebige Länge zu geben. —

»Diese Schwierigkeit nun glaube ich durch eine Vorrichtung, die ich nachher beschreiben werde, überwunden zu haben, so dass man im Stande ist ein Pendel, oder eigentlich eine Pendelwage [1]) zu verfertigen, die an Empfindlichkeit einem gewöhnlichen Pendel von jeder, selbst von unendlicher Länge gleichkommt, und man daher ein Instrument hat, jede auch noch so geringe Kraft, welche nicht in paralleler Richtung mit der Schwere wirkt, zu messen.«

Das Princip seiner Pendelwage begründet hierauf *Hengler* mit folgenden Worten:

»Diese Pendelwage beruht auf dem Princip, dass man ein Pendel in einer gegen den Horizont geneigten Ebene schwingen lässt, anstatt in einer senkrechten, wie es bei gewöhnlichen Pendeln der Fall ist. . . .«

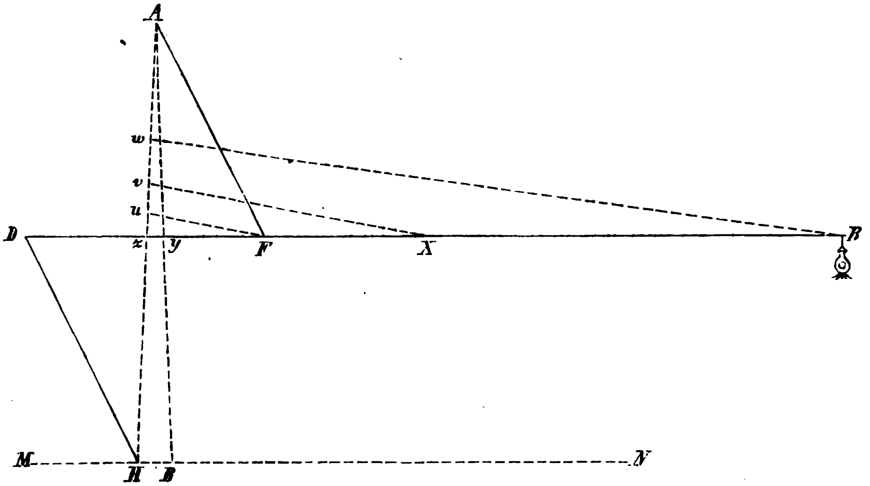
Nach Entwickelung einiger auf dieses Princip bezüglichen Formeln wird das Instrument folgendermassen beschrieben und durch nachstehende Figur erläutert.

»Es seien *A* und *B* senkrecht übereinanderstehende feste Puncte; *DH* und *AF* zwei Fäden, welche in *A* und *H* befesigt sind, und den Hebelarm *DP*, dessen Schwerpunct nach *P* fällt, in horizontaler Lage halten; so wird dieser Hebelarm nur in einer mit der Linie *MN* (welche durch *H* und *B* gezogen ist) parallelen Lage ruhen, und jedes Mal wieder dahin zurückkehren, wenn er durch irgend eine Kraft aus dieser Lage gebracht worden ist, oder eigentlich nach Art eines Pendels hin- und herschwingen, und zwar in einer schiefen Ebene, deren Neigungswinkel $= HAB$ ist.

1) »Denn es ist ein Mittelding zwischen Pendel und Wage, wie aus der Theorie erhellen wird. Ich gab ihm den Namen »»astronomische Pendelwage««, weil sie vorzüglich für astronomische Untersuchungen bestimmt ist.«

Man mag daher ein Gewicht oder eigentlich den Schwerpunct des Hebelarmes auf jeden beliebigen Punct desselben übertragen, so beschreibt er Schwingungen in einer unter dem Neigungswinkel *HAB* gelegten Ebene, wobei die Länge des Pendels dem Abstand von dem Puncte *Z* (wenn dieses der Punct ist, wo die Linie *HA* den Hebelarm schneidet) proportional ist . . . . «

Fig. 1.



Nach einigen weiteren Entwickelungen und der Ableitung des Ausdruckes für die Kraft, welche zur Erzeugung eines bestimmten Elevationswinkels erforderlich ist, erwähnt der Verfasser die folgenden

»Hauptpuncte zur Berücksichtigung bei Verfertigung dieser Wage.«

1. »Die Puncte *A* und *D* müssen unbeweglich fest sein; es wird daher zur Aufstellung dieses Instrumentes ein ebenso festes Local erfordert, als zu irgend einem anderen astronomischen Instrumente.«
2. »Die Fäden *AF* und *DH* dürfen keine drehende Kraft haben, auch keine bekommen durch jede barometrische, hygrometrische und thermometrische Veränderung; sie dürfen daher nicht aus geflochtenen oder gesponnenen Stoffen sein, sondern aus gewobenen oder

reinen Naturproducten, z. B. ungesponnener Seide, Rosshaar etc.«

3. »Alle fremden Kräfte müssen abgehalten werden, besonders Luftzug, oder auch Magnetismus, Electricität etc. Der Hebelarm darf daher nicht aus Eisen oder überhaupt aus keinem Material, auf welches Magnetismus oder Electricität besonderen Einfluss haben, verfertigt werden. Um den Luftzug möglichst abzuhalten, wird das ganze Instrument hermetisch verschlossen, so dass nur bei *P* mittelst eines Mikroskopes der Hebelarm betrachtet werden kann, der sich dort in einer feinen Spitze endigt, unter welcher eine Skala angebracht ist.«

4. »Auch ist noch eine Vorrichtung zu treffen, den Hebelarm in Ruhe zu bringen; denn sonst wäre man genöthigt den Stand desselben durch die Grenzen der Oscillation selbst zu bestimmen, weil der Hebelarm, wenigstens nach meinen bisherigen Beobachtungen, niemals ganz ruhig ist.«

Man ersieht aus diesen Angaben, dass *Hengler* damals noch nicht mit der fünf Jahre früher von *Poggendorff* und einige Jahre später auch von *Gauss* benutzten Methode der Spiegelablesung bekannt gewesen ist. [1])

In dem folgenden § beschreibt nun *Hengler* seine Versuche mit der Pendelwage und zwar wörtlich in folgender Weise:

»Resultate aus meinen bisherigen Versuchen.«

»Aus der Theorie dieser Pendelwage ergiebt sich von selbst, dass sie ein Instrument ist, durch welches jede, selbst die geringste Kraft gemessen werden kann; .....«

1. »Meine ersten Versuche richteten sich auf die Attraction der Sonne und des Mondes. Zu diesem Zwecke liess ich in einem Zimmer von 16′ Höhe meine Wage, deren Hebelarm 10′ Länge hatte, anbringen, suchte hierzu zwei Puncte aus, den einen oben an der Decke des Zimmers, den andern unten auf dem Boden desselben, die mir die festesten schienen und zugleich eine solche Lage hatten, dass der Hebelarm eine Schwingungszeit

1) *Poggendorff's* Annalen VII. 1827. »Neues Instrument zum Messen der magnetischen Abweichung.«

von fünf Minuten erhielt. Die Empfindlichkeit der Wage war daher sehr gross .....

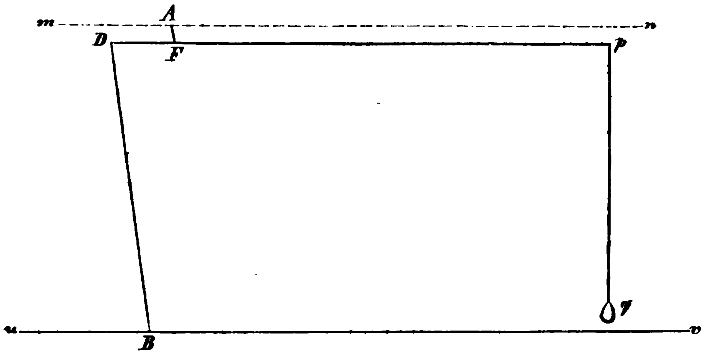
»Dieses Instrument verschloss ich hermetisch, so dass nur der Hebelarm bei *P* mittelst des Mikroskopes betrachtet werden konnte. Ich stellte nun im Neumonde des Monats März die Wage so, dass der Hebelarm Mittags 12 Uhr in der Mittagslinie ruhte, und nun machte er folgende Oscillationen: Von 12 Uhr an zog er sich immer mehr und mehr gegen Westen, bis etwas nach 3 Uhr; kehrte dann wieder allmählich zurück, so dass er etwas nach 6 Uhr wieder in der Mittagslinie stand; zog sich dann nach und nach hinüber gegen Osten, bis nach 9 Uhr; kehrte dann allmählich wieder zurück, so dass er gegen $12^1/_2$ Uhr wieder in der Mittagslinie stand. Diese Oscillationen wiederholte er immer in der nämlichen Zeit, wovon ich mich zwei Monate lang täglich überzeugte. Wenn ich die Gränzen der Oscillationen an verschiedenen Tagen verglich, so zeigte es sich, dass sie am grössten waren zur Zeit des Neu- und Vollmondes; am kleinsten aber in den Quadraturen. Das tägliche Ab- und Zunehmen aber auch nur einigermassen zu bestimmen, bin ich wegen der Untauglichkeit des Locales nicht im Stande und kann also nur das als unbezweifeltes Endresultat annehmen, dass diese Oscillationen der Wage wirklich von der Attraction der Sonne und des Mondes herrührten; b i n a b e r a u c h ü b e r z e u g t, d a s s m a n d i e A t t r a c t i o n s k r a f t d e s M o n d e s s e l b s t u n d d a h e r a u c h s e i n e M a s s e d u r c h d i e s e s I n s t r u m e n t g e n a u b e s t i m m e n k a n n, s o b a l d m a n e i n d a z u t a u g l i c h e s L o c a l h a t.«

2. »Versuche anderer Art stellte ich an in Beziehung auf die Kraft, mit welcher ein Körper sich gegen den Aequator zu bewegen strebt, wegen der Axendrehung der Erde. Zu diesem Zwecke machte ich folgende Vorrichtung: (siehe Fig. 2)

In einem Gebäude von 100 Fuss Höhe suchte ich zwei möglichst feste Puncte *A* und *B* (wenn *mn* das Dach und *uv* den Boden des Gebäudes vorstellen), brachte meine Wage so an, dass der Faden *AF* $^1/_2$ Fuss,

also *BD* $99^1/_2$ Fuss lang und der Hebelarm folglich ganz oben war; anstatt das Gewicht unmittelbar in *P* anzubringen, befestigte ich dasselbe mittelst eines Fadens *PQ* so, dass es beinahe auf dem Boden war; regulirte nun die Wage so, dass der Hebelarm senkrecht auf der Ebene des Mittagskreises stand, zog endlich das Gewicht von *Q* nach *P* hinauf, und so zog sich auch der Hebelarm nach Süden und zwar so bedeutend, dass ich schon bei einer Erhöhung von einigen Fuss eine Differenz wahrnehmen konnte. Die Wage war

Fig. 2.



natürlich hermetisch verschlossen, hatte die nämliche Empfindlichkeit wie oben und das nämliche Mikroskop zur Beobachtung. Obgleich diese Versuche in kurzer Zeit sehr oft wiederholt und abgeändert werden können, und man also in kurzer Zeit genaue Resultate erhalten kann, zumal da alle jene Unregelmässigkeiten, welche aus Temperaturwechsel u. s. w. entstehen, hier wegen der Kürze der Zeit, welche zu einem Versuche nöthig ist, gänzlich wegfallen; so habe ich doch bis jetzt noch nicht genau bestimmen können, wie viel für jeden Fuss Erhöhung des Gewichtes der Hebelarm gegen Süden sich wendet, und kann einstweilen nur das als bestimmt behaupten, dass diese Wage wirklich eine solche Empfindlichkeit hat, dass sie durch genannte Kraft afficirt, diesen Ausschlag giebt und zugleich ein directer Beweis für die Axendrehung der Erde ist.«

3. »Ich stellte noch Versuche anderer Art an, wovon ich aber keine bestimmte Resultate wegen Untauglichkeit meines Locales geben kann. Diese Versuche betreffen nämlich die Frage: ob alle Materie gleich gravitire gegen den Mond und gegen die Sonne.«

Ehe ich zur Mittheilung anderer Stellen aus der Abhandlung *Hengler's* übergehe, seien mir hier zunächst über die oben angeführten Versuche einige Bemerkungen gestattet. Vor Allem ist die Dürftigkeit zu beklagen, mit welcher die Angabe der näheren Umstände und Vorsichtsmassregeln bei den Versuchen behaftet ist. Ich selber hatte, ehe es mir gelungen war das Instrument in der zuletzt beschriebenen Form herzustellen, Versuche angestellt, die fast vollkommen mit den oben von *Hengler* erwähnten übereinstimmen. Trotzdem ich mich eines tiefen Kellergewölbes als Beobachtungsraumes bediente, an dessen Decke und Fussboden in ähnlichem Abstande wie bei den *Hengler*'schen Versuchen die Aufhängepuncte des Pendels angebracht waren, ist es mir nicht möglich gewesen den Einfluss des Mondes in so unzweideutiger Weise an den Bewegungen des Pendels wahrzunehmen, wie das oben von *Hengler* behauptet wird. Ebenso wenig war mir dies an dem veränderten Instrumente möglich, dessen Abbildung und Beschreibung ich in meiner letzten Abhandlung »über den Ursprung des Erdmagnetismus und die magnetischen Beziehungen der Weltkörper« gegeben habe. Wenn man berücksichtigt, dass im günstigsten Falle die von Sonne und Mond gemeinsam auf ein Pendel ausgeübte doppelte Ablenkung höchstens nur $\frac{1}{26}$ Bogensecunde betragen kann [1], so darf, unter Voraussetzung einer absoluten Unveränderlichkeit der einzelnen Theile des Beobachtungsraumes, die Horizontalebene desselben höchstens nur Veränderungen erleiden, welche innerhalb der obigen Winkelgrösse liegen.

Man ersieht hieraus, dass ein derartiger Apparat nicht nur, wie *Hengler* oben bemerkt, »ein ebenso festes Local er-

---

1) *C. A. F. Peters*, »Von den kleinen Ablenkungen der Lothlinie und des Niveaus, welche durch Anziehung der Sonne, des Mondes und einiger terrestrischer Gegenstände hervorgebracht werden.« *Bulletin de la classe physico-mathématique de l'Acad. Imp. des sciences de St. Pétersbourg. Tome* III. *No.* 14, *Pétersbourg* 1844.

fordert, als irgend ein anderes astronomisches Instrument«, sondern, (da man bei letzteren an der Libelle höchstens $\frac{1}{10}$ Secunde schätzen kann,) dass eine beträchtlich viel stabilere Aufstellung dazu erforderlich ist.

Durch diese Betrachtungen veranlasst, bemerkte ich bezüglich der Aufstellung des Horizontalpendels:

> »Derartige Beobachtungen werden daher am vortheilhaftesten in tiefen und ruhig gelegenen Erdschächten angestellt werden, wo dann bei Abwesenheit von Temperaturschwankungen und localen Erschütterungen alle jene Einflüsse quantitativ bestimmt werden können, welche direct durch vulkanische Bewegungen des Erdbodens hervorgerufen werden.«

Wenn ich durch die hier gemachten Bemerkungen auch keineswegs die Glaubwürdigkeit der *Hengler*'schen Beobachtungen in Frage stellen will, so scheinen mir dieselben doch mindestens mit grosser Vorsicht aufgenommen werden zu müssen.

Am Schlusse seiner Abhandlung beschreibt *Hengler* noch ein Instrument, bei welchem das Princip seiner astronomischen Pendelwage zur Construction einer Nivellirwage benutzt wird. Die wesentlichsten der hierauf bezüglichen Worte lauten folgendermassen:

> »Vielleicht könnte diese Wage noch in manchen andern Fällen ihre Anwendung finden, wenigstens glaube ich auf diese Art eine Nivellirwage verfertigen zu können, die manche Vorzüge vor den andern haben möchte. Dass man durch bisherige Instrumente nicht im Stande ist vollkommen zu nivelliren, ja dass man höchstens nur bis zu einer Secunde mit Sicherheit nivelliren kann, bedarf keines Beweises. Ganz anders aber verhält es sich mit einem Nivell nach Art der astronomischen Pendelwage; denn hier liegt es in der Willkür, dem Nivell jede denkbare Empfindlichkeit zu geben, so dass man im Stande ist, nicht nur einzelne Secunden, sondern selbst hundertste Theile einer Secunde mit grösster Sicherheit zu messen . . . . . .
>
> »Obgleich nun ein solcher Winkel auch für das stärkste Fernrohr gänzlich verschwindet, aber vielleicht in kurzer Zeit durch Vervollkommnung der Heliotropen bestimmt werden wird, so soll durch dieses Beispiel nur gezeigt sein,

dass man dem Nivell jede, für jeden Versuch nöthige Empfindlichkeit geben kann. — Um mich einer weitläufigen Beschreibung überheben zu können, habe ich eine solche Nivellirwage durch Hrn. Mechanikus *Weissenbach* dahier verfertigen lassen und dieselbe der königl. Akademie der Wissenschaften vorgelegt.«

Ich beschliesse hiermit die Reproduction von Stellen aus der Originalabhandlung *Hengler's*, welche zur Genüge beweisen werden, dass nicht, wie es in meiner ersten Abhandlung geschah, Hrn. *Perrot* in Paris, sondern Hrn. *Hengler* in München die Priorität des besprochenen Instruments vindicirt werden muss, indem Letzterer bereits 40 Jahre vor *Perrot* nicht nur dieselbe Idee concipirt, sondern selbst schon Beobachtungen mit einem nach klar von ihm entwickelten Principien ausgeführten Apparate angestellt hat.

Auf eine bezüglich der Persönlichkeit des Erfinders nach München gerichtete Anfrage erhielt ich durch gütige Vermittelung des Herrn Professors *Beetz* und des Herrn Universitätssecretairs die folgende Angabe:

»Im Jahre 1830—31 war ein Cand. phil. et theol. *Lorenz Hengler* von Reichenhofen in Würtemberg immatriculirt, der weder früher noch später wieder zu finden ist.«

Dr. **H. Tappeiner**, *Ueber den Zustand des Blutstroms nach Unterbindung der Pfortader.* — Aus der physiolog. Anstalt in Leipzig. Vorgelegt von dem wirkl. Mitgl. *C. Ludwig.*

Mit 14 Holzschnitten.

Für die Erscheinung, dass ein Thier rasch abstirbt nachdem seine Pfortader in einem Zuge unterbunden wurde [1]), fehlt eine zwingende und letzte Erklärung. Aus den Beobachtungen von *C. Ludwig* und *Thiry* [2]) geht allerdings hervor, dass dieser Eingriff zunächst den Blutstrom und zwar in Folge einer hydraulischen Störung zum Versiegen bringt. Denn sie fanden, dass unmittelbar nach der Unterbindung der arterielle Druck in ein Absinken geräth, das so lange fortdauert bis derselbe zu der Grenze gelangt ist bei welcher das Leben nicht mehr bestehn kann. Wird dagegen in nicht allzu ferner Zeit vom Beginn der Verschliessung die Pfortader wieder geöffnet, so steigt der arterielle Druck in wenigen Minuten wieder zu seiner normalen Höhe empor, worauf sich die im Erlöschen begriffenen Bewegungen des Herzens und des Brustkorbes wieder unverweilt beleben. Die Frage aber, wie die Unterbrechung des Pfortaderstromes den Stillstand der gesammten Blutbewegung veranlasse, beantworten die genannten Autoren auf Wahrscheinlichkeitsgründe gestützt dahin, dass sich in den Wurzeln der verschlossenen Pfortader ein Blutquantum von genügender Grösse anhäufe, um in den übrigen Gefässen eine tödtliche Blutleere zu erzeugen.

Um diese Annahme auf ihre Richtigkeit zu prüfen, unternahm Herr Dr. *F. Hofmann* auf Veranlassung des Herrn Prof.

---

1) *Oré* in *Cl. Bernard's leçons sur les propriétés physiologiques des liquides des l'organisme* 1859. Tome II. p. 191. *Mor. Schiff,* Schweizerische Zeitschrift für Heilkunde 1862. Bd. 1. p. 24.

2) Sitzungsberichte der k. Akademie d. W. in Wien. 49. Bd. II. Abt. p. 453.

C. Ludwig einige Bestimmungen der Blutmengen in den Darmgefässen von Kaninchen, die in Folge der Pfortaderunterbindung abgestorben waren. Durch den Ausbruch des Krieges war er jedoch verhindert die in Aussicht genommene Versuchsreihe zu vollenden. Aus seinen Aufzeichnungen, welche er mir gütigst zurückliess, theile ich mit seiner Erlaubniss die für den gegenwärtigen Zweck wichtigen Beobachtungen mit.

»Die Bestimmungen der Blutmenge geschahen nach der folgenden Methode: — 1. Da eine Lösung von 200 Cbc. gewöhnlichen Alkohols in 800 Cbc. Aq. den Blutfarbstoff sehr vollkommen und leicht aufnimmt, so werden die Organe des Kaninchen möglichst rasch nach dem Tode in dieselbe gebracht, und sofort stark ausgepresst. Nachdem so ein grosser Theil des Blutes aus den Organen erhalten ist, werden letztere und besonders die dem Drucke widerstehenden Knochen mit einem scharfen Beile zerkleinert, dann in dem vertheilten Zustande mit obiger Alkoholmischung längere Zeit bei 40° C. digerirt oder 6—8 Stunden bei etwa 20° C. stehen gelassen und wieder ausgepresst. Bei der nächsten Wiederholung erhält man bereits eine nur sehr schwach gefärbte Lösung von Hämoglobin. — 2. Die Blutbestimmung im Darm geschieht in der Weise, dass das Mesenterium möglichst nahe dem Darme abgetrennt wird. Das Blut fliesst aus allen grösseren Gefässen heraus, und wird durch Abstreifen des Darmes noch weiter herausgedrückt. Ist dann der Darm abgewaschen, so kann ohne Gefahr von Blutverlust der Darminhalt herausgestreift werden. Das in den Darmcapillaren zurückgebliebene Blut wird schliesslich auf die in 1. beschriebene Weise durch die hydraulische Presse erhalten. — 3. Die gut gemischte Blutflüssigkeit wird gemessen, und um sie von den beigemengten Fleischstückchen rein zu erhalten, filtrirt. Da das Filtriren sehr langsam vor sich geht, namentlich mit der an Eiweiss reichen Blutflüssigkeit der Muskeln, so wird die Farbe ziemlich dunkel, und ein Unterschied zwischen arteriell und venös ist wohl nicht zu erkennen. Um diesen Nachtheil zu beseitigen, wird das Filtrat der zu vergleichenden Blutsorten mit Kohlenoxyd behandelt, und so die gleiche Farbe erzeugt. — 4. Die Farbendifferenz lässt sich nach Intensität und Ton am besten unterscheiden, wenn man die beiden in die Trögchen gebrachten Blutproben nahe vor ein Auge abwechselnd hält, und ein rundes, gut beleuchtetes Papier betrachtet. Man sieht

so nicht die Flüssigkeit, sondern die mehr oder weniger roth erscheinende Papierscheibe.

»Mit dieser Methode wurden zwei Bestimmungen ausgeführt. Die erste derselben bezog sich auf ein Kaninchen von 1530 Gr. Körpergewicht, welches 52 Minuten nach der Pfortaderunterbindung unter sehr schwachen Krämpfen gestorben war. Da es nur auf das Verhältniss zwischen den Blutmengen im Darm und in dem übrigen Körper ankommt, so ward auch nur dieses bestimmt und zwar in zwei Proben, das eine Mal vor, das andere Mal nach dem Einleiten von Kohlenoxyd. Nach der ersten Bestimmung ergab sich nun unter der Voraussetzung, dass man die gesammte Masse des Blutes zu 100 Theilen annahm, in den Pfortaderwurzeln ein Blutgehalt von 29,4%, während sich dieselbe Zahl nach dem Einleiten von Kohlenoxyd zu 28,8% stellte.

»Der zweite Versuch betraf ein Kaninchen von 1590 Gr. Gewicht, welches 35 Minuten nach der Pfortaderunterbindung unter heftigen Krampfanfällen gestorben war. In die Darmhöhle war ein sehr geringer Erguss von Blut eingetreten. Die Darmwand enthielt viele Ekchymosen; die Pfortader war so strotzend gefüllt, dass beim Anschneiden derselben das Blut in einem Bogen heraussprang. Von diesem letzteren wurde ein Antheil zur Herstellung einer Normalfärbung benutzt. Es ergaben sich nun im Ganzen 40,31 Cbc. Blut, gleich 2,53% des Körpergewichts. Hiervon waren im Darm enthalten 12,67 Cbc. und im übrigen Körper 27,64 Gr. Setzt man die Blutmenge der Leiche gleich 100 Theile, so befanden sich im Körper 68,5% und in den Darmgefässen 31,5% derselben.«

Als ich nach der Abreise von Herrn Dr. *F. Hofmann* die Arbeit unter Anleitung des Herrn Prof. *C. Ludwig* fortführte, begann ich meine Beobachtungen ebenfalls mit einer Bestimmung der Blutvertheilung in einem Thiere, das in Folge der Pfortaderunterbindung gestorben war. Das reine Körpergewicht des Kaninchens betrug 1000 Gr. Vor der Unterbindung der Pfortader waren dem Thiere 5 Cbc. Blut aus der Carotis entzogen worden, welche ich zur Herstellung einer Normallösung benutzte. Nach dem durch die Pfortaderunterbindung herbeigeführten Tode wurden aus dem Darm und seinen Gefässen 7,1 Gr. Blut und aus dem übrigen Körper 34,7 Gr. Blut gewonnen, mithin betrug die Blutmenge, welche das Thier überhaupt ent-

hielt, 4,68% seines Körpergewichtes und die in den Pfortaderwurzeln enthaltene Blutmenge 16,2% derjenigen, welche die Leiche im Ganzen enthalten hatte.

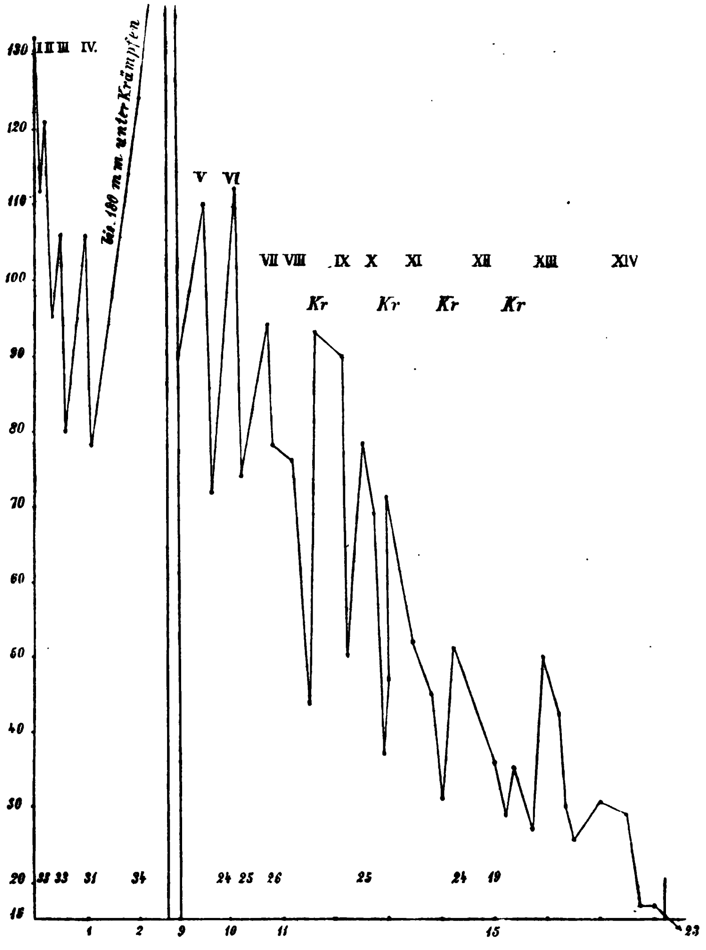
Die kleinere Verhältnisszahl, welche der in den Pfortaderwurzeln angesammelten Blutmenge nach der letzten Bestimmung im Gegensatz zu denen *Hofmann's* zukommt, liegt vielleicht darin begründet, dass dieser sein Probeblut aus der Pfortader der Leiche entnommen hatte, welches in 100 Theilen mehr rothe Körperchen enthalten dürfte, als das der Carotis. Diese Vermuthung findet ihre Stütze in der Ueberlegung, dass aus dem Darmblut eine nicht unbeträchtliche Menge von Exsudat bez. Lymphe hervorgegangen sein muss, während dasselbe viele Minuten hindurch unter einem hohen Drucke verweilte. Aber abgesehen hiervon muss auch in den Versuchen, die nach dem Muster des meinigen angestellt sind, die Blutmenge, welche in den Pfortaderwurzeln enthalten ist, im Verhältniss zu der des übrigen Körpers grösser erscheinen als es wirklich der Fall ist, weil sich das Blut aus den Unterleibseingeweiden viel vollständiger als aus dem übrigen Körper auswaschen lässt.

Durch die vorstehenden Beobachtungen ist demnach bewiesen, dass in den Wurzeln der Pfortader, nachdem durch Unterbindung derselben der Tod der Kaninchen herbeigeführt wurde, nicht mehr als 0,8% des Körpergewichts an Blut aufgehäuft ist. Obwohl es nun von vorneherein unwahrscheinlich ist, dass dieser geringe Blutverlust genügend sei um eine tödtliche Herabsetzung des arteriellen Druckes zu veranlassen, so habe ich, um den letzten Zweifel zu heben, die Wirkungen der Blutverluste auf den arteriellen Druck einer weiteren Prüfung unterzogen.

In einer ersten Versuchsreihe sollte das Blutvolumen bestimmt werden, welches dem Kaninchen entzogen werden muss, damit dasselbe dem raschen Tode unter stetigem Absinken des arteriellen Drucks entgegen geht. Zu dem Ende wurde in die eine a. Carotis ein verschliessbares Röhrchen eingesetzt, aus welchem das Blut in einen kleinen Masscylinder übergeführt werden konnte; die andere a. Carotis ward mit einem Hg.-Manometer verbunden, der die Veränderungen seines Standes auf einen unendlichen Papierstreifen continuirlich aufschrieb. Die Entleerung des Blutes geschah absatzweise, jedoch entweder so, dass nach je 5 Cbc. entzogenen Blutes die Arterien-

öffnung wieder für einige Zeit geschlossen wurde oder so, dass gleich anfangs eine starke Entleerung vorgenommen wurde, auf welche dann erst nach mehreren Minuten eine zweite folgte. Um das Ergebniss, welches diese Art der Verblutung herbeiführt, übersichtlich wiederzugeben, dazu soll die Fig. 1. u. 2 dienen. Sie sind aus den von den Thieren selbst notirten Curven abgeleitet, da diese letztern ihrer nach Metern zu messenden Länge wegen nicht mittheilbar sind. — Die Abscisse, über welche die Curven aufgetragen sind, geben die Zeit in Minuten, die Ordinaten dagegen den Druck in Mm. Quecksilber. Um aus der natürlichen Curve zu den hier vorliegenden zu gelangen, wurde in jeder der ersteren der im Anfang jeder Minute vorhandene Druck aufgesucht und in die letztere am gehörigen Orte aufgetragen; die einzelnen auf diese Weise erhaltenen Höhen wurden alsdann gradlinig mit einander verbunden. Wenn jedoch im Verlauf einer Minute eine auffallende Aenderung des Druckes eintrat, sei es in Folge eines willkürlich gesetzten Eingriffes oder eines natürlichen Vorkommens, so wurde auch dieser Druck über die zugehörige Zeit eingetragen.

Fig. 1.



Die lateinischen Ziffern über der Curve geben die Reihenfolge der Aderlässe. Die Zahlen über der Abscisse bedeuten die Pulse in 10 Sec. *Kr* bedeutet Krämpfe, | eine Pause der Beobachtung.

Der Versuch, aus welchem die Fig. 1 hergeleitet ist, wurde an einem Kaninchen von 1700 Gr. reinem Körpergewicht ausgeführt; im Verlaufe von 18 Minuten wurde demselben 11 mal Blut entzogen; und zwar jedesmal 5 Cbc., mit Ausnahme des ersten Aderlasses, dessen Volum nur 2,5 Cbc. betrug. Ausser diesem in der Messglocke gefangenen Blute ging beim Reinigen der Röhren noch mindestens 1 Cbc. verloren.

Mit Zuhilfenahme der Bemerkungen, welche auf der Curventafel selbst verzeichnet sind, wird man erkennen, dass die gleich grossen zu verschiedenen Zeiten auf einander folgenden Blutentleerungen von einer ungleichen Einwirkung auf den arteriellen Blutdruck waren. Während der ersten beiden Entleerungen sank die Hg.-Säule rasch ab, um unmittelbar nach dem Verschluss der Arterie wieder emporzusteigen, ohne dabei jedoch auf die Höhe zu gelangen, welche sie vor der jedesmaligen Entleerung eingenommen hatte. Während der 3., 4. und 5. Entleerung sinkt der Druck jedesmal sehr bedeutend, aber er steigt nach dem Schluss der Arterienmündung jedesmal wieder auf dieselbe Höhe, die er vorher besessen, und zwar gelingt ihm dieses bemerkenswertherweise ohne dass ihm krampfhafte Bewegungen der Gliedmassen zu Hilfe kommen. Der Druck auf welchen die Arterie gelangte betrug 100 Mm. Hg., obwohl jetzt schon der Blutverlust 1,3 p. C. des Körpergewichtes betrug. Von der sechsten bis zur zehnten Blutentleerung stieg zwar ebenfalls nach der Verschliessung der Arterie der abgesunkene Druck wieder empor, aber nach jeder folgenden Blutentleerung war das von ihm erreichte Maximum ein geringeres. Immerhin aber konnte sich auch nach einem Blutverlust von 3 p. C. des Körpergewichts der Druck in der Arterie noch über 50 Mm. Hg. erhöhen, ohne dass hierzu die Beihilfe krampfhafter Gliederbewegungen nothwendig gewesen wäre. Als nun aber mit der absatzweisen Blutentleerung noch weiter fortgefahren wurde, sank der Druck fort und fort bis zum Eintritte des Todes ab, so dass nur noch durch die nach jeder Entleerung eintretenden Zuckungen ein vorübergehendes Steigen bewirkt werden konnte.

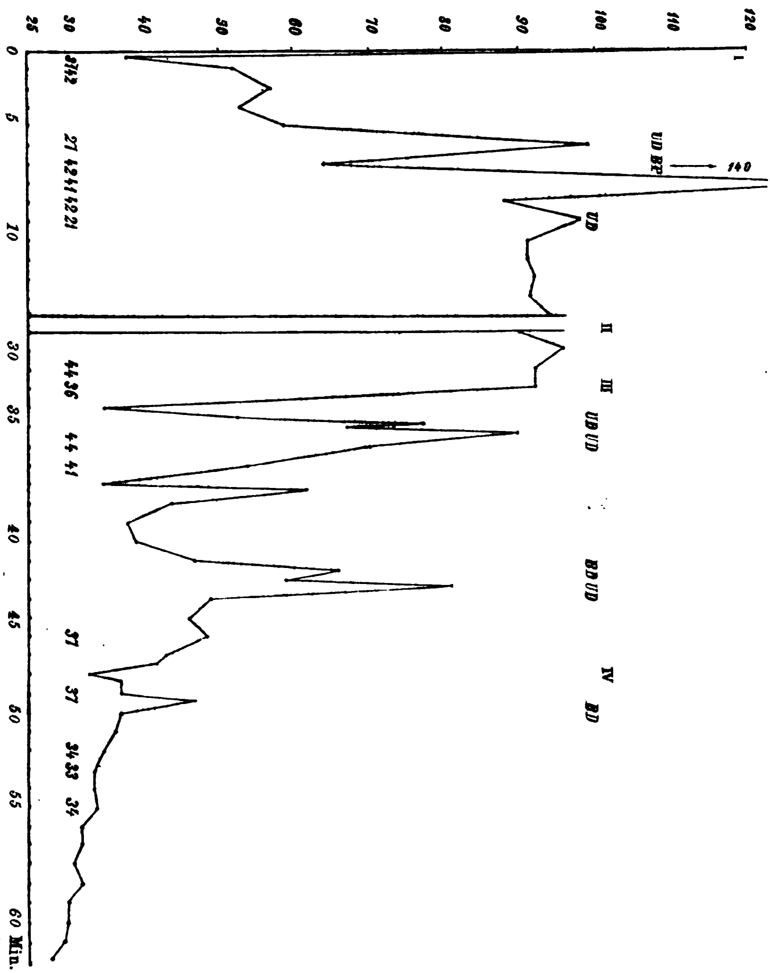


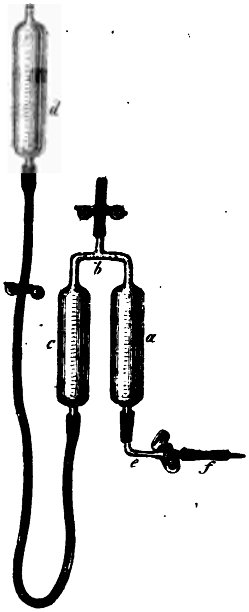
Fig. 2.

Bei I wurden 27,5 Cbc., bei II 4 Cbc., bei III 18 Cbc., bei IV 0,5 Cbc. Blut entleert. *UD* bedeutet Händedruck auf den Unterleib', *BD* Bewegung und Druck an den hintern Gliedmassen. Die Zahlen über der Abscisse geben die Pulse in 10 Sec. | bedeutet Pause der Beobachtung.

Die Curve, aus welcher Fig. 2 abgeleitet wurde, ist von einem Kaninchen geschrieben, welches 1170 Gr. rein wog. Durch sie ist ein Fall dargestellt, in welchem eine grössere Menge von Blut, nemlich 27,5 Cbc. auf einmal entleert wurden. Nach dieser ersten 2,4% des Körpergewichts betragenden Blutentleerung erhob sich die Spannung von selbst dauernd auf 53 Mm. Hg. Unter Beihilfe von Pressungen des Unterleibes und von Streck- und Beugbewegungen der hintern Gliedmassen stieg aber schliesslich die Spannung auf die Höhe von 90 Mm., auf der sie sich 30 Minuten erhielt, und erst dann in ein neues Absinken überging, als abermals 18 Cbc. Blut abgelassen waren. Nach diesem Aderlass betrug der Gesammtverlust 4% des Körpergewichts und dennoch schwankte 15 Minuten hindurch der Druck um 40 Mm. Hg. herum. Als aber nach Verfluss dieser Zeit nur noch 0,5 Cbc. Blut hinweg genommen wurde, sank der Druck wenn auch allmälig, doch stetig ab.

Nach diesen Beobachtungen wird es schon sehr wahrscheinlich, dass die bei der Pfortaderunterbindung im Darm angehäufte Blutmenge nicht im Stande sein kann die übrigen Gefässprovinzen in einen Grad von Blutleere zu versetzen, welche den Tod des Thieres veranlasst. Denn nach den vorgelegten und andern ähnlichen Beobachtungen passt sich das Gefässsystem auch einem Verluste bis zu 3% des Körpergewichts soweit an, dass der zum Leben nothwendige Druck erhalten bleibt.

Fig. 3.



Da aber den Erfahrungen, die ich bis dahin vorgeführt habe, der Einwurf gemacht werden konnte, dass die zur Pfortaderunterbindung verwendeten Individuen zufällig mit einem Gefässsystem von andern Eigenschaften begabt gewesen seien als die, an welchen der Aderlass vorgenommen wurde, so erschien es geboten, beide Versuchsanordnungen an demselben Thiere hintereinander eintreten zu lassen. Zur Erreichung dieser Absicht entnahm ich den Versuchsthieren zuerst eine grössere Quantität von Blut und bestimmte den hienach eingetretenen Abfall des arteriellen Druckes. Nachdem dieses geschehen, wurde das entleerte Blut in das Gefässsystem zurückgebracht und nun erst die schon vorher mit einem Faden umschlungene Pfortader zugebunden. Die Vorrichtungen, in welche das aus der Art. Carotis abgelassene Blut aufgenommen und wieder in die Arterie zurückgeführt werden konnte, ist in Fig. 3 abgebildet. Sie besitzt drei Gefässe *a*, *c*, *d*, deren weitere cylindrische Mittelstücke beiderseits in enge Röhren auslaufen. An der nach unten gekehrten Verengung des Gefässes *a* sitzt ein knieförmig gebogenes Glasrohr *e*, das mit einem Hahne versehen ist; sein freies Ende wird bei der Anstellung des Versuches durch einen Kautschuk in die Arteriencanüle *f* gesetzt. Die obern Röhrchen der Gefässe *a* und *c* sind durch das bogenförmige Glasrohr *b* eng mit einander verbunden. Aus der Mitte dieses letzteren steigt

ein kurzer mittelst eines Kautschukröhrchens verschliessbarer Schenkel empor, durch welchen eingefangene Luftblasen ausgelassen werden können. Zwischen den untern Enden der Gefässe *d* und *c* läuft ein Kautschukschlauch, der ebenfalls durch eine Klemme verschliessbar ist. Vor dem Gebrauche wird vom Hahne *e* an das Gefäss *a*, das Verbindungsstück *b* und die obere Hälfte des Gefässes *c* mit gereinigtem Olivenöl gefüllt. Die untere Hälfte von *c* und ein Theil des Gefässes *d* sammt dem die beiden ebengenannten Gefässe verbindenden Kautschukschlauch sind mit Hg. erfüllt.

Der Versuch, zu welchem der eben beschriebene Apparat diente, verlief folgender Massen.

Nachdem eine Schlinge um die Pfortader mit den später zu beschreibenden Vorsichtsmassregeln locker angelegt war, wurde die eine der Carotiden mit dem registrirenden Manometer in Verbindung gesetzt und in die andere eine Canüle geführt; diese letztere wurde mit Blutserum gefüllt und an den Apparat in der Weise angesetzt wie es mit *f* in Fig. 3 geschehen. Der Apparat selbst empfing seine Befestigung in der passenden Lage durch ein Statif. Waren diese Vorbereitungen beendigt, so begann die Aufzeichnung des arteriellen Blutdruckes; alsbald ward auch durch Oeffnung des Hahnes *e* das Gefäss *a* mit der Lichtung der Carotis in Verbindung gesetzt. Da auch die Klemme des Kautschukschlauches geöffnet und durch Senken des Gefässes *d* sein Hg.-Spiegel tiefer als der in *c* stand, so konnte das Blut mit Leichtigkeit in das Gefäss *a* eindringen und das dort vorhandene Oel emporheben. Wenn das Blut bis zu dem gewünschten Theilstrich in dem Gefässe *a* emporgestiegen war, so wurde der Hahn *e* geschlossen. Nach dem Verlauf von einer halben Minute oder etwas mehr wurde das Gefäss *d* so weit erhoben, bis sein Hg.-Spiegel etwa 150 Mm. über dem des Gefässes *c* stand, so dass, wenn nun der Hahn *e* geöffnet wurde, das Blut aus *a* in die Arterie zurücktreten konnte. Hierauf ward die Entziehung und die Zurückführung des Blutes in der eben beschriebenen Weise noch einmal wiederholt und dann mehrere Minuten hindurch mit der Beobachtung des Druckes fortgefahren. Alsdann wurde die Schlinge, die um die Pfortader lag, fest zugezogen und der Druck bis zum Ende des Versuches beobachtet, oder es wurde auch nach dem Ablaufe einiger Minuten die Unterbindung des zuletzt genannten Gefässes wieder gelöst.

In den beiden Tafeln 4 und 5 sind die Resultate zweier Beobachtungen mitgetheilt, die nach dem beschriebenen Plane ausgeführt worden sind. (s. S. 204 u. 206.)

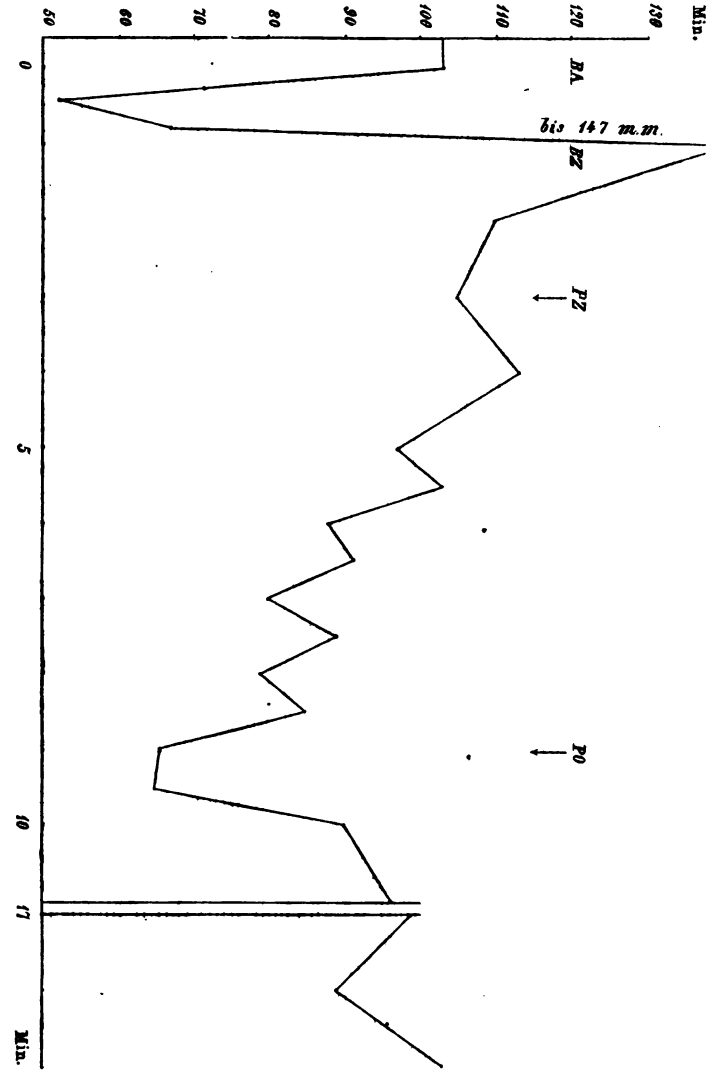
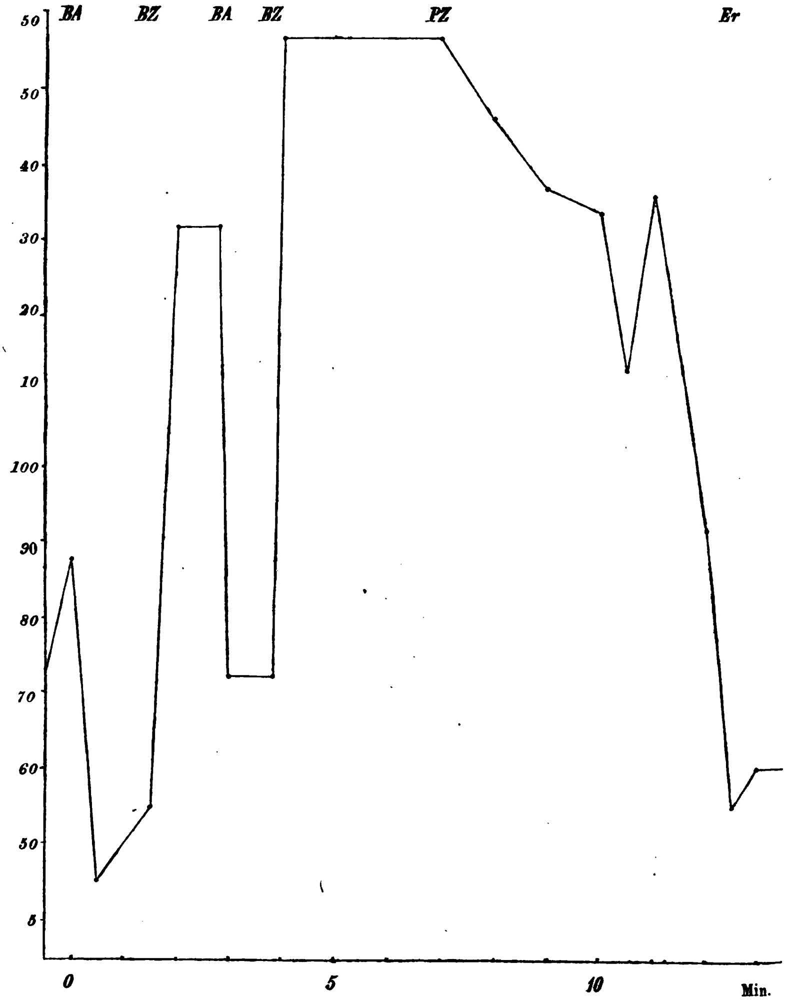


Fig. 4.

Bei *PA* wurden 20 Cbc. Blut entleert, bei *BZ* wurden sie zurückgeführt, bei *PZ* wurde die Pfortader geschlossen, bei *PO* geöffnet.

Zu dem Versuche, welcher die Fig. 4 lieferte, wurde ein Kaninchen von 1280 Gr. Gewicht verwendet. Bei Beginn der Beobachtung betrug der arterielle Blutdruck 104 Mm. Hg. Durch einen Aderlass von 20 Cbc. sank jener auf 52 Mm. und stieg darauf im Verlauf von 30 Secunden unter mehrfachen Schwankungen auf 67 Mm. Als jetzt das entleerte Blut zurückgegeben wurde, kam nach 1,5 Minute der Druck auf 105 Mm. an. In Folge der hierauf ausgeführten Umschnürung der Pfortader sank unter mehrfachen Schwankungen in Verlauf von 6 Minuten der Druck auf 65 Mm. Durch die Lösung der Pfortaderligatur wurde der Druck in Verlauf von 20 Minuten auf 96 Mm. emporgebracht.

Fig. 5.



Bei *BA* 26 Cbc. Blutverlust. Bei *BZ* wieder eingeführt. *PZ* Verschliessung der Pfortader. *Er* Erstickung des Thieres.

Das Kaninchen, welches die Fig. 5 lieferte, wog 1800 Gr. Beim Beginn des Versuchs schwankte der arterielle Druck zwischen 84 und 98 Mm.; als 25 Cbc. Blut entzogen waren, sank der Druck auf 55 Mm. Nach Beendigung des Aderlasses erhob er sich in Verlauf von 50 Secunden auf 65 Mm.

Als jetzt das entnommene Blut zurückgegeben wurde, stieg der Druck auf 142 Mm. und hielt sich hierselbst eine Minute lang. Durch die abermalige Entleerung derselben Quantität Blut sank nun der Druck auf nur 83 Mm., eine Höhe, auf der er sich mit geringen Schwankungen während 50 Secunden erhielt. Nach Zurückführung des Blutes stieg der Druck auf 172 Mm. und hielt sich dort mit kleinen Schwankungen 3 Minuten constant, bis die Pfortader unterbunden worden war; hierauf aber sank der arterielle Druck in 5,5 Minuten auf 65 Mm., worauf das Thier durch Erstickung getödtet wurde. Mit der Unterbrechung der Athmung schliesst die Curve.

Diese Versuche lehren, dass an einem und demselben Thiere ein Blutverlust von 1,3% des Körpergewichts, also ein solcher, welcher den durch die Pfortaderunterbindung veranlassten weit übertrifft, ganz anders wirkt als diese Operation. Während der arterielle Druck nach dieser mit der wachsenden Zeit tiefer und tiefer herabsteigt, strebt er nach dem Aderlass aus dem Stande, auf den er durch die plötzliche Entleerung der Aorta herabgegangen, einer neueren höheren Gleichgewichtslage zu, die weit über der das Leben bedrohenden Grenze liegt. [1])

Mit der Beseitigung der Hypothese, dass die Blutleere der Arterien durch die Absperrung derjenigen Blutmenge bedingt werde, welche sich in den verschlossenen Pfortaderwurzeln anhäuft, musste der Wunsch erwachsen, eine andere besser begründete an die Stelle zu setzen. — Der Weg, der hiezu führte, konnte nur durch neue Beobachtungen eröffnet werden. In diesem Sinne unternahm ich es zunächst, die Aenderungen des arteriellen Druckes genauer festzustellen, welche während der Verschliessung und nach Wiedereröffnung der Pfortader auftraten. Die verbesserten Hilfsmittel gewährten die sichere Aussicht, schon bei einer einfachen Wiederholung der älteren Versuche weiter als meine Vorgänger zu kommen.

Bei den Beobachtungen, die in der so eben ausgesprochenen Absicht unternommen wurden, ist abermals der Verlauf der Druckänderungen, die im Bereiche des arteriellen Systems

1) Bei einer etwaigen Wiederholung der vorstehenden Versuche dürfte es sich empfehlen, das abgelassene Blut nicht wieder zurückzuführen, sondern es durch ein gleich grosses Volum zu ersetzen, das einem zweiten Thiere entnommen wurde. Durch diese Modifikation würde es gelingen den Zeitraum der zwischen der Entleerung und der Wiedereinfüllung des Blutes liegt, beliebig zu verlängern, so dass der arterielle Druck seine neue Gleichgewichtslage wieder vollkommen zu erreichen vermöchte, was in den kurzen Zeiten nicht möglich war, die bei dem bis dahin geübten Verfahren der drohenden Gerinnung wegen gewährt werden konnten.

auftraten, durch ein in a. Carotis eingesetztes Manometer auf einen unendlichen Papierstreifen aufgeschrieben. — Die Operation, welche nöthig ist, um den Stamm der Pfortader mit einem Unterbindungsfaden zu versehen, wird, weil sie schon so oft geübt und wiederholt beschrieben worden, keiner weiteren Darstellung bedürfen. Zur Beurtheilung meiner Versuche wird dagegen die Bemerkung nicht überflüssig sein, dass ich mit peinlichster Sorgfalt jeden Blutverlust zu vermeiden suchte. Um dieses zu erreichen, wurde die Unterleibshöhle durch einen ausgiebigen Schnitt in der linea alba eröffnet und die blossgelegte vena Porta dadurch fixirt, dass ein Gehilfe das Pförtnerende des Magens mit sorgfältiger Schonung des leicht blutenden Pancreas festhielt; die Pfortader selbst wurde aus ihrem Bauchfellüberzug mittelst stumpfer Nadeln erst ringsum ausgelöst, ehe der starke Faden unter dieselbe geschoben wurde. Da ich mir die Aufgabe gestellt hatte, an demselben Versuchsthiere den Strom in der Pfortader wiederholt zu unterbrechen und wieder herzustellen, ohne das Gefäss selbst wieder bloss zu legen, so würde die Unterbindung mit Hilfe eines fingerlangen Cylinders aus polirtem Hartgummi vorgenommen, der in der Entfernung eines halben Centimeters von seiner nach der Pfortader hinzukehrenden (untern) Basis von einer Oeffnung durchbohrt war. Die beiden Enden des unter die Pfortader geschobenen Unterbindungsfadens wurden kreuzweise durch diese Oeffnung geführt und über der obern mit zwei Einkerbungen versehenen Basis des Stäbchens vereinigt, so dass der Faden eine 8förmige Schlinge umschrieb. (Ligaturstäbchen von Gräfe.) Durch leichtes Anziehen und Nachlassen der Fäden, welche über dem aus der Bauchwunde hervorragenden Ende des Stäbchens lagen, konnte also nach Belieben die Pfortader geschlossen oder geöffnet werden. War das Stäbchen angelegt, so wurde die Bauchwunde sehr sorgfältig zugenäht und dabei das Stäbchen in eine Stellung an den Bauchdecken befestigt, die jede Behinderung des Stromes in der Pfortader ausschloss. Sollte dann nach Vernähung der Bauchwunde die Pfortader geschlossen werden, so wurden die beiden Enden des Fadens so lange mit sanftem Zuge hervorgehoben, bis sich in der Umschlingung derselben, die auf dem obern Ende des Stäbchens geschah, zwei vorher angebrachte Marken berührten; sowie dieses eintrat, hatte die untere Schleife der Achtertour die Gefässhaut fest an die untere

Basis des Stäbchens angedrückt. — Während der Operation wurde der Vorfall von Darmschlingen sorgsam verhütet und nach der Anlegung der Nähte wurde die Bauchfläche des in der Rückenlage befestigten Thieres durch erwärmte wiederholt erneuerte Watte vor Abkühlung geschützt.

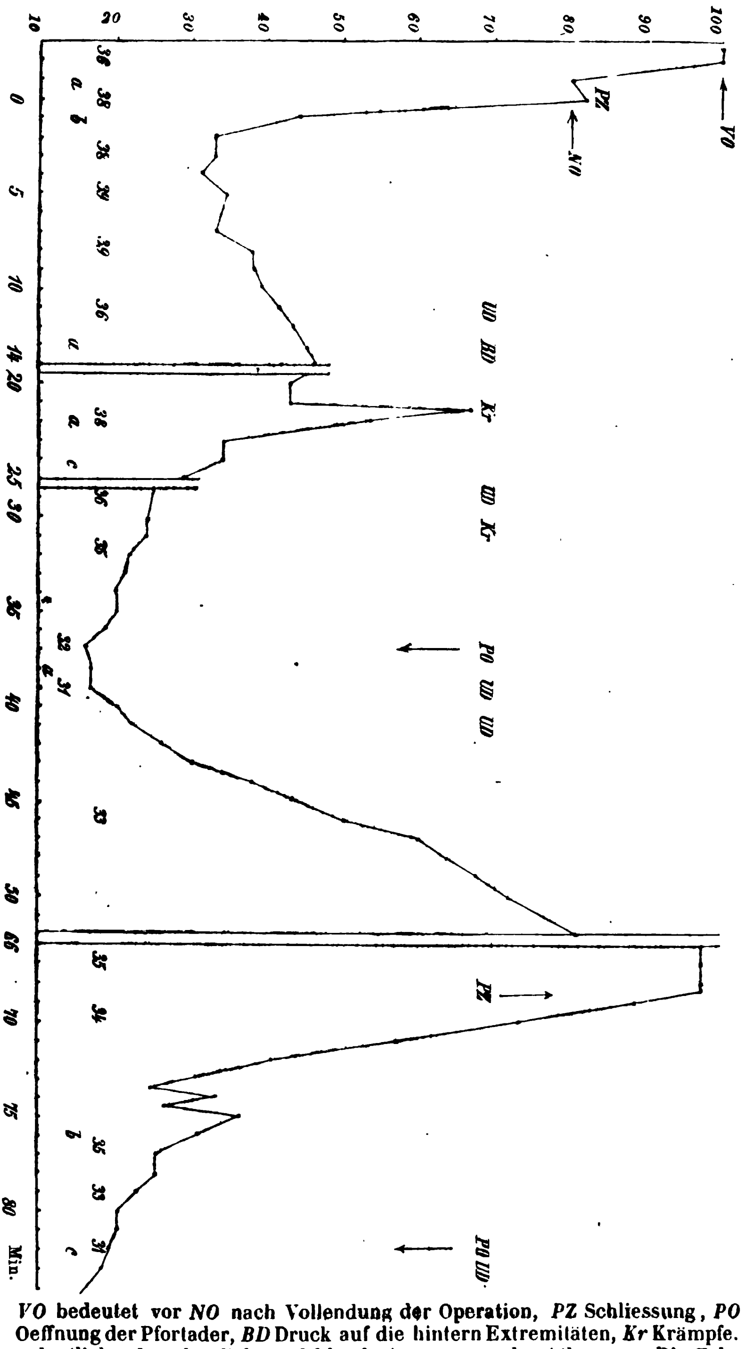
Druckbestimmungen bei unterbundener Pfortader habe ich sowohl bei unvergifteten als auch bei curarisirten Thieren unternommen. Ich beginne mit der Beschreibung der Resultate, welche unvergiftete lieferten. In einigen dieser Versuche habe ich die Messung des arteriellen Druckes schon vor der Eröffnung der Unterleibshöhle begonnen; geschah dieses, so wurde sie während der Dauer der Operation unterbrochen und erst nach Vernähung der Unterleibswunde wieder aufgenommen und dann womöglich bis zum Schluss des Versuches ununterbrochen fortgesetzt. In andern Versuchen habe ich jedoch erst nach dem Schluss der Unterleibshöhle mit der Druckmessung den Anfang gemacht.

In den zuerst genannten Versuchen hat es sich nun wiederholt herausgestellt, dass der arterielle Druck vor dem Beginn der Operation höher als nach Vollendung derselben war. Der Unterschied zwischen den beiden zu den genannten Zeiträumen gemessenen Drücken schwankte zwischen 15 bis 41 Mm. Hg. Diese Erfahrung erschien mir erwähnenswerth, weil andere Beobachter nach Eröffnung der Unterleibshöhle den Druck wachsen sahen. Da ich keine eingehenderen Untersuchungen zur Aufklärung dieses Verhaltens resp. dieses Widerspruches vorgenommen, so enthalte ich mich eines jeden, wenn auch noch so naheliegenden Deutungsversuches. —

Wenn die Schleife, welche um die Pfortader lag, zugezogen wurde, so pflegte der arterielle Blutdruck um einige Millimeter Hg. emporzugehen. Da diese Erhebung augenblicklich verschwand, wenn die zur Unterbindung nothwendigen Handgriffe vollendet waren, so dürfte sie von der mit jenen unvermeidlich verbundenen Pressung der Unterleibseingeweide abgeleitet werden.

Zur Veranschaulichung der nach dem Pfortaderverschluss eintretenden Erscheinungsreihe werde ich mich wiederum statt der schwer zu übersehenden Zahlenreihen einiger Curven bedienen; zu diesen sind aus einer grossen Reihe von Beobachtungen viere ausgewählt, die ich meinen Erfahrungen gemäss als typische ansehn muss.

Fig. 6.



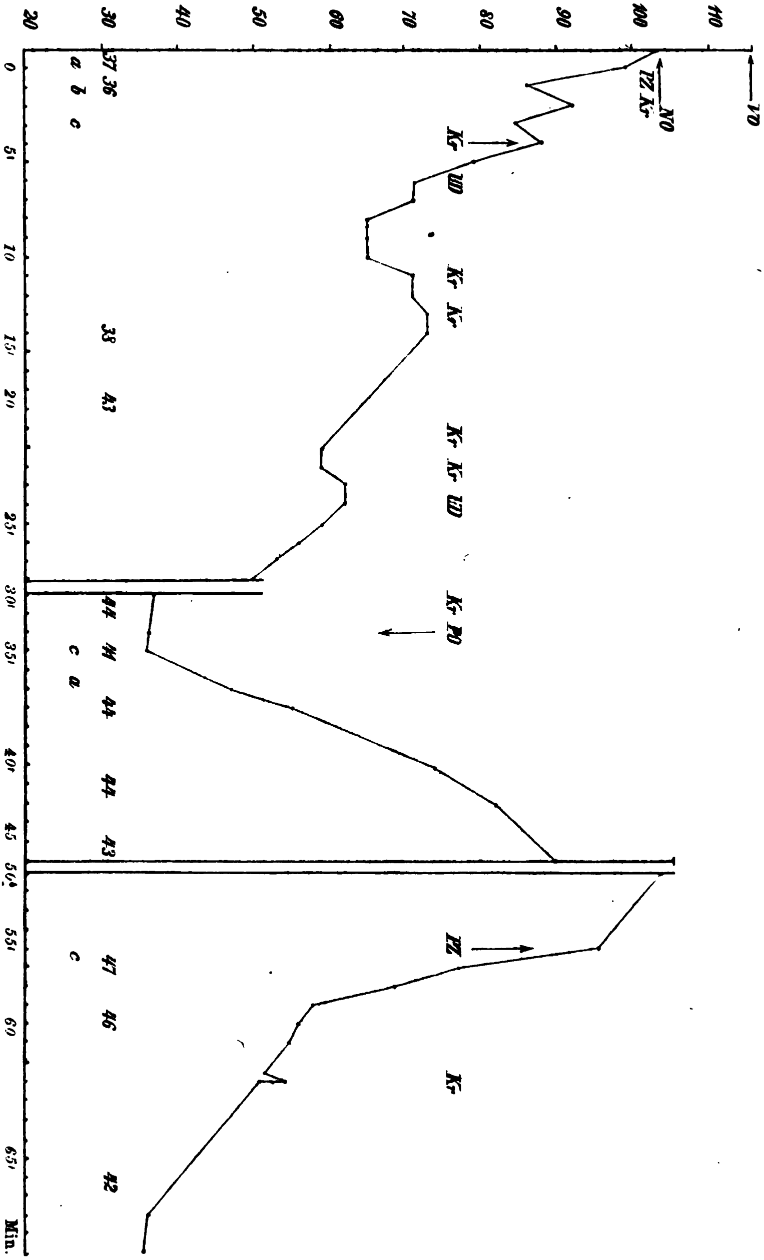
VO bedeutet vor *NO* nach Vollendung der Operation, *PZ* Schliessung, *PO* Oeffnung der Pfortader, *BD* Druck auf die hintern Extremitäten, *Kr* Krämpfe. *a* deutliche, *b* undeutliche, *c* fehlende Ausprägung der Athmung. Die Zahlen über der Abscisse geben die Pulse in 10 Secunden. | bedeutet eine Unterbrechung des Versuches.

Zu Fig. 6.

Das Kaninchen, von welchem Fig. 6 herrührt, war unvergiftet. Nach der Verschliessung der Pfortader sank der mittlere Arteriendruck während 4 Minuten von 82 Mm. auf 32 Mm. Von da stieg der Druck unter Schwankungen allmählig wieder auf 38 Mm. empor; und als jetzt zu wiederholten Malen Bauch und Beine gedrückt wurden, stieg der Druck noch weiter bis zu 46 Mm. Wegen Gerinnung musste in der 14. Minute nach dem Verschluss der Pfortader die Beobachtung unterbrochen werden. Als dies Hinderniss entfernt und in der 20. Min. die Beobachtung wieder aufgenommen wurde, stand der Arteriendruck auf 43 und erhob sich unter Krämpfen der Körpermuskeln auf 68 Mm. Als die letztern nachliessen, sank auch der Arteriendruck wieder ab und gelangte im Verlaufe von 15 Minuten auf 16 Mm. herab. In diesem Abschnitt der Curve erscheint es beachtenswerth, dass mit dem Nachlass der Krämpfe der Druck zunächst in etwa 1 Minute von 68 Mm. auf 38 sank, aber nur sehr allmählig von dort auf 16 Mm. herabkam. In der Periode dieser langsamen Abfälle traten wiederum Krämpfe der Körpermuskeln auf und ebenso wurden der Unterleib und die Hinterbeine wiederholt gedrückt, ohne dass jedoch hierdurch mehr als ein nur ganz vorübergehendes Ansteigen um einige Mm. erzeugt werden konnte. In der 35. Minute nach Unterbindung wurden die Athemzüge seltener und in der 38. Min. erlosch die Reflexempfindlichkeit des Auges. — Zu dieser Zeit ward die Pfortaderlichtung wieder hergestellt; da sich der Druck nicht wieder erhob, so wurde sein Ansteigen zwischen der 39. und 45. Minute durch mehrmalige Wiederholung eines sanften Druckes auf die Bauchwand befördert. Anfänglich (bis zur 41. Minute) war dieser Handgriff nur von einem vorübergehenden Erfolg begleitet. Jenseits dieser Zeit erhob sich dagegen nach demselben der Druck dauernd und von der 45. Minute an stieg der Druck ohne weitere Hilfe zuerst rasch auf 80 Mm. und von da ab weiter auf 98 Mm., wo er sich erhielt bis eine neue Zuschnürung der Pfortader stattfand. Nach dieser senkte sich der Druck während dreier Minuten bis auf 25 Mm.; von da ab vollführte er regelmässig wiederkehrende Schwankungen, durch die derselbe nur vorübergehend emporgebracht wurde. Nach der 77. Minute verschwanden auch diese Schwankungen und nun sank der Druck stetig bis zum Tode des Thiers, der durch eine erneute Eröffnung der Pfortader auch nicht mehr aufzuhalten war.

Während dieser Versuchsdauer hielt sich die Pulszahl ziemlich gleich hoch. Unmittelbar nach der ersten Unterbindung stieg sie um wenige Schläge als der Druck rasch absank. — Als er dagegen sehr niedrig geworden und mehrere Minuten hindurch geblieben war, nahm die Zahl ab. Nachdem der Druck im Verlauf der Wiedereröffnung auf seine normale Höhe emporgegangen war, erhob sich die Pulszahl und verhielt sich dann ähnlich wie nach der ersten Unterbindung.

Fig. 7.



VO bedeutet vor Beginn, *NO* nach Vollendung der Operation, *PZ* Schliessung, *PO* Oeffnung der Pfortader, *a* deutliche, *b* undeutliche, *c* fehlende Ausprägung der Athmung. *UD*, *BD* Druck auf den Unterleib und die Hinterbeine, *Kr* Krämpfe. Die Zahlen über der Abscisse geben die Pulse in 10 Secunden.

Zu Fig. 7.

Der arterielle Mitteldruck stand vor Beginn der Operation auf 116 Mm., nach Vollendung derselben auf 104 Mm. Während der Zuschnürung der Pfortader ging er auf 90 Mm. herab. Als er nach dem Schluss der Vene zu sinken begann, stellten sich alsbald Krämpfe der Sceletmuskeln ein, die sich im Verlaufe der folgenden 33 Minuten in kürzeren oder längeren Zwischenzeiten öfter wiederholten. Der Einfluss, den dieselben auf den arteriellen Druck übten, bestand bis zur 24. Minute hin, wo der Druck nahezu auf 60 Mm. gesunken war, entweder in einer vorübergehenden Erhöhung desselben oder mindestens in einer zeitweisen Hemmung des Absinkens. Aehnliches bewirkte in dieser Periode ein Druck auf den Unterleib. Jenseits der genannten Zeit waren aber die Krämpfe nicht mehr vermögend das Sinken des Druckes zu hemmen, so dass der Druck nun stetig bis auf 36 Mm. herunter stieg. Als in der 33. Minute nach dem Pfortaderschluss die Ligatur der Pfortader gelöst war, hielt sich der arterielle Druck noch eine Minute lang auf 36 Mm. und begann von da an ein stetiges Steigen, in Folge dessen er nach 16 Minuten auf 104 Mm. gelangte. Von dieser höchsten Höhe senkte er sich; als er auf 96 Mm. angelangt war, wurde die Pfortader zum zweiten Male zugeschnürt; es blieben die Krämpfe aus, und nun sank der arterielle Druck in 6 Minuten auf 54 Mm. Ein vorübergehender Krampf, der in der 7. Minute nach der zweiten Pfortaderunterbindung eintrat, bewirkte eine ganz vorübergehende Erhöhung des Druckes; nach seinem Verschwinden setzte sich das Sinken fort, bis das Thier etwa 15 Minuten nach der zweiten Pfortaderunterbindung abstarb. —

Während des Absinkens nach der ersten Unterbindung wuchsen die Pulszahlen von 36 auf 44 Schläge in 10 Sec. — so dass auf den niedersten Druck (von 36 Mm.) die höchste Pulszahl fiel. — Während des Steigens, das nach der Lösung der Ligatur eintrat, behielt der Puls diese Häufigkeit, mehrte sich dann noch, als die Zuschnürung von neuem erfolgte, und nahm erst wieder eine geringere Häufigkeit an, als der Druck unter 40 Mm. herabging.

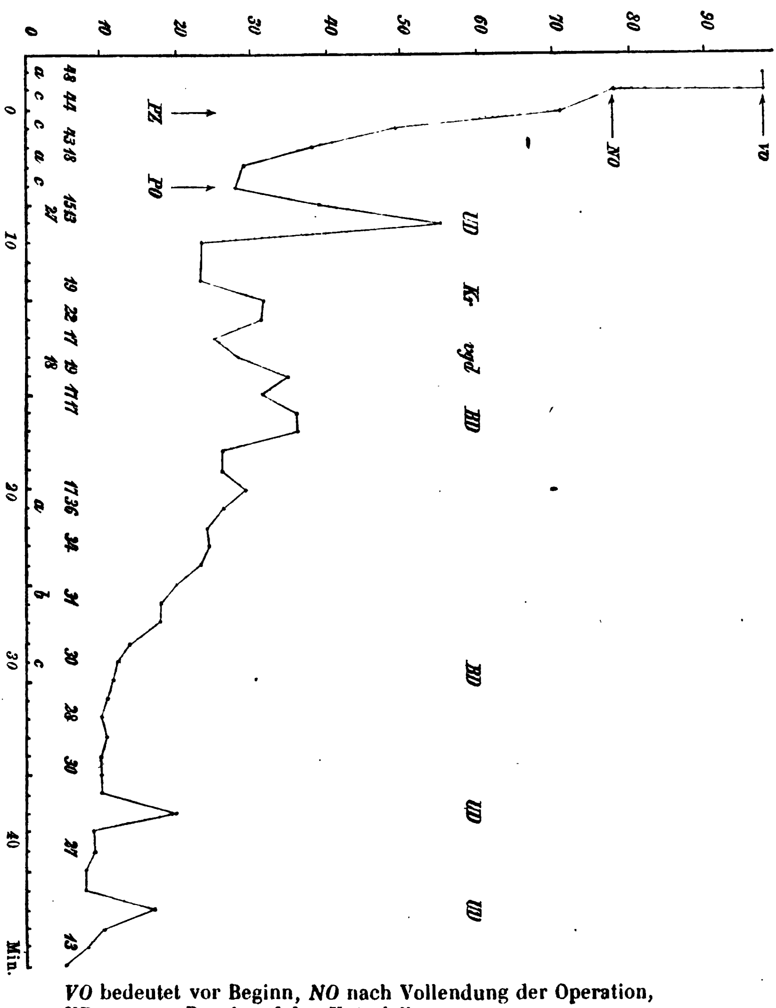


Fig. 8.

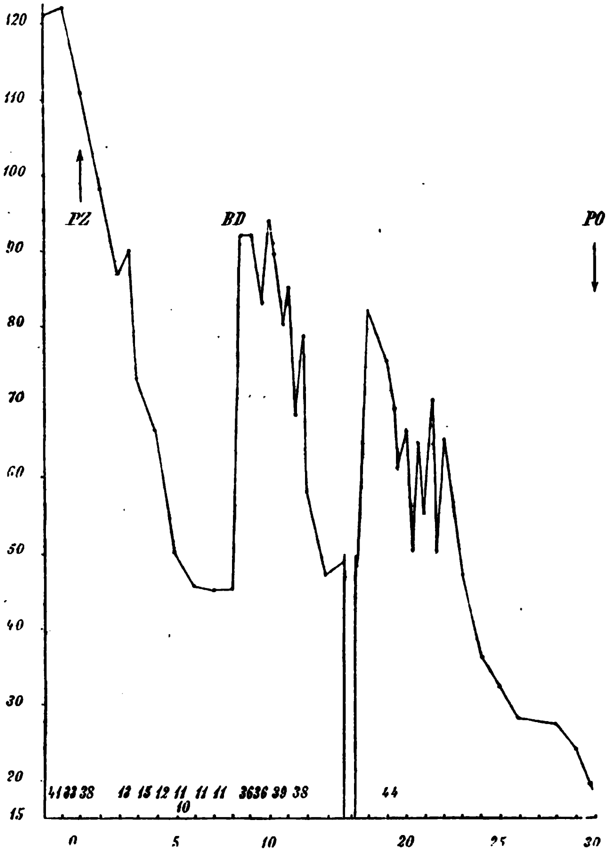
VO bedeutet vor Beginn, *NO* nach Vollendung der Operation,
UD ,, Druck auf den Unterleib,
BD ,, Druck auf die hintern Extremitäten,
Kr ,, Krämpfe der Körpermusculatur,
vgd ,, Durchschneidung des n. vagi,
PZ ,, Schliessung, *PO* Oeffnung der Pfortader,
a deutliche, *b* undeutliche, *c* fehlende Ausprägung der Athmung.
Die Zahlen über der Abscisse geben die Pulse in 10 Secunden.

Zu Fig. 8.

Dieser Versuch zeichnet sich von den vorhergehenden dadurch aus, dass der arterielle Druck, der nach der Verschliessung der Pfortader in drei Minuten von 72 Mm. bis auf 28 Mm. gesunken war, nicht wieder von selbst anstieg als zu jener Zeit die Ligatur gelöst wurde, sondern fortwährend weiter sank, ausgenommen wenn ihn vorübergehend Krämpfe oder Drücke auf den Unterleib und die Beine erhöhten. Diese erhöhende Wirkung der Unterleibspressung fehlte auch nicht kurz vor dem Tode des Thieres, welcher erfolgte als der arterielle Druck auf 5 Mm. herabgekommen war.

Das Herz, welches beim Beginn des Versuchs 48 Mal in 10 Sec. geschlagen hatte, verminderte ganz plötzlich die Häufigkeit seiner Schläge vor der Lösung der Pfortaderligatur und fuhr mit diesen seltenen Schlägen fort, trotzdem dass beide n. vagi durchschnitten waren. Acht Minuten nach der Abtrennung der genannten Nerven erhob sich plötzlich die Schlagzahl wieder auf 36 in 10 Sec., dann aber sank die Häufigkeit der Pulse bis zum Absterben des Thieres.

Fig. 9.



PZ bedeutet Schliessung, *PO* Oeffnung der Pfortader, *BD* Druck auf die untern Gliedmassen. Die Zahlen über der Abscisse geben die Pulse in 10 Secunden.

Zu Fig. 9.

Das Thier, welches zu diesem Versuche diente, war schwach mit Curare vergiftet. Die beiden n. vagi waren gleich anfangs durchschnitten. — Noch vor der Eröffnung der Unterleibshöhle zeigten sich in der Curve des arteriellen Druckes grosse periodische Schwankungen. Diese dauerten fort als auch die Pfortader geschlossen war, ohne dass sie jedoch mehr als nur vorübergehend den Druckabfall zu hindern vermochten. Im Verlauf von 7 Minuten sank der Druck von 110 Mm. auf 45 Mm. Als zu dieser Zeit ein gelinder Druck auf die hintern Extremitäten angebracht war, stieg die Hg.-Säule ganz plötzlich empor auf 92 Mm.; auf dieser Höhe traten nun grosse Schwankungen ein, unter deren Anwesenheit der arterielle Druck allmählig bis auf 47 Mm. herabging. Als nach Beseitigung einer Gerinnung die 3 Minuten lang unterbrochene Messung des Druckes wieder aufgenommen wurde, befand sich derselbe in einer aufsteigenden Bewegung, die ihn rasch auf 82 Mm. emportrieb. Von dieser Höhe sank er unter Ausführung grösserer und kleinerer Schwankungen bis zum 28. Mm. herab; hier verschwanden die Schwankungen, und kehrten nicht mehr wieder.

Das Herz, welches im Beginn des Versuchs häufig geschlagen hatte, verlangsamte nach der Pfortaderunterbindung seine Schläge mehr und mehr, und zwar in dem Maasse in welchem der arterielle Druck abnahm. Als der Druck wieder stieg, wurden auch die Herzschläge wieder häufig und hielten sich nun trotz des sinkenden Druckes auf einer hohen Zahl.

Aus dem Bilde, das durch die nahezu ununterbrochene Aufzeichnung der arteriellen Druckänderung gewonnen ist, ergiebt sich, dass zwar in allen Fällen nach der Unterbindung der Pfortader der Druck absinkt, dass sich aber die Senkungscurve wesentlich verschieden gestalten kann. Die einfachste Form nimmt die Curve an, wenn der Rumpf und die Glieder der Thiere in durchaus ruhiger Lage verharren und wenn im Bereiche der Gefässnerven keine Erregungen eintreten. Unter dieser Bedingung gestaltete sich unsere Curve ähnlich wie diejenige, welche während der Reizung des n. vagus oder eines Aderlasses aus einer Arterie gezeichnet worden, d. h. es sinkt der Druck aus dem höchsten Stande den er einnahm, anfangs rasch und dann mit der fortschreitenden Zeit langsamer und langsamer ab. Insofern besteht jedoch zwischen dem Druckabfall durch den Aderlass und durch die Vagusreizung einerseits und demjenigen nach dem Pfortaderverschluss anderseits ein wesentlicher Unterschied, als die Zeit, welche zur Erzeugung einer gleich grossen Druckveränderung nothwendig ist, in dem letztern Falle sehr viel länger dauert.

Einen weit weniger glatten Ablauf zeigt die Curve des sinkenden Druckes, wenn die Sceletmusculatur in Krämpfe verfällt, wenn Erregungen der Gefässnerven eintreten oder auch wenn die Gliedmassen und die Bauchwand während des Pfortaderverschlusses gedrückt werden. Sowie eins oder das andre dieser Ereignisse eintritt, wird das Sinken nicht bloss unterbrochen, sondern in der Regel in ein Aufsteigen umgewandelt. Die Grösse des Effectes, welchen dem Anschein nach gleich starke Krämpfe oder die in Wirklichkeit gleich starken Pressungen des Leibes und der Gliedmassen auf die Umkehr der Curve ausüben, ist zu verschiedenen Zeiten nach der Pfortaderunterbindung ungleich gross; im Anfang, wenn erst seit wenigen Minuten die Unterbindung bestand, erhöhen sie den Druck bedeutend, während sie dieses nur in sehr untergeordnetem, oft kaum sichtbarem Grade vermögen, wenn sich der arterielle Druck schon minutenlang in der Höhe von 20 Mm. Hg. bewegte. — Unter allen Umständen jedoch sind die Wirkungen der genannten Begebnisse von sehr vorübergehender Natur; die aufsteigende Bewegung schlägt alsbald wieder in die sinkende um, sowie die Krämpfe und die Berührungen aufgehört haben, so dass durch sie kein neuer Gleichgewichtszustand geschaffen werden

kann, der ihr Verschwinden überdauerte. — Dasselbe gilt auch von den Erregungen der verengenden Gefässnerven, vorausgesetzt dass von ihnen die Erhöhungen des arteriellen Druckes bedingt sind, welche ohne sichtbare Muskelkrämpfe in den sich selbst überlassenen Thieren auftreten.

Die Schwankungen, durch welche sich die Herzschläge und die Athemzüge in der arteriellen Curve ausprägen, werden nach Unterbindung der Pfortader sogleich flacher und sie verschwinden vollständig, wenn der arterielle Druck schon bedeutend gesunken ist.

Wendet man sich von der Betrachtung der Druckänderungen, die während der Unterbindung der Pfortader eintreten, zu denjenigen, die sich nach der Wiederherstellung ihrer Lichtung bemerklich machen, so findet man zunächst Fälle, in welchen unmittelbar nach der Lösung der Ligatur das Aufsteigen des arteriellen Druckes wieder beginnt und so lange fortschreitet, bis die früher vorhandene Spannung erreicht ist. — In andern Fällen verharrt dagegen der arterielle Druck noch Secunden, ja Minuten lang auf seiner niedern Stufe und beginnt erst dann zunächst sehr allmählig und darauf rascher emporzugehn. Treten während des Aufsteigens active oder passive Bewegungen auf, so beschleunigen diese das schon vorhandene Anwachsen des Druckes beträchtlich — andere Male ereignet es sich aber auch, dass auf die Lösung der Ligatur kein spontanes Ansteigen des arteriellen Druckes folgt; Muskelkrämpfe und passive Bewegungen können dann noch die Quecksilbersäule emportreiben, aber ebenfalls nur sehr vorübergehend. Dieser Erfolg, der nur ausnahmsweise eintritt, wenn die Ligatur nach einer kurzen Zeit ihres Bestehens entfernt ward, bildet das regelmässige Vorkommen, wenn der Wiedereröffnung der Pfortader Minuten hindurch ein sehr niedriger Druck voranging, in welchen die Reizbarkeit des Nervensystems dem Erlöschen nahe kam.

Die Zahl der Pulse wird durch die Pfortaderunterbindung insofern regelmässig beeinflusst, als dieselbe stets und selbstverständlich eine geringe wird, wenn das Thier durch den dauernden Verschluss dem Tode nahe gebracht wurde. Im Beginn des Versuches kann man sich dagegen ebenso wohl auf ein Beharren wie auf eine Vermehrung oder auch auf eine Verminderung der Pulszahl gefasst machen. — Wenn sich mit dem absinkenden Drucke die Pulszahl mehrt, so kann diese Beschleu-

nigung während der ganzen Zeitdauer vorhalten, in welcher die Reizbarkeit des Nervensystems noch unversehrt bleibt (Fig. 7). — Oder aber es schlägt diese Beschleunigung in eine Verlangsamung um wenn der arterielle Druck beträchtlich, etwa auf 40 bis 20 Mm. herabgestiegen ist. Das Auftreten dieser geringen Pulszahl ist von einer Erregung der centralen Enden der nerv. vagi unabhängig, da sie auch noch nach der Zerschneidung dieser Nerven am Halse fortbesteht. Zuweilen hebt sich der Puls wieder, wenn der niedre arterielle Druck, sei es vorübergehend oder dauernd, sich in einen höhern verwandelt; zuweilen aber ist auch die Druckänderung in den Arterien ohne Einfluss auf den Puls. In allen Fällen aber wächst die anfangs erniedrigte Frequenz mit der Dauer des Versuches wieder an, so dass, wenn durch die dauernde Verschliessung das Thier dem Tode entgegengeht, in der Mitte zwischen der anfänglichen und der spätern durch das Absterben erzeugten Verlangsamung ein Zeitraum liegt, in welchem der Puls sich wieder beschleunigt.

Wenn man nun mit Hilfe der durch die Curve gewonnenen Thatsachen nach dem Grunde sucht, wesshalb die Pfortaderunterbindung die arterielle Spannung auf ein Minimum herabdrückt, so stellt sich Folgendes heraus.

Da mit der vollendeten Umschnürung der arterielle Druck augenblicklich zu sinken beginnt, so kann der Grund, aus welchem die Pfortaderverschliessung den Kreislauf stört, kein secundärer sein, und da der Druck ganz allmählig sinkt, so dass er erst im Verlaufe von vielen Minuten zu seinen niedrigsten Werthen kommt, so kann die Kraft der wirksamen Ursache in jedem Augenblick eine nur geringe sein, aber die Effecte, welche sie zu verschiedenen Zeiten hervorgebracht, summiren sich zu einer Gesammtwirkung. — Die Betrachtung, welche auf den abfallenden Druck anwendbar war, gilt auch für den aufsteigenden nach Lösung der Unterbindung. —

Dieser allgemeinen Bemerkung gemäss kann die Ursache des absinkenden Druckes nicht in einer Lähmung der Gefässnerven liegen. Abgesehen davon, dass diese Lähmung nicht schon im Momente der Unterbindung eingetreten sein konnte, spricht gegen die Annahme, sie als die wirksame Ursache anzusehen, auch noch vieles andere, was im Verlaufe der Curve eintritt, namentlich die Erscheinung, dass die kleinern und grössern Druckschwankungen, welche von den Bewegungen des Herzens

und des Brustkorbes veranlasst werden, so bald nach der Unterbindung der Pfortader an Umfang abnehmen, was doch niemals nach der Durchschneidung des Halsmarkes, also nach der ausgiebigsten Entkräftung der Gefässnerven beobachtet wird. Noch weniger vereinbar mit dem Bestande einer Lähmung der Gefässnerven ist das Erscheinen von Druckschwankungen, die in Ermangelung jeder andern Veranlassung nur auf Erregungen der verengenden Gefässnerven zurückzuführen sind; denn sie sind ihrem zeitlichen Verlaufe gemäss ebensowohl unabhängig von der Athmung, als auch von irgend welcher andern Körperbewegung. Wenn aber die Lähmung der Gefässnerven nicht die Ursache für den Druckabfall nach dem Verschluss der Pfortader ist, so kann es umgekehrt nicht bezweifelt werden, dass schliesslich der niedre Druck die Nerven des Herzens und der Gefässe ebenso wie die aller übrigen Körpertheile zum Absterben bringt.

Die Wahrnehmung, dass die Excursionen des Pulses in der Druckcurve bald nach der Pfortaderunterbindung undeutlich und endlich vollkommen unsichtbar werden, könnte zu der Meinung veranlassen, dass die nächste Folge jener Operation in einer mit der Zeit wachsenden Herzlähmung bestehe. Aber auch diese Unterstellung wird sogleich hinfällig, wenn man erwägt, dass sich zwischen der Zahl der Herzschläge und den übrigen Folgen des Pfortaderverschlusses gar keine regelmässige Beziehung findet, und noch mehr, dass die Pulsschläge sich von dem Augenblicke an wieder deutlich ausprägen, in welchem man das Herz durch irgend welche Mittel reichlich mit Blut speist. Hieraus folgt, dass der schwache Ausdruck des Pulses in der Curve von der mangelhaften Füllung des Herzens mit Blut, keineswegs aber von der fehlenden Energie oder der veränderten Zahl der Herzcontractionen abhängt.

Endlich empfängt die Ableitung, welche aus der Bestimmung der Blutmenge in den abgesperrten Unterleibsgefässen und aus den Folgen der Blutentziehung gewonnen war, eine weitere Bestätigung durch die in der Curve aufgezeichneten Erscheinungen. Jeder sanfte Druck, welcher auf die Schenkel und auf den Unterleib geübt wurde, trieb augenblicklich die Quecksilbersäule empor. Da sich nun für diesen Zusammenhang gar kein anderer Grund als der einsehen lässt, dass das in der Vena cava und ihren Verzweigungen angehäufte Blut durch den von aussen kommenden Druck in das Herz und damit dessen Nutzeffect be-

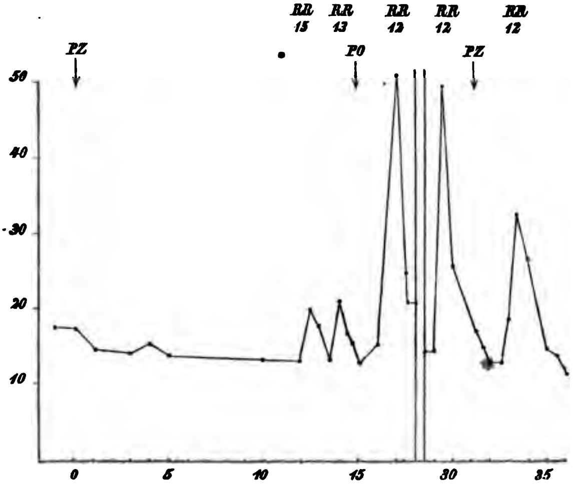
fördert werde, so liegt hierin auch der Beweis dafür, dass es den dem Kreislauf noch zugängigen Bahnen keineswegs an Blut fehle.

Durch die genauere Darlegung der arteriellen Druckänderungen ist allerdings die Zahl der möglichen Erklärungen für das Entstehn derselben eingeschränkt worden, aber es ist doch nicht gelungen, eine von ihnen als die zureichende zu bezeichnen. Dieses war, solange man sich auf die Bestimmung des Druckes allein beschränkte, vorauszusehn, weil man hierdurch nur einen Aufschluss über den Füllungsgrad der Aorta, nicht aber darüber erhält, ob sein geringer Werth durch eine Verlangsamung des Zuflusses oder durch ein beschleunigtes Ausströmen bedingt sei. Wenn nun auch mit der Entscheidung hierüber unser letztes Ziel noch keineswegs erreicht ist, so musste sie doch jedenfalls erfolgen, weil erst, nachdem dieses geschehn, eine vollständige Einsicht in den Blutstrom während der Pfortaderunterbindung gewonnen war. Zu diesem Ende unternahm ich noch zwei weitere Versuchsreihen.

In der ersten derselben wurden die Druckänderungen gemessen, welche durch den Pfortaderschluss nach Durchschneidung und bei Reizung des Halsmarkes erzeugt werden. Die Operation, welche der Messung voranging, begann mit der Durchschneidung des Markes zwischen Atlas und Hinterhaupt. Da es, wie gesagt, in der Absicht lag das Rückenmark elektrisch zu reizen, so wurden alsdann von der Schnittwunde aus zwei Platindrähte, die bis auf ihre Spitzen isolirt waren, in den Rückenmarkscanal geschoben und in der Lage, welche sie empfangen, unverrücklich festgebunden, so dass der Inductionsstrom bei verschiedenen Reizungen immer dieselben Rückenmarksstellen durchsetzte. Zur Vermeidung der Muskelkrämpfe in den Perioden der Reizungen waren die Thiere mit Curare vergiftet worden. Die Vorbereitungen, welche behufs der Pfortaderunterbindung nothwendig waren, wurden in der früher beschriebenen Weise ausgeführt. Dasselbe gilt von der Notirung des arteriellen Druckes.

Die Ergebnisse, welche die Spannung in der Carotis lieferte, sind in den Figuren 10 u. 11 übersichtlich wiedergegeben.

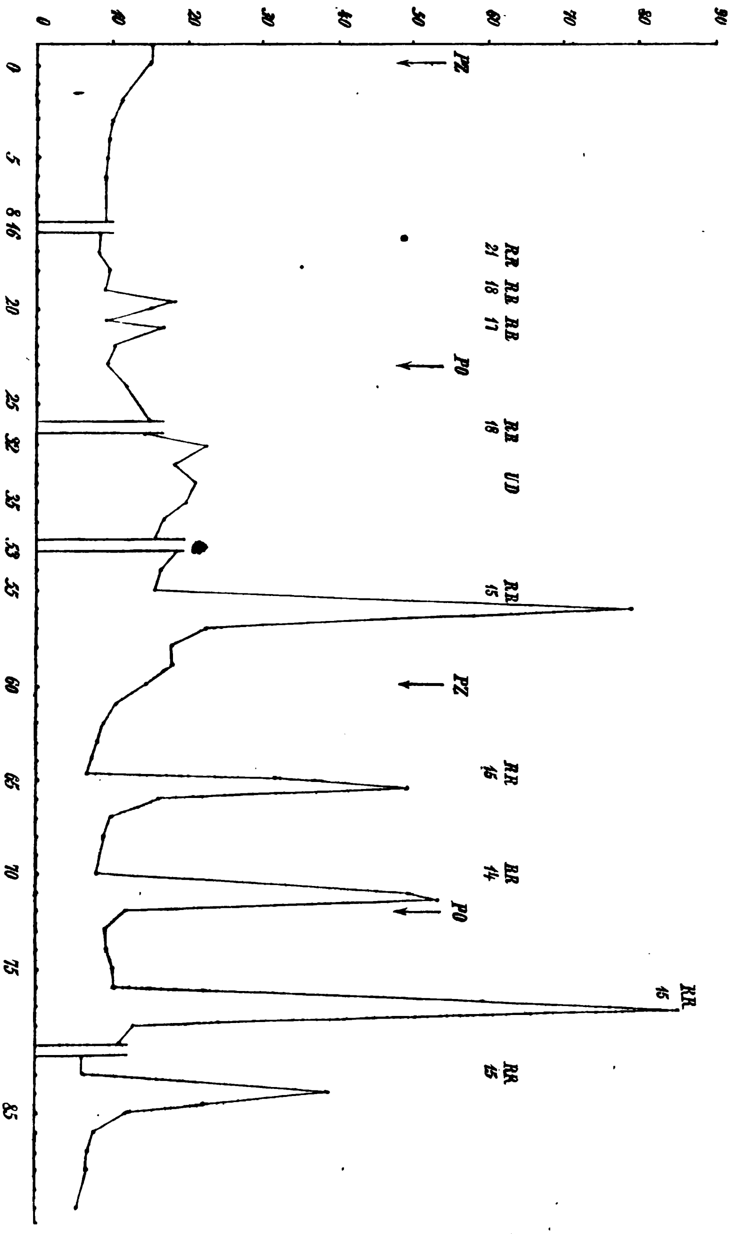
Fig. 10.



Bei *PZ* wurde die Pfortader geschlossen, bei *PO* geöffnet. *RR* bedeutet Rückenmarksreizung, die Zahl darunter den Rollenabstand in Ctm.

Bei einer Durchsicht derselben wird man erkennen, dass der ohnehin niedrige arterielle Druck noch tiefer hinabsteigt, so oft die Pfortader verschlossen wird. Dieser absteigende Theil der Curve gleicht demjenigen, welcher nach derselben Operation an den Thieren mit unversehrtem Halsmarke auftrat, insofern als die Senkung im Ganzen sehr allmählig geschieht, und auch insofern als in den ersten Minuten nach der vollendeten Unterbindung der Abfall rascher als in den darauffolgenden Zeiten vor sich geht. Die absteigenden Curvenabschnitte bei unversehrtem und zerschnittenem Halsmark unterscheiden sich jedoch dadurch, dass im letztern Falle das Sinken, wenn es bis zu einer gewissen Grenze gekommen, still zu stehn scheint. Ich sage scheint, da es möglich bleibt, dass bei einer noch weitern Fortsetzung der Beobachtung der arterielle Druck vielleicht doch noch tiefer geht. — Der absolute Werth um welchen nach durchschnittenem Halsmark und unterbundener Pfortader der arterielle Druck sinkt, ist selbstverständlich ungemein viel kleiner

Fig. 11.



PZ bedeutet Schliessung, *PO* Oeffnung der Pfortader, *RR* Reizung des Halsmarkes, die darunter stehende Zahl den Rollenabstand, *UD* Druck auf den Unterleib.

als er unter gleichen Umständen bei unverletztem Halsmark ausfällt, ja man würde in einzelnen Fällen an der Bedeutung der Pfortaderunterbindung als Druck erniedrigendem Mittel zweifelhaft werden können, wenn sich nicht ebenso constant und ebenso hoch der arterielle Druck wieder emporhöbe, nachdem das Unterband gelöst ist. —

Die Erscheinung, dass die Pulsschläge nach dem Pfortaderverschluss in der von der Arterie geschriebenen Curve zuerst nur undeutlich und schliesslich gar nicht mehr ausgeprägt werden, obwohl sie vorher sehr deutlich markirt sind, findet sich bei Thieren mit durchschnittenem Halsmark ebenso wieder wie bei unversehrtem Marke; ebenso wie im letztern Falle gilt es auch hier, dass mit der Wiederkehr eines höhern Drucks, der durch die Pressung der hintern Gliedmassen bewirkt wird, die Pulsschläge augenblicklich wieder hervortreten.

Wir waren, wie man sich erinnern wird, auf Seite 222 dabei stehn geblieben, dass der niedre Füllungsgrad der Aorta entweder durch eine Erleichterung des Abflusses aus derselben, oder durch eine Verminderung des Zuflusses in das Herz hinein zu erklären sei. Wollte man nun annehmen, dass die Verschliessung der Pfortader in der ersteren Richtung dadurch wirke, dass sie auf reflectorischem oder irgend welchem andern Wege die verengenden Gefässnerven lähme und desshalb Widerstände wegschaffe, welche in den kleinen Arterien bestehn, so würde diese Unterstellung auf das Sinken bei zerschnittenem Halsmarke sicherlich nicht passen; denn hier bewerkstelligt der Verschluss der Aorta noch das Sinken, obwohl schon vorher die Gefässnerven gelähmt waren.

Diese Erfahrung würde für die Aufhellung des Mechanismus, durch welchen der Pfortaderschluss zur Blutarmuth der Aorta führt, von allgemeiner Bedeutung werden können, wenn sich nicht das gelähmte von dem ungelähmten Thiere durch eine hier belangreiche Besonderheit unterschiede. Mit der Durchschneidung des Halsmarkes verliert nemlich das Gefässsystem die ihm vorher eigenthümliche Accommodationsfähigkeit gegen den variablen Blutgehalt, so dass z. B. ein Blutverlust von 10 bis 15 Cbc. genügt, um ein durch die Zerschneidung des Halsmarks gelähmtes Kaninchen zu tödten. In Hinblick auf dieses Verhalten wird man eine selbst geringe Blutmenge, die sich in den

Darmgefässen aufstaut, nicht mehr für so gleichgiltig halten wie man dieses beim ungelähmten Thiere thun durfte.

Wenn das Rückenmark der Thiere tetanisirt wurde, so erhob sich (siehe Fig. 10 u. 11), vorausgesetzt dass der Inductionsstrom von hinreichender Stärke war, der arterielle Druck ebensowohl während offener als auch während verschlossener Pfortader sehr beträchtlich, zum Zeichen, dass auch im letztern Fall die Gefässnerven vom Rückenmark an bis zu ihrem Ende durchaus reizbar waren. Nur in einem Punkte zeigt sich etwas Auffälliges. Vergleicht man nemlich die Geschwindigkeit, mit welcher die Reizung den arteriellen Blutdruck bei offener und bei verschlossener Pfortader erhebt, so ist ausnahmslos zu sehn, dass dieses Ansteigen bedeutend langsamer nach Unterbindung der Pfortader geschieht. Könnte man nun voraussetzen, dass jedesmal die kleinen Arterien gleich rasch, in gleicher Zahl und in demselben Umfange zusammengezogen seien, so würde aus diesem Verhalten folgen, dass in gleicher Zeit während verschlossener Pfortader weniger Blut aus dem Herzen in die Aorta gelangte als bei offener. Diese Voraussetzung gewinnt aber an Halt, wenn während der Pfortaderunterbindung, trotzdem dass stärkere Ströme zur Reizung des Rückenmarks benutzt wurden, dennoch das Aufwachsen des Druckes langsamer erfolgte als dieses bei Anwendung schwächerer Inductionsströme während des Offenstehens der Pfortader geschah. Wie weit dieses eintrifft, zeigt die folgende Tabelle, deren Zahlen durch die Ueberschriften der Stäbe verständlich sein werden.

Zustand der Pfortader	Druck in der Carotis vor der Reizung	Druck in der Carotis im Maxim. während d. Reizung	Dauer des Aufsteigens in Sec.	Rollenabstand
	Mm.	Mm.		
offen . . .	28	142	10	21
geschlossen .	17	30	15	18
geschlossen .	20	28	27	17
offen . . .	25	34	30	?
offen . . .	25	89	20	15
geschlossen :	17	59	40	15
geschlossen .	19	61	50	14
offen . . .	20	95	32	15
geschlossen .	16	49	50	14

Die Auslegung, welche vorhin für die eben mitgetheilte Erfahrung gegeben ward, lässt sich, wie es scheint, mit noch grösserer Berechtigung auf das entsprechende Verhalten anwenden, welches sich bei der Unterbindung der Aorta unmittelbar unterhalb des Zwerchfells einstellt. Durch ein Manometer, welches in einer der Carotiden sitzt, zeigt es sich, dass das Anwachsen des Drucks beziehungsweise die Füllung der Gefässe oberhalb des unterbundenen Ortes viel rascher fortschreitet bei offener als bei verschlossener Pfortader. Wie sollte sich dieses nun anders als durch einen ungleich raschen Zufluss des Blutes erklären lassen? — Somit fehlte es nicht an Anzeichen, wohl aber an einem unwiderleglichen Beweise dafür, dass durch den Verschluss der Pfortader die zum Herzen strömende Blutmenge vermindert werde. Indem wir unser Bestreben auf die Gewinnung eines solchen richteten, schien es uns zunächst nicht ohne Belang, durch einige Versuche zu ermitteln, wie gross die Blutmenge sei, die man unter verschiedenen Bedingungen vom Kaninchen bei einem tödtlichen Aderlass erhalten könne. Durch eine Reihe von Erwägungen war es nemlich nicht unwahrscheinlich geworden, dass das Verhältniss zwischen dem tödtlichen Aderlassvolum und dem Körpergewicht der Thiere sehr veränderlich werden könne.

Gehen wir von der Voraussetzung aus, dass die Thiere, welche rücksichtlich des Tod bringenden Aderlasses verglichen werden sollen, bezüglich ihrer Blutmengen und der Dimensionen ihrer Gefässe sich durchaus gleich verhalten, so kann das Volum der bis zur vollkommenen Verblutung entleerten Flüssigkeit nur noch abhängen von der Verschiedenheit der Drücke, welche in der Ausflussmündung den in der Richtung des Ausfliessens wirksamen Antrieben entgegentreten, ferner von der Grösse der Kräfte, welche innerhalb oder jenseits der Gefässwände den Durchmesser des von den letztern umschlossenen Raumes bestimmen, und endlich von der Vertheilung der Blutmasse auf die verschieden gebauten Abtheilungen des Gefässsystems.

Da die Bedeutung der zuerst genannten Bedingungen an und für sich klar ist, und da die Wirkung, welche der zweiten zukommt, schon sehr gründlich von *Goltz*[1]) behandelt ist, so bedarf nur die dritte einer weitern Besprechung. — In den ein-

1) *Virchows* Archiv 29. Bd. p. 394.

zelnen Abtheilungen des Gefässsystems steht, wie bekannt, das Lumen zu den Kräften, die auf die Wand wirken, in einem sehr wechselvollen Verhältniss. Im Allgemeinen wird man jedoch folgende Schemata aufstellen können. — a. Der Durchmesser der immer offenen Gefässhöhle ist in weiten Grenzen unabhängig von den Drücken, welche von innen oder von aussen her auf die starre Wand wirken. — b. Die Höhlung des Gefässes ist noch offen, wenn auch der Druck seines Inhaltes Null geworden ist. Aber es lässt sich der elastischen Wand wegen durch ein Wachsthum der auf die äussere Fläche wirksamen Kräfte die Höhlung zum Verschwinden oder diesem näher bringen. — c. Die Lichtung der Gefässe ist verschwunden, wenn der Druck ihres Inhaltes auf Null herabging, und zugleich ist in weiten Grenzen die Wand so leicht dehnbar, dass mit der wachsenden Füllung die Spannung derselben nur sehr allmählig zunimmt. — d. Die Höhlung der Gefässe ist schon früher geschlossen, bevor noch der Druck des Inhaltes auf Null herabgegangen. Demnach muss, wenn in ihnen eine Lichtung erzeugt werden soll, der Druck des Inhaltes einen positiven Werth annehmen; und es wächst mit der steigenden Füllung die Spannung der Wand rasch empor. —

Wenn man weiter in Betracht zieht, dass die Blutmenge, welche das Thier enthält, nicht ausreicht, um alle Abtheilungen des Gefässsystemes gleichmässig zu füllen, so leuchtet es ein, dass durch die so eben aufgezeichneten Eigenschaften der Gefässe auch das Volum der Verblutung beeinflusst werden muss, vorausgesetzt dass der Druck, welcher zu Ende der letztern an den Gefässen vorhanden, nicht bis auf Null herabsank. Ist diese Bedingung erfüllt, so wird, wenn das Blut vorzugsweise in den Gefässen mit nachgiebigen Wandungen angehäuft ist, weniger aus der geöffneten Ader fliessen als in jedem andern Falle. —

Wenn hierüber kein Zweifel bestehn kann, so bleibt nur noch die Möglichkeit für die geforderte Vertheilung des Blutes fraglich. Aber auch diese wird im ausgedehnten Maasse herzustellen sein durch den Erregungsgrad der Nerven, welche die Muskeln jener Arterien beherrschen, die ihr Blut in die Abtheilungen grösster Nachgiebigkeit entleeren. Sind sie gelähmt, so fliesst das Blut aus den Arterien zu rasch ab, als dass es zu Erzeugung eines höhern Druckes kommen könnte, also muss unter dieser Bedingung die widerstandreichere Abtheilung relativ blutleer

werden, während das gerade Gegentheil eintritt, wenn die Nerven der Arterien erregt sind, welche ihr Blut in die Abtheilungen grösserer Nachgiebigkeit entleeren, weil nun dem unter höherem Drucke stehenden Blute kein anderer Ausweg als der in die schwieriger erweiterbaren Gefässe übrig bleibt.

Als diese Betrachtungen durch den Versuch geprüft werden sollten, ergab sich, dass die erste der aufgestellten Bedingungen, die vollkommene Uebereinstimmung in der Blutmenge und in den Dimensionen der Gefässe der zu entblutenden Thiere nicht ausführbar war, da das Verfahren, die durch eine erste Verblutung gefangene Menge wieder zurückzuführen und darauf eine wiederholte Verblutung vorzunehmen, in der Regel an der Gerinnbarkeit der gegen Ende des Aderlasses ausfliessenden Flüssigkeitsmassen scheiterte. Unter diesen Umständen blieb nichts anderes als die Beschränkung auf nur eine Verblutung an demselben Thiere übrig; um die Beobachtung an verschiedenen Individuen unter einander vergleichbar zu machen, war man demnach darauf angewiesen, die ausgeflossene Blutmenge in Procenten des Körpergewichts auszudrücken, ein Verfahren, wodurch zum mindesten bedeutende Unterschiede noch sichtbar werden konnten.

Bei der Wahl des Gefässes, aus welchem die Verblutung geschehen sollte, bestimmte ich mich für die arteria Carotis. Statt dessen hätte man auch durch die rechte v. jugularis ein möglichst weites Rohr in den Vorhof bringen und von hier aus die Verblutung vornehmen können. Da aber einerseits der Druck in dem Vorhof ein negativer ist, wesshalb die Verblutung nur unter Beihilfe einer Ansaugung möglich war, und da anderseits der Abfluss in den von den Lungen ausgespannten Ventrikel jedenfalls mit geringerem Widerstand stattfinden konnte, als durch das lange Saugrohr, so schien es mir für die Beschleunigung der Verblutung vortheilhafter, bei der art. Carotis stehn zu bleiben. Damit will ich nicht sagen, dass der Vorhof als Verblutungsort nicht seine besonderen Vorzüge habe.

Behufs des Aderlasses aus der a. Carotis führte ich rechterseits in dieselbe möglichst nahe an dem Austritt aus der Brusthöhle eine Canüle ein. Die linke a. Carotis ward mit einem Hg.-Manometer verbunden. Für die Beurtheilung dieser Verblutungsmethode hat man zu berücksichtigen, dass die erhaltene Blutmenge ebensowohl abhängig ist von der Grösse des Stromes,

der aus den Venen in das Herz hinein stattfindet, als auch von dem Verhältniss zwischen den Widerständen, die sich einerseits an den künstlichen und anderseits an den natürlichen Ausflussmündungen des Aortenrohres vorfinden. Bezüglich der ersteren dieser beiden Bedingungen ist zu beachten, dass die venöse Mündung der Herzkammer immer annähernd unter demselben Drucke liegt, so dass die Geschwindigkeit, mit welcher das Blut dem Brustkasten bez. dem Herzen zufliesst, nur abhängig von der Spannung in den grossen Venenstämmen ist. Und da anderseits sich die Herzkammer in rascher und regelmässiger Folge zusammenzieht und dieses zwar jedesmal bis zum Verschwinden ihrer Lichtung, so wird aus der Aortenmündung das Blut in dem Maasse ausströmen, in welchem es ihm durch die Venen zufloss.

Das Blut, welches aus dem Herzen in die Aorta übergeht, würde allein aus der Arterienwunde ausströmen, wenn die Widerstände im Verlaufe durch den Carotidenstumpf gegen diejenigen verschwänden, welche ihm beim Ausfliessen aus allen übrigen Arterienzweigen entgegenstehen. Wie wenig dieses jedoch der Fall, darüber belehrt uns das in die linke a. Carotis eingesetzte Manometer durch den Druck, welchen es nachweist. In einzelnen Fällen ereignete es sich allerdings, dass die Blutung nicht eher stille stand als bis der Druck auf wenige Mm. herabgesunken war, in andern aber, und dieses sind weitaus die häufigsten, stand die Blutung schon still, wenn sich der Druck in den Grenzen von 15 bis zu 20 Mm. Hg. bewegte. Die Ursache hierfür mag zum Theil in der Zusammenziehung der Arterienwand, zum Theil in der Bildung kleiner Gerinnsel liegen, welche ebenso rasch als sie entfernt werden auch wieder von Neuem entstehen.

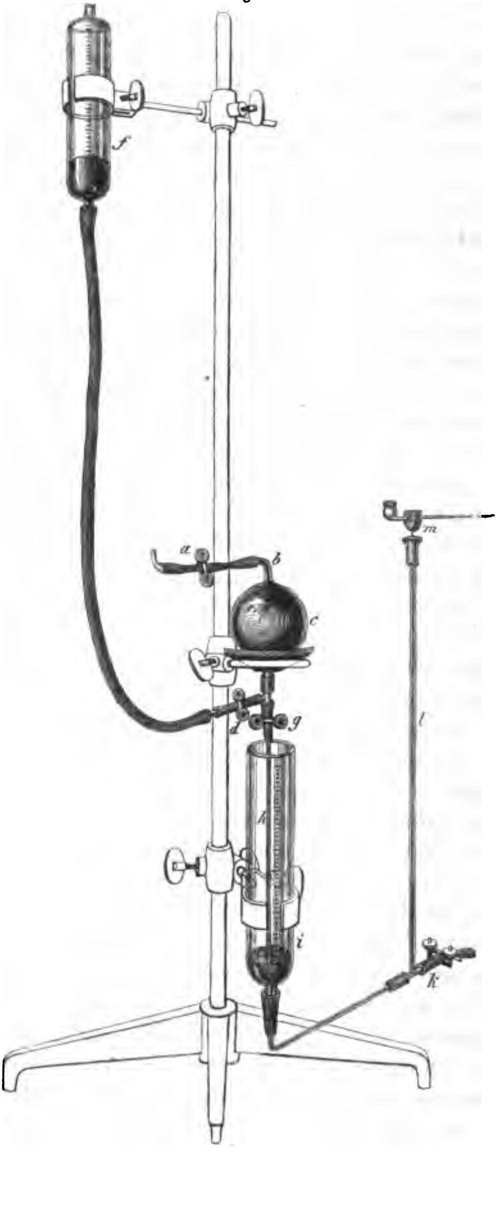
Bei der Ausführung dieser Verblutungsversuche stellte sich nun heraus, dass das Verhältniss der zu gewinnenden Blutvolumina zum Körpergewicht je nach den Umständen des Thieres ein ausserordentlich variabeles war. Die grössten Quantitäten gewinnt man, wenn man unvergiftete und sonst unverletzte Thiere unter kräftigen passiven Bewegungen der Gliedmassen oder solchen der Bauch- und der Brustwand verbluten lässt. Mit Hilfe dieser Mittel ist es gelungen 4,9% vom Körpergewicht des Thieres an Blut zu gewinnen, also nahezu die Menge, welche nach den gegegenwärtigen Annahmen in dem Kaninchen enthalten ist. In einem Falle, in welchem die abgelassene Blutmenge noch nicht

einmal die ebengenannte Procentzahl des Körpergewichts erreichte, fand ich denn auch die restirende sehr niedrig. Diesem Thiere, das nach Entfernung des Magen- und Blinddarminhalts 1170 Gr. wog, wurden unter Anwendung der genannten Handgriffe 48 Cbc. Blut, also 4,3% seines Körpergewichts entzogen. Als ich darauf an der Leiche die Bestimmung der zurückgebliebenen Blutmasse unternahm, fand ich dieselbe zu 5 Cbc., so dass demnach 90% des Gesammtblutes durch den Aderlass entfernt waren. — Eine beträchtlich geringere Blutmenge gewinnt man, wenn das Thier keinen passiven Bewegungen unterworfen wird, sie geht dann in der Regel nicht über 3% des Körpergewichts hinaus.

Die geringsten Blutmengen gewinnt man an solchen Thieren, deren arterieller Druck aus irgend welchen Gründen schon vor der beginnenden Verblutung sehr niedrig war, wie dieses z. B. nach der Durchschneidung des Halsmarkes, derjenigen des n. splanchnicus und nach Unterbindung der Pfortader der Fall ist. Bei diesem Zustande des Arteriendrucks erreicht der Blutverlust im günstigsten Falle 1,5% des Körpergewichts, gewöhnlich aber nur Bruchtheile eines Procentes. — Eine grössere Menge als die eben erwähnte fliesst jedoch bei den Thieren mit ursprünglich niederem arteriellen Drucke dann aus, wenn man vor dem Beginn der Verblutung die Aorta unmittelbar unterhalb des Zwerchfells zugeschnürt hatte. War der arterielle Druck in Folge der Durchschneidung des Rückenmarks oder derjenigen des n. splanchnicus herabgesetzt, so stieg die durch Verblutung erhaltene Menge günstigen Falls auf 2,5% des Körpergewichts; sie näherte sich also derjenigen, welche man auch bei sonst unverletzten Thieren erhalten konnte, vorausgesetzt dass sie keinen passiven Bewegungen ausgesetzt gewesen waren. Dieser Erfahrung gemäss erklärt sich die Geringfügigkeit der Blutmenge, welche man ohne vorgängige Unterbindung der Brustaorta bei ursprünglich niederem arteriellen Druck gewinnt, zum Theil daraus, dass der Widerstand, den der Arterieninhalt an den natürlichen Ausflussmündungen der Aorta zu überwältigen hat, geringer ist als der an der Arterienwunde vorhandene. — Einer der Verblutungsmenge so günstigen Wirkung des Aortenverschlusses bin ich nicht begegnet, wenn der arterielle Druck durch die Unterbindung der Pfortader herabgesetzt war. Allerdings mehrte sich nach der Verschliessung der Aorta auch in diesem

Falle das durch Verblutung erhaltene Volum, aber es erhob sich doch kaum auf 1,5% des Körpergewichts, so dass nach

Fig. 12.



meinen Beobachtungen ein wesentlicher Unterschied darin besteht, ob der arterielle Druck durch Verletzung nervöser Gebilde, oder durch die Unterbindung der Pfortader herabgesetzt ist.

Bei den Verblutungsversuchen an Kaninchen mit ursprünglich niedrigem materiellen Drucke bin ich noch auf eine andere Erscheinung gestossen, die der besonderen Erwähnung werth ist. Nach sehr kleinen Blutverlusten, welche kaum 1% des Körpergewichts betragen, pflegen die Thiere abzusterben, rascher, z. B. schon nach wenigen Minuten, wenn das Rückenmark durchschnitten war, langsamer, etwa nach 20 Minuten, wenn man die n. splanchnici durchtrennt hatte.

Das Resultat dieser Versuche war also dem Ergebniss unserer Betrachtungen nicht ungünstig. Zugleich aber entsprangen aus ihnen neue charakteristische Merkmale für das Verhalten des Blutstroms nach Unterbindung der Pfortader. — Diese letztern müssten aber noch viel deutlicher hervortreten, wenn man statt des absoluten Volums der Verblutung die Geschwindigkeit derselben zu ermitteln vermöchte. Dieses glaube ich nun folgendermassen erreicht zu haben. Der Apparat, durch welchen die Ausflussgeschwindigkeit bestimmt werden sollte, siehe Fig. 12, setzt sich im Wesentlichen aus dem registrirenden auf seinen Hohlraum calibrirten Manometer *ilm* und aus der 100 Cbc. fassenden Kugel *c* zusammen; von dieser letztern gehen drei Fortsätze ab, *ba* zur Arterie, *gh* in den weiten Schenkel des Manometer, *df* in ein cylindrisches oben offenes Quecksilbergefäss. In die Kugel *c* soll das Blut dringen, und zu einer andern Zeit aus ihr auch wieder in die Arterie zurückgeführt werden. Um diesen Wechsel des Weges zu ermöglichen, sind die beiden Klemmen *d* u. *g* angebracht; die Communikation der Arteriencanüle mit der Kugel ist durch die Klemme *a* zu schliessen. Vor dem Gebrauch ist der Fortsatz *ab* bis zur Einmündung in die Kugel mit frischem Kaninchenserum, die letztere selbst und ihre Fortsätze *fd* und *gh* mit Quecksilber gefüllt; in dem registrirenden Manometer steht das Quecksilber so hoch, dass von ihm die untere Mündung des Rohres *h* abgeschlossen wird. Der Apparat ist in einem an den Tisch geschraubten Träger festgestellt. Soll zum Versuch geschritten werden, so sind durch die Klemmen *a* und *d* die Röhren *ab* und *df* verschlossen, *g* dagegen geöffnet; hierauf wird das se-

rumhaltige Stück jenseits *a* in die mit Serum gefüllte Arteriencanüle gebunden. Wenn nun die Klemme bei *a* plötzlich geöffnet wurde, so strömte das Blut in die Kugel *c*, während das in ihr enthaltene Hg. durch die Röhre *h* in den weiten Manometerschenkel übertrat und sich von da aus auch in den engen Schenkel *l* verbreitete, wo es den Schwimmer *m* emporhob, dessen mit Tinte gefüllte Feder seinen veränderlichen Stand auf einen vorüberrollenden Papierstreifen aufschrieb. Gesetzt, es war die Blutmenge eine gewünschte Zeit hindurch in die Kugel *c* abgelaufen, so wurde die Klemme bei *g* plötzlich geschlossen und die bei *d* geöffnet. Da das Hg. in dem Gefässe *f* etwa 150 Mm. hoch über der Mündung der Arterie stand, so floss das in der Kugel *c* enthaltene Blut unter diesem Drucke in die Arterie zurück, indem das in *c* enthaltene Blut durch das aus *f* nachströmende Hg. verdrängt wurde. Wenn dieses letztere bis zur oberen Kugelmündung *b* emporgestiegen war, so wurde die Klemme *a* rasch geschlossen. Durch den soeben beschriebenen Versuch erhielt man also eine Curve, deren Abscisse die Zeit und deren Ordinaten die in dieser Zeit abgeflossenen Blutmengen darstellen. Um aus den letzteren die ihnen entsprechenden Volumina ableiten zu können, genügte es, wie erwähnt, die Räumlichkeiten *h* und *l* des Manometers zu calibriren. In meinem Gefässe entsprach je ein Millimeter der Ordinate 0,75 Cbc.

Bevor ich in der Beschreibung des Gebrauchs weiter gehe, der von dem vorstehenden Apparate gemacht werden soll, muss ich erst angeben, in wie weit aus den durch die Arterienwunde hervorgegangenen Blutmengen auf diejenigen geschlossen werden kann, welche von den Venen her in das Herz übertreten. Die Blutmenge, die aus der a. carotis in die Kugel überfliesst, setzt sich zusammen aus einem Antheil, welcher beim Beginn der Blutung schon in der Aorta enthalten war, bez. dieser entzogen wird, wenn ihr Füllungsgrad abnimmt, und aus einem andern Antheil, welcher während der Dauer der Blutung aus dem Herzen in die Aorta übergeht. Da nun aber, wie wir früher sahen, der Widerstand, welchen das aus der Arterienwunde strömende Blut zu überwinden hat, keineswegs gegen den verschwindet, welcher der genannten Flüssigkeit beim Uebergang in die natürlichen Ausflussmündungen der Aorta entgegentritt, so ist die in die Kugel *c* übergeführte Flüssigkeitsmenge auch keineswegs derjenigen gleich, welche die Aorta beim

Uebergang aus der höheren in die niedere Spannung verloren und welche sie während der Dauer der Blutung aus dem Herzen empfangen hat. Aus diesem Grunde lässt uns unser Verfahren darüber vollkommen im Unklaren, wie gross die Gesammtmengen der Flüssigkeit gewesen sind, die vor der Blutung in der Aorta enthalten war und die während jenes Vorganges aus dem Herzen hervorströmte. Es ist dagegen dasselbe im Stande, darüber Aufschluss zu geben, ob in zwei verschiedenen Versuchen die aus dem Herzen hervorgekommenen Blutmengen gleich oder ungleich gross waren. Die erste der Bedingungen, unter welchen die eben gestellte Aufgabe lösbar wird, besteht darin, dass die beiden Beobachtungen an demselben Thiere angestellt werden, weil hierdurch der Widerstand an der natürlichen und an der künstlichen Ausflussmündung derselbe bleibt, vorausgesetzt dass keine Veränderungen im Erregungszustand der Gefässnerven auftreten. Die zweite der zu erfüllenden Bedingungen besteht darin, dass die Aorta vor dem Beginn eines jeden der beiden mit einander zu vergleichenden Versuche sich auf dem gleichen Füllungsgrade befindet. Um dieser Forderung zu genügen, ist es nöthig, die Aorta unterhalb des Zwerchfells und oberhalb der a. coeliaca vorübergehend zu unterbinden. Da jedoch die Vermuthung nicht abzuweisen ist, dass während des Aortenschlusses eine andere Vertheilung des Blutes in den Venen eintritt als sie vorher vorhanden, so muss die genannte Unterbindung erst unmittelbar vor dem Beginn der Verblutung stattfinden. Durch die Einführung dieses Kunstgriffes gewinnt man nebenher noch den Vortheil, dass die Zahl der natürlichen Ausflussmündungen und somit der durch sie veranlasste Fehler bedeutend verringert wird. Um die Gewissheit zu erlangen, dass die Füllung der Aorta auf den gewünschten Grad gediehen sei, wird ein gewöhnliches registrirendes Manometer in die a. carotis gesetzt, welche nicht schon von der zum Blutablassen bestimmten Canüle in Beschlag genommen war.

Die Reihenfolge der Operationen, die zur Ausführung des Versuches nothwendig sind, gestaltet sich folgendermassen. Die Luftröhre des Thieres wird behufs der künstlichen Athmung mit einem regelmässig arbeitenden Blasbalg verbunden, darauf wird von einer kleinen Hautvene aus das Thier mit Curare vergiftet, alsdann wird ein Faden um die Aorta an der bezeichneten Stelle und ein andrer um die Pfortader gelegt, beide Fäden werden

durch je ein Ligaturstäbchen geschlungen, so dass zu jeder beliebigen Zeit die Gefässe geschlossen und wieder geöffnet werden können. Hierauf werden, nachdem vorgängig die Unterleibswunde sorgfältig vernäht und die hervorstehenden Unterbindungsstäbchen in passender Lage befestigt sind, die Canülen in die beiden Carotiden eingesetzt, wobei die beiden n. vagi durchschnitten werden. Ist Alles dieses geschehen und hat man die Absicht, den ersten der beiden Versuche bei bestehender Pfortaderunterbindung vorzunehmen, so lässt man durch das registrirende Manometer zuerst den arteriellen Druck notiren, dann zieht man die Schlinge um die Pfortader zu. Nachdem diese Unterbindung je nach der Geschwindigkeit, mit welcher der arterielle Druck absinkt, eine halbe bis zwei Minuten gedauert hat, wird auch der um die Aorta gelegte Faden zugeschnürt; sowie in Folge hiervon der arterielle Druck sein Maximum erreicht hat, setzt man plötzlich die a. carotis, aus welcher die Blutung geschehen soll, mit der Kugel *c* in Verbindung. Nachdem die Verblutung die gewünschte Zeit hindurch angedauert, wird rasch die Klemme *g* geschlossen, die Ligatur um jedes der beiden Gefässe gelöst und nun in der früher beschriebenen Weise das Blut aus der Kugel allmählig wieder in die Arterie zurückgeführt. Nach Beendigung dieses ersten Theiles der Beobachtung werden die beiden Carotiden mit je einem federnden Pincettchen zugeklemmt und die Kugel sammt ihrem Fortsatz *ba* durch eingesaugtes und wieder ausgestossenes Wasser unter Zuhilfenahme des Gefässes *f* sorgfältig gereinigt und das Verblutungsmanometer wieder auf die frühere Abscisse gebracht, indem man das Hg. aus der Oeffnung bei *k* ablässt. Wenn hierauf der Apparat wieder genau in den Stand gebracht ist, in welchem er sich vor Beginn des Versuchs befand, so kann nun der zweite Theil der Beobachtung seinen Anfang nehmen, bei welchem nur die Aorta verschlossen wird, die Pfortader aber offen bleibt.

Der Zeitraum, während dessen die Verblutung stattfindet, kann entweder so lang gewählt werden, bis überhaupt kein Blut mehr hervordringt, oder, was für die meisten Fälle günstig ist, nur bis zu einer Dauer von 25 bis zu 30 Secunden. Da in dieser kürzeren Zeit der grösste Theil des Blutes, der auf diesem Wege gewonnen werden kann, ausfliesst, so ist mit ihr der gestellten Aufgabe genügt. Zugleich aber gewährt sie noch die

weitern Vortheile, dass einerseits die Gerinnung sicherer vermieden und andererseits das Thier nicht gezwungen wird, allzulange unter dem blutleeren Zustande zu leiden, wodurch meistens schädliche Störungen, wie z. B. Gefässkrämpfe, in die Beobachtung eingeführt werden. — Eine Störung, durch welche der Erfolg des Versuches noch getrübt werden könnte, besteht in der Ansaugung, welche die Arterienwand durch die von der Kugel absteigende Hg.-Säule erfährt. Um sie unschädlich zu machen, muss ein Gehilfe die Arterie, bez. die bedeckenden Weichtheile sorgfältig überwachen.

Damit das Resultat, welches durch diese Versuche gewonnen wird, in anschaulichster Weise zu Tage tritt, führe ich sogleich einige der Curven vor, welche durch dasselbe gewonnen sind.

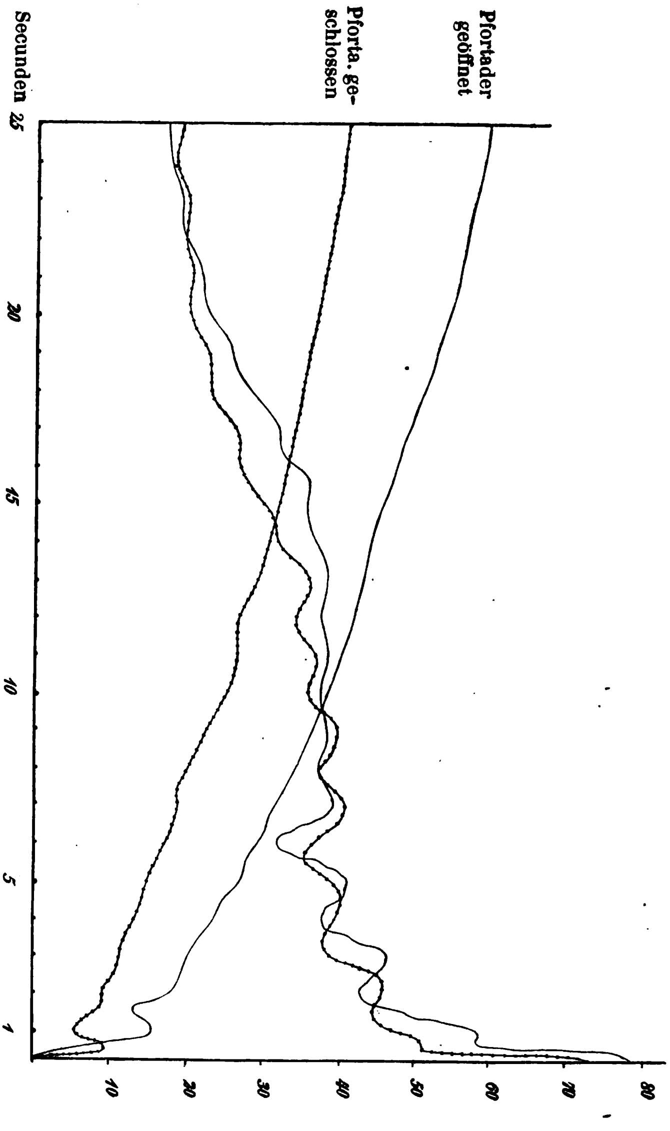
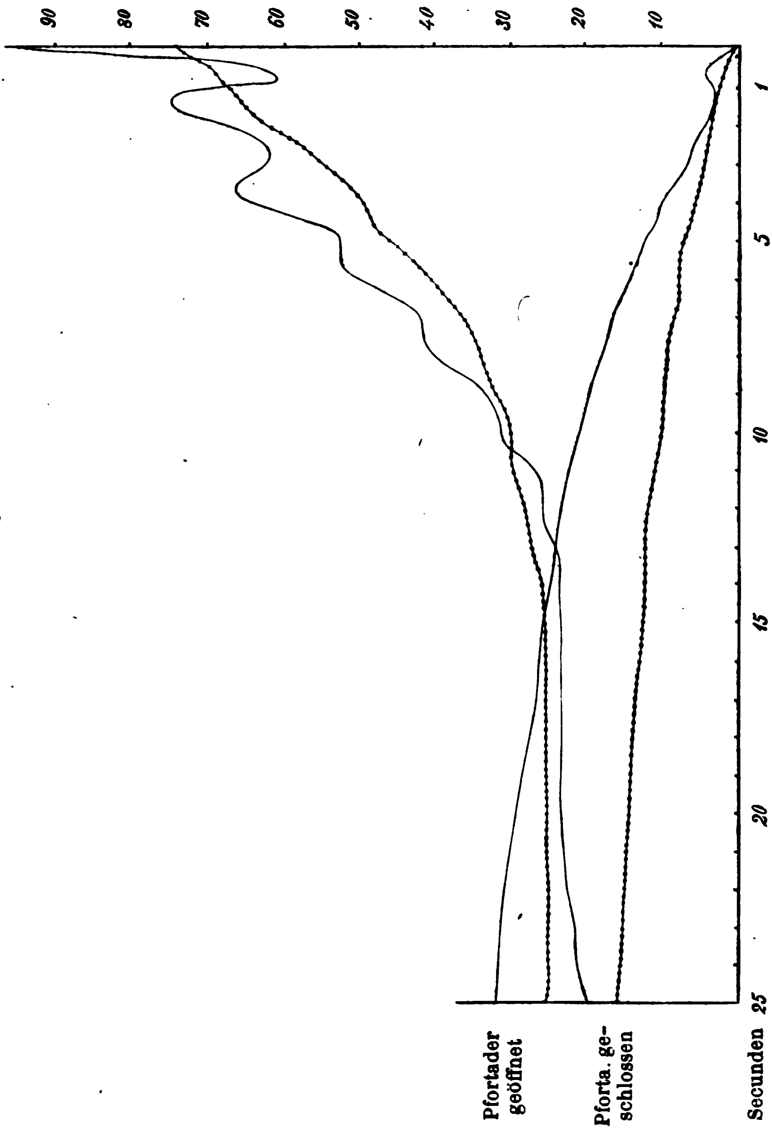

Pfortader
geöffnet
Pforta. ge-
schlossen
Secunden
25
20
15
10
5
1
10
20
30
40
50
60
70
80

Fig. 13.

Fig. 14.


90
80
70
60
50
40
30
20
10
1
5
10
15
20
25
Pfortader geöffnet
Pforta. geschlossen
Secunden

Bevor wir die unter ungleichen Bedingungen gewonnenen Ergebnisse vergleichen, mag es dienlich sein, an dem Verlauf einer einzigen Beobachtung die überall wiederkehrenden Erscheinungen zu durchmustern. Jede derselben ist durch eine Curve der Verblutung und durch eine solche des arteriellen Druckes repräsentirt. Die Ordinaten der Druckcurve, ebenso die der Verblutungscurve sind an Höhe denen gleich, die von den Manometern aufgezeichnet sind. Um aus den ersteren die wahren Höhen des arteriellen Druckes zu finden, muss man nach den bekannten Regeln verfahren. Um aber aus den Ordinaten der Verblutungscurve die ausgeflossenen Blutvolumina zu finden, müssen ihre in Mm. ausgedrückten Höhen mit 0,75 multiplicirt werden. Die gemeinschaftliche Abscisse beider Curven giebt die Zeit in Secunden. Verfolgt man die Verblutungscurve von ihrem Anfang an, so gewahrt man in der ersten Secunde ein rasches Aufsteigen, auf welches alsbald wieder ein Absinken folgt. Diese Welle beruht auf einer Eigenschwingung des Quecksilbers, welche in dem Verblutungsmanometer durch den raschen Zufluss aus der Kugel *c* hervorgerufen wurde. Da jenseits dieses ersten Stosses die Verblutung allmählig an Geschwindigkeit abnimmt, so fehlt auch von nun an die Eigenschwingung. Verfolgt man dagegen die Curve des arteriellen Druckes, so sieht man in ihr zweierlei Abweichungen vom glatten Ablauf. Diejenige, welche in der Gestalt regelmässiger Wellen erscheint, ist durch die künstlichen Athembewegungen bewirkt, die zweite aperiodische Abweichung hängt dagegen wahrscheinlich von Ansaugungen der Arterienwand ab, welche die an der Ausflussmündung der Verblutungscarotis vorhandene Hg.-Säule bedingte. Hierfür spricht, dass die Abweichungen zumeist vorkommen, wenn schon der Druck in der Arterie geringer und somit die Nachgiebigkeit der Gefässwand eine grössere geworden war, und dann der weitere Umstand, dass mit der Verlangsamung des Absinkens in der Druckcurve auch gleichzeitig ein vermindertes Ansteigen in der Verblutungscurve sichtbar wurde.

Das in Fig. 13 vorgelegte Curvenpaar ist so gewonnen, dass zuerst bei geschlossener und später bei offener Pfortader entblutet wurde, während bei dem in Fig. 14 abgebildeten Versuche die Curven in umgekehrter Ordnung erhalten sind.

Aus der Vergleichung je zweier Entblutungscurven desselben Thieres, von welchen die eine bei offener und die andere

bei geschlossener Pfortader aufgeschrieben wurde, ergiebt sich, dass die Geschwindigkeit der Blutentleerung bei geschlossener Pfortader beträchtlich geringer als bei offener ist. Dieser Unterschied spricht sich allerdings in den ersten Secunden der Entblutung in der Regel stärker aus als in den spätern, aber er fehlt auch in diesen nicht, ein Verhalten, welches besonders beachtenswerth scheint, weil man erwarten muss, dass der grössere Verlust an Blut, den das Thier während offener Pfortader im Gegensatz zu dem mit geschlossener schon erlitten hat, auch seine Befähigung zu weitern Blutverlusten bedeutend beeinträchtigt.

Die genauen Zahlenwerthe für das durch die Curven versinnlichte Verhältniss der Ausflussgeschwindigkeit sind in den folgenden Tabellen niedergelegt.

Kaninchen. Körpergewicht rein 2370 Gr. Curarevergiftung. Beide nerv. vagi durchschnitten.

Zu Fig. 13.

Pfortader und Aorta geschlossen			Pfortader offen, Aorta geschlossen		
Zeit vom Beginn der Verblutung	ausgeflossen in Cbc. vom Beginn der Verblutung	Arteriendruck			Arteriendruck
		Mm.			
0	0	141	0	0	173 u. spät. 163
5	11,3	74	5	20,2	70
10	18,0	68	10	28,5	72
15	24,0	57	15	34,5	66
20	28,1	38	20	39,8	40
25	30,5	36	25	44,3	34

Vor der Pfortaderunterbindung Carotidendruck = 108 Mm. — Nach 2,5 Minuten dauerndem Pfortaderverschluss stand der Carotidendruck auf 55 Mm. — Nach Schluss der Aorta erreichte er in 23 Sec. sein Maximum mit 141 Mm.

Vor der Aortenunterbindung stand der Carotidendruck auf 114 Mm. Nachdem die Aorta unterbunden war, erreichte er in 5 Sec. die Höhe von 173 Mm. und sank im Verlaufe von 43 Secunden auf die Höhe von 163 Mm.

Kaninchen. Reines Körpergewicht 1490 Gr. — Curarevergiftung. Beide nerv. vagi durchschnitten.

Zu Fig. 14.

Pfortader offen, Aorta geschlossen			Pfortader und Aorta geschlossen		
Zeit vom Beginn der Verblutung	ausgeflossen in Cbc. vom Beginn der Verblutung	Arteriendruck im Beginn der Zeit	Zeit vom Beginn der Verblutung	ausgeflossen in Cbc.	Arteriendruck im Beginn der Zeit
		Mm.			Mm.
0	0	186	0	0	146
5	11,0	99	5	5,6	85
10	17,6	70	10	8,3	59
15	20,9	46	15	9,8	49
20	23,3	44	20	10,9	49
25	25,2	38	25	11,6	47
30	26,6	?	30	12,8	38

Vor Schluss der Aorta war der Carotidendruck = 141 Mm., nach Schluss der Aorta erreichte er in 3—5 Secunden das Maximum mit 186 Mm.

Vor dem Schluss der Pfortader stand der Carotidendruck auf 105 Mm., 20 Secunden nach Schluss der Pfortader stand er auf 95. Nach Schluss der Aorta erreichte er sein Maximum mit 146 Mm.

Mit den Ergebnissen der mitgetheilten sind nun die aller andern von mir angestellten Versuche in Uebereinstimmung. — Um aber zu zeigen, wie deutlich der Unterschied der Entblutungsgeschwindigkeiten hervortritt, dazu können sogar die Zahlen aus scheinbar verunglückten Versuchen dienen. — Bei meinen hier einschlagenden Beobachtungen war ich des Eintritts der Gerinnung wegen öfter gezwungen, den Versuch nach der ersten Entblutung abzubrechen. Somit gewann ich eine grössere Reihe von Beobachtungen, in denen an demselben Thier die Entblutungsgeschwindigkeit nur einmal bestimmt ward. Um die an verschiedenen Thieren erhaltenen Werthe des in 30 Sec. ausgeflossenen Blutvolums untereinander vergleichbar zu machen,

habe ich für jeden Fall sein Verhältniss zum reinen Körpergewicht ermittelt. Hierdurch kam ich zu dem Resultate, dass in 8 Entblutungsversuchen mit offener Pfortader der Mittelwerth des ausgeflossenen Volums 2,4 Procent des mittleren Körpergewichts betrug (Minimum 1,7, Maximum 3,0), während in drei Versuchen mit unterbundener Pfortader die Procentzahl nur zu 1,1 ausfiel (Minimum 0,9, Maximum 1,4).

Bis dahin sind nur die Geschwindigkeiten der Entblutung aus den Gefässen mit dem normalen Tonus denjenigen während der Pfortaderunterbindung gegenüber gestellt worden. In meinen Versuchen sind jedoch auch Fälle vorhanden, in welchen dieser Tonus, sei es absichtlich oder zufällig, herabgesetzt war. Da sie ein weiteres Licht auf die Bedeutung der Pfortader im Blutkreislauf werfen, so wird ihre Mittheilung am Platze sein. Ich beginne mit der Darstellung eines Falles, bei welchem sich die Lähmung des Gefässtonus während der Dauer des Versuchs einfand. Die Entblutung ward zuerst bei geschlossener und dann wiederholt bei offener Pfortader vorgenommen.

Kaninchen. — Reines Körpergewicht = 1350 Gr. Curarevergiftung. Beide n. vagi durchschnitten.

1. Entblutung. Pfortader und a. Aorta geschlossen.

Der arterielle Druck, der vor der Pfortaderunterbindung auf 163 Mm. Hg. stand, fällt nach Vollendung derselben in 63 Secunden auf 84 Mm. Hg. Nach der Aortenunterbindung erreicht er in 11 Secunden 123 Mm., sinkt aber dann ohne nachweisliche Ursache auf 80 Mm. Hg.

Zeit vom Beginn der Entblutung	0	5	10	15	20	25 Sec.
Ausgeflossen in Cbc. seit Beginn der Verblutung . .	0,0	3,0	4,5	5,6	6,8	7,1
Arter. Druck in Mm. Hg. . .	80	36	30	27	32	34

Nach der Zurückführung des Blutes und der Wiedereröffnung der v. portarum erhielt sich der arter. Mitteldruck constant auf der Höhe von 29 Mm. Hg. Nach Verschluss der Aorta stieg er sehr allmählig auf 112 Mm.

2. Entblutung, Pfortader offen, Aorta geschlossen.

Zeit vom Beginn der Entblutung	0	5	10	15	20	25 Sec.
Ausgeflossen in Cbc. . . .	0,0	4,1	6,4	7,9	9,4	10,5
Arter. Druck in Mm. Hg. . .	112	66	63	53	47	51

Nach Zurückführung des Blutes erhielt sich der art. Druck auf 38 Mm. Hg. Nach Unterbindung der Aorta stieg er in 45 Sec. auf 86 Mm. Hg.

3. Entblutung, Pfortader offen, Aorta geschlossen.

Zeit vom Beginn der Entblutung	0	5	10	15	20	25 Sec.
Ausgeflossen in Cbc. . . .	0,0	3,2	5,6	7,1	7,9	8,6
Arter. Druck in Mm. Hg. . .	86	59	40	35	33	33

Nach der Rückführung des Blutes stellte sich der art. Druck auf 33 Mm., 20 Sec. nach Aortenschluss auf 110 Mm.

4. Entblutung, Pfortader offen, Aorta zu.

Zeit seit Beginn d. Entblutung	0	5	10	15	20	25 Sec.
Ausgeflossen in Cbc. . . .	0,0	6,0	9,4	11,4	12,0	12,9
Arter. Druck in Mm. Hg. . .	110	63	35	31	27	27

Die Geschwindigkeit, mit welcher sich in dem vorliegenden Versuche das Blut zu verschiedenenmalen entleerte, zeigt ähnliche Verhältnisse wie der arterielle Druck bei herabgestimmtem Tonus der Gefässwand. — Denn wie unter dieser Bedingung der Druck absinkt, so ist auch die Ausflussgeschwindigkeit im Vergleiche mit der des Aderlasses bei dem normalen Tonus sehr verlangsamt, beziehungsweise die Stromgeschwindigkeit in den Ge-

fässen eine geringere geworden. — Für diesen Satz berufe ich mich nicht bloss auf den einen so eben mitgetheilten, sondern auch auf andere Versuche, die allerdings insofern unvollkommener sind, als die zum Beweise herbeigezogenen Beobachtungen nicht an demselben Thiere gewonnen, sondern dadurch vergleichbar gemacht sind, dass die ausgeflossene Menge auf das Körpergewicht des Thieres reduzirt ist. — Bei 8 Thieren, die einen normalen Tonus der Gefässe aufwiesen, flossen nach Compression der Aorta in 30 Secunden an Blut im Mittel 2,4% des Körpergewichts aus, während nach Durchschneidung des Halsmarkes bez. der n. splanchnici unter gleichen Bedingungen bei 3 Thieren nur 1,5% des Körpergewichts an Blut gewonnen wurden.

Ausser dieser Analogie besteht dem vorstehenden Versuche gemäss zwischen dem arteriellen Drucke und der Stromgeschwindigkeit in einem Gefässwerk, dessen Tonus gelähmt ist, noch die andere, dass beide nach der Unterbindung der Pfortader noch um ein merkliches abnehmen.

Diese Versuche, welche als eine genauere Ausführung der Beobachtungen anzusehn sind, die schon früher *L. Brunton*[1]) erwähnt hat, erweitern den Beweis, welchen *Heidenhain*[2]) für einzelne Abschnitte des Säugethierkreislaufes erbracht hat, auf den Gesammtstrom, so dass nun der Zusammenhang zwischen Tonus und Geschwindigkeit, auf welchen *Goltz* in seiner wichtigen schon oben erwähnten Abhandlung hingewiesen, nicht bloss für den Frosch, sondern auch für das Säugethier als giltig anzusehn ist.

Für weniger richtig würde ich es halten, wenn man die Verlangsamung des Blutstroms, die auf die Verschliessung der Pfortader folgt, auf die Herabsetzung des Tonus der Gefässwand schieben wollte. Dieses geht darum nicht an, weil die Wirkung des Pfortaderverschlusses über die der Rückenmarksdurchschneidung hinausgeht, und weil sich in den ersten Minuten nach der vollendeten Unterbindung die Geschwindigkeit des Stroms schon sehr bedeutend vermindert hat, obwohl zu jener

---

1) Diese Berichte Jahrgang 1869. p. 294.

2) *Pflügers* Archiv für Physiologie III. Bd. p. 505 u. f. — ibid. V. Bd. p. 77 u f.

Zeit von einer Lähmung der Gefässwand noch nicht die Rede sein kann.

Immerhin wird es räthlich sein, die volle Entscheidung dieser Frage zukünftigen Versuchen zu überlassen, die uns darüber Auskunft zu geben haben, warum nach dem Pfortaderverschluss das reichlich zu Gebote stehende Blut in eine Lage versetzt wird, welche es ihm unmöglich macht, wirksam in den Strom einzugreifen.

Dr. **Kronid Slavjansky**, *Die regressiven Veränderungen der Epithelialzellen in der serösen Hülle des Kanincheneies.* Aus der physiologischen Anstalt zu Leipzig. Vorgelegt von dem w. Mitgliede *C. Ludwig.*

(Mit einer Tafel in Farbendruck.)

Aus dem frühesten Entwicklungsstadium des Kanincheneies ist bekannt, dass die Schicht, welche man die seröse Hülle nennt, sich aus dem animalen Keimblatte hervorbildet. Nach der gewöhnlichen Annahme gestalten sich die Epithelzellen der serösen Hülle da, wo die Allantois die Placenta bildet, zum epithelialen Ueberzug der Placentarzotten, während der übrige grössere Theil mit dem Epithel des Dottersackes zusammen das Chorion bildet und später zu Grunde geht. Wie man sich aber die Verwachsung der serösen Hülle mit dem Dottersack zu denken habe, in welcher Weise die Rückbildung ihrer Zellen erfolgt, darüber liegen noch keine genauen Untersuchungen vor. Meine eigenen Beobachtungen darüber haben folgendes ergeben. Untersucht man den schwangeren Uterus des Kaninchens zu einer Zeit, wo die Uterinanschwellungen einen Durchmesser von 2,5 Cm. besitzen, so gelingt es nie, auch nach dem sorgfältigsten Ablösen der Uterinwand, die in den Anschwellungen enthaltenen Eier rein herauszuschälen. Immer haften ihrer Oberfläche Fetzen der Uterinschleimhaut an, welche die von *Coste* als Membrane adventive beschriebene Schicht darstellen; dieselbe umgiebt gewöhnlich das ganze Ei bis zum Rande der Placenta, es löst sich aber der zwischen dem Sinus terminalis und dem Rande des Mutterkuchens gelegene Theil leicht vom Ei ab, woraus sich die Angabe *Bischoff's* erklärt, dass sich die Membrane adventive nur bis zum Sinus terminalis erstrecke. Präparirt man dieselbe auch vom Dottersack ab, der in diesem Stadium die bereits von *Bischoff* ausführlicher geschilderte Form eines Hutpilzes angenommen hat (vergl. Fig. 1), so bemerkt man zunächst ein äusserst zartes, schleierartiges Häutchen, das an den meisten Stellen in Gestalt feiner Fetzen sich leicht von den unterliegenden Theilen ablösen

lässt, nur am Sinus terminalis mit demselben eine festere Verbindung eingeht. Nach innen von diesem Häutchen liegen zunächst die beiden Epithellagen des Dottersacks, dann folgt das Gefässblatt des letzteren und darauf die grosse, zwischen Amnion, Allantois und Dottersack befindliche Höhle (vergl. Fig. 1 und *Bischoff*, Entwicklungsgeschichte des Kanincheneies. Taf. XVI. Fig. 8).[1] Zwischen der äusseren Oberfläche des Dottersackes und dem Epithel der Uterinschleimhaut eingeschlossen kann somit das erwähnte Häutchen nur als seröse Hülle gedeutet werden.

Wie erwähnt haftet dieselbe in der Gegend des Sinus terminalis fest an den übrigen Eihäuten. Von hier an bis zum Rande der Placenta, also über einer blattförmigen Verlängerung der Allantois (grün in Fig. 1) lässt sich nach Ablösung des Epithels der Uterinschleimhaut kein ähnliches Häutchen abheben; man sieht vielmehr hier ein schönes Epithel fest dem Allantoisblatte aufsitzen. Nach dem Sinus terminalis zu lockert sich jedoch diese Verbindung. Gelingt es von dieser Gegend einen grösseren Epithelfetzen abzulösen, so überzeugt man sich leicht von seiner Continuität mit der zarten, schleierartigen, den Dottersack aussen umkleidenden Membran. Die seröse Hülle ist somit in dem beschriebenen Entwicklungsstadium nur soweit sie die Allantois bekleidet eine zusammenhängende Membran und fest mit den unterliegenden Eihäuten vereinigt; auf der ganzen Oberfläche des Dottersackes dagegen zeigt sie sich als äusserst feine, vielfach zerfetzte Membran, die stets von dem Epithel des Dottersackes zu trennen, nie mit demselben verwachsen ist. In den späteren Entwickelungsstadien werden die Membranfetzen immer feiner und spärlicher, am Ende der Schwangerschaft sind sie gar nicht mehr aufzufinden. Eine Untersuchung jüngerer Eier dagegen (Uterinanschwellungen von 1,0 Cm. Durchmesser) ergiebt, dass die seröse Hülle sehr gut in ihrer ganzen Ausdehnung im Zusammenhange dargestellt werden kann; nur fällt auf, dass der

1) Hier sei es gestattet vorläufig mitzutheilen, dass bei Behandlung der Eihäute mit Arg. nitr. man sich sehr leicht von einer Thatsache überzeugen kann, die, soweit bekannt, bis jetzt noch nicht beschrieben ist. Die grosse Höhle, die sich zwischen dem Dottersacke, der Allantois und dem Amnion beim Kanincheneie findet, ist von einer Schicht sehr platter Zellen continuirlich ausgekleidet. Die Zellen, die diesen Ueberzug bilden, zeigen alle Eigenschaften der Endothelien.

Theil derselben, welcher den der Placenta gegenüberliegenden Eipol bekleidet, leichter zu zerstören und desshalb schwerer zu demonstriren ist.

Schon aus der macroscopischen Betrachtung geht hervor, dass die seröse Hülle, soweit sie sich über dem Dottersack befindet, nicht mit dem Epithel desselben verwächst, sondern, indem sie immer dünner und dünner wird, zu Grunde geht. Ueber die Art und Weise, wie sie zu Grunde geht, belehrt uns die microscopische Untersuchung.

In den frühesten von mir untersuchten Stadien der Schwangerschaft zeigt sie sich aus einer Schicht von Zellen zusammengesetzt, die den Charakter wahrer Epithelien besitzen. An der äusseren Fläche dieser Schicht finden sich in grösserer oder kleinerer Menge sehr stark veränderte Epithelialzellen der Mucosa uteri. Sie gleichen hier ganz den kürzlich von *E. Pawloff*[1]) beschriebenen schleimig degenerirten Epithelzellen des Uterus und Canalis cervicalis vom Meerschweinchen. Sie sind meist oval, sehr stark lichtbrechend und hell, bei *A–c* Einwirkung giebt ihr Inhalt einen im Ueberschusse des Reagenz nicht löslichen Niederschlag. Diese in solcher Weise entarteten Zellen sind sehr fest an die äussere Fläche der serösen Hülle angeheftet und erschweren sehr die microscopische Untersuchung der letzteren. Bei längerem Schütteln im Wasser werden diese Zellen allmählich abgespült und wir erhalten dann die seröse Hülle frei von fremden Elementen. Nach Behandlung der frischen Objecte mit Carmin zeigen die Zellen einen stark ausgeprägten Kern, manchmal zwei, auch drei. Die Conturen der Zellen sind scharf gezeichnet. Das leicht von Carmin tingirte Protoplasma ist feinkörnig; einige Zellen erscheinen stark vergrössert; das Protoplasma derselben ist nicht überall gleichmässig, stellenweise zeigt es scharf umschriebene kreisrunde oder ovale Flecke, die viel durchsichtiger sind als das umgebende Protoplasma. Hier scheint es, als ob das Protoplasma verdünnt wäre, und zwar stellenweise so stark, als ob man es hier mit Lücken zu thun habe. Wenn man aber die Membran faltet, so kann man sich überzeugen, dass es keine Lücken sind, indem an diesen Stellen die Anwesenheit einer homogenen Membran nachzuweisen ist. In den

1) Die Amputation der Portio vaginalis beim Meerschweinchen. St. Petersburg, 1871. Inaug. Diss. (russisch).

späteren Perioden der Schwangerschaft, wenn die Uterinanschwellungen 1,5 Cm. gross sind, finden wir die Veränderungen der Epithelialzellen der serösen Hülle sehr stark ausgeprägt. Bei der Untersuchung mit blossem Auge oder mit einer Lupe zeigt die seröse Hülle Stellen, wo sie als ein Netz erscheint mit Maschen von verschiedener Grösse. Mit Carmin tingirt zeigt sie bei der microscopischen Untersuchung folgende Veränderungen. Die oben beschriebenen hellen Stellen in dem Protoplasma der Zellen stellen sich hier heraus als wirkliche Lücken. Die Conturen der Zellen erscheinen sehr deutlich als scharfe, mit Carmin tingirte Linien; innerhalb dieser Zellengrenzen finden wir je einen stark durch Carmin tingirten Kern, umgeben von einer nicht beträchtlichen Menge von Protoplasma. Dieser centrale Rest des Protoplasma sendet zahlreiche Fortsätze nach allen Richtungen, welche reichlich anastomosiren und dadurch das zierliche Netzwerk hervorrufen, dessen Zwischenräume ganz leer sind, so dass wir anstatt der Epithelialzellen hier nur einen Rest von ihrem Protoplasma bemerken, welches das Aussehen eines Netzwerkes hat, das vermuthlich dadurch entstanden ist, dass gewisse Stellen des Protoplasma sich allmählich verdünnten und durchbrochen wurden. Davon, dass dies wirklich Lücken sind, können wir uns sehr leicht überzeugen, indem wir an dem Präparate Falten bilden. Hier sehen wir, dass zwischen den Resten des Protoplasma sich gar nichts vorfindet; dasselbe sehen wir auch beim Zerzupfen des Präparates. Bei der Untersuchung der Theile der serösen Hülle, die sich an dem der Placenta gegenüberliegenden Pole des Eies befinden, bemerken wir die regressiven Veränderungen viel stärker ausgeprägt. Hier sind sehr grosse Bezirke zu gewinnen, wo die Conturen der Zellen gar nicht sichtbar sind; wir haben dann nur ein Netzwerk vor uns, dessen Maschen, sammt den die letzteren begrenzenden Trabekeln von verschiedener Grösse erscheinen. Etliche derselben sind so dünn, dass sie kaum bemerkbar sind. Diese Trabekeln enthalten stellenweise anscheinend ohne jede Ordnung zerstreute Kerne, die den oben beschriebenen in den Epithelialzellen vorkommenden ganz analog gebildet sind. Gewöhnlich finden wir dieselben von einer Anhäufung von Protoplasma umgeben. Endlich sind auch Bezirke vorhanden wo die Maschen des Netzwerkes sehr gross sind, die Trabekeln immer dünner, die Kerne an Zahl immer geringer

werden und die Grenzen der Zellen auf sehr grossen Flächen nicht sichtbar sind. Bei einer so starken Destruction der serösen Hülle kann man zuweilen noch ziemlich gut conservirte Stellen in der Region des Sinus terminalis vorfinden.

Gestützt auf diese Beobachtungen können wir ein doppeltes Schicksal der Zellen der serösen Hülle, je nach dem Orte ihrer Anwesenheit, unterscheiden. Der Theil der serösen Hülle, der den Gefässen der wuchernden Allantois nahe liegt, proliferirt reichlich und formt sich in die Epithelialzellen um, die diese Haut bekleiden. Der andere Theil befindet sich unmittelbar auf dem Dottersack, dessen Gefässblatt noch sehr ungenügend entwickelt und von der serösen Hülle durch die ganze Höhle des Dottersacks getrennt ist. Das rasche Wachsthum des Eies, das sich zu dieser Zeit beobachten lässt, bewirkt eine sehr beträchtliche Ausdehnung dieser Haut und bedingt damit auch eine solche der Zellen, welche der oben beschriebenen Veränderung unterliegen. Die Zellen werden immer flacher und dünner, wodurch sie grösser erscheinen. Diese Veränderung in der Zelle selbst vollzieht sich nicht gleichmässig und bedingt damit die oben beschriebenen mehr durchsichtigen Stellen des Protoplasma, die ganz ähnliche Bilder bedingen wie die, welche *Schwalbe*[1]) in dem Epithel der Descemet'schen Haut als eine Alterserscheinung beschrieben hat. Diese dünneren Stellen werden, wie wir oben gesehen, später zu wahren Lücken, sodass wir die Zelle bekommen, wie sie auf Fig. 2 gezeichnet ist. Die dünnen Trabekeln zwischen diesen Lücken, wie auch die peripherischen Theile der Zellen, welche zu ihrer Abgrenzung (Conturen) dienten, gehen allmählich zu Grunde, und bedingen das zierliche Netzwerk, welches wir in Fig. 3 sehen.

Einen gleichen Process konnte ich, soweit mir die Literatur bekannt, nicht beschrieben finden auf dem Gebiete der normalen Histologie und Embryologie. Dagegen scheinen die Veränderungen, welche die Epithelialzellen des Larynx und der Trachea bei Croup und Diphteritis erleiden und die von *Wagner* (Archiv für Heilkunde, 1866) als fibrinöse Degeneration der Epithelien beschrieben sind, mit denen der Zellen der serösen Hülle einige Aehnlichkeit zu besitzen; diese Aehnlichkeit betrifft aber nur die äussere Form, da die Bedingungen und das Wesen der

1) Schultze's Archiv f. micr. Anatomie. Bd. VI. S. 285.

Degeneration in den beiden Fällen unzweifelhaft sehr verschieden sind. Die beschriebene Degeneration der Zellen der serösen Hülle wollen wir, da wir an der Stelle der Epithelialzellen ein Reticulum finden, vorläufig als reticuläre Degeneration des Epithels bezeichnen.

Leipzig, August 1872.

Erklärung der Abbildungen.

Fig. 1. Schematische Darstellung des Kanincheneies in der Periode der Schwangerschaft, wenn die, die Eier enthaltende Uterinanschwellungen 2,5 Cm. im Durchmesser haben.

Schwarz. Seröse Hülle und Amnion.
Punctirt. Epithel des Dottersackes.
Blassroth. Gefässblatt des Dottersackes.
Grün. Allantois.
Blau. Die Endothelialschicht.
Ziegelroth. Gefässe der Allantois.
E. Abgelöster Theil der Uterinschleimhaut.
S. t. Sinus terminalis.

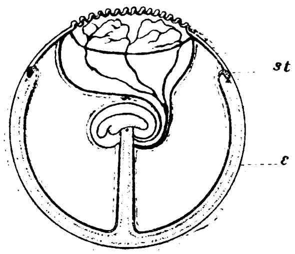
Fig. 2. Zellen der serösen Hülle des Kanincheneies. Einige von denselben sind gut erhalten, andere erscheinen durchlöchert. Das Protoplasma der mittleren Zelle ist in ein Netz verwandelt. Hartnack. Syst. 7. Ocul. 4.

Fig. 3. Das Netzwerk (reticulum) anstatt der Zellen der serösen Hülle. Die Grenzen der Zellen sind verschwunden. Hartnack. Syst. 8. Ocul. 3.

Fig. 3.

Fig. 2.

Fig. 1.



Berichte d.K.S.Ges.d.Wiss.math.phys.Cl. 1872.
Zur Abhandlung v.Dr.Slavjanski

Lith. Anst. v. J.G. Bach, Leipzig.

Dr. **N. Afonassiew**, *Welcher Bestandtheil des Erstickungsblutes vermag den diffundirbaren Sauerstoff zu binden.* — Aus dem physiologischen Institute zu Leipzig. Vorgelegt von dem wirkl. Mitgl. *C. Ludwig*.

Nach zahlreichen und auf mannichfache Weise variirten Beobachtungen, welche von *Alex. Schmidt* angestellt wurden, besitzt das sogenannte Erstickungsblut die Eigenschaft, einen Theil des Sauerstoffgases, das ihm von aussen her zugeführt wurde, so umzuwandeln, dass dasselbe durch den luftleeren Raum nicht mehr auszutreiben ist; an die Stelle eines aliquoten Theils des verschwundenen Sauerstoffes tritt Kohlensäure. Dieses Verhalten des Erstickungsblutes fand *Pflüger* in zwei Beobachtungen bestätigt. — An welchen Bestandtheil des Blutes, ob an den aufgeschwemmten oder an den flüssigen, sich die Eigenschaft knüpft das Sauerstoffgas zu verzehren, blieb hierbei unerledigt. Die Aufklärung hierüber gewann ein erhöhtes Interesse, seitdem *Hammarsteen* gefunden hatte, dass die Lymphe kein entsprechendes Verhalten aufzeigt. Einer Aufforderung des Herrn Prof. *Ludwig* zu Folge habe ich es desshalb unternommen, die aufgeworfene Frage zu beantworten.

Um zu entscheiden, ob das Serum oder die in demselben aufgeschwemmten Stoffe das diffundirbare Oxygen in feste Verbindungen überführen, ist es selbstverständlich genügend, den Versuch einestheils am Serum und anderntheils am Gesammtblut anzustellen. Zunächst schien es mir jedoch gerathen, die Untersuchung mit dem Serum des Erstickungsblutes allein zu beginnen, ebensowohl darum, weil sich hierdurch die Beobachtung wesentlich vereinfachte, als auch desshalb, weil sich durch dieses Verfahren die ganze Frage erledigen liess, vorausgesetzt dass dasselbe zu einem positiven Resultate geführt haben würde.

Der Plan, nach welchem der Versuch ausgeführt werden sollte, war mir von meinen Vorgängern schon vorgezeichnet; er bestand darin, die Gase des Serums aus dem Erstickungsblute für sich allein und ebenso die Gase eines beliebigen arteriell gemachten frischen Blutes für sich allein, und endlich die eines Gemenges aus den beiden ebengenannten Flüssigkeiten abzuscheiden und zu analysiren. Die Ausführung dieses Planes im Einzelnen gestaltete sich folgendermassen. Ein starker Hund, dem eine weite Canüle in die eine seiner Carotiden eingebunden war, wurde erstickt; da es sich darum handelte, mehrere hundert Cbc. Blut zu gewinnen, so wurde der Anfang mit dem Aderlass gemacht, bevor noch das Auge seine reflectorische Empfindlichkeit vollkommen eingebüsst hatte. Das Merkzeichen für die Zeit des Aderlasses nahm ich aus der tiefdunklen Farbe, die das Blut angenommen, welches probeweise durch die Canüle abgelassen worden war. Derjenige Theil des Letzteren, welcher zur analytischen Verwendung kommen sollte, wurde auf bekannte Weise über Quecksilber in Glasröhren aufgefangen, deren obere und untere Oeffnung in den beiden ersten Versuchen mit luftdichtem Kautschuk, in allen späteren durch eingeschmolzene Glashähne verschlossen waren. Nachdem die gewünschte Menge von Blut auf mehrere Röhren vertheilt gewonnen worden war, wurde dasselbe nach Vollendung seiner Gerinnung der Centrifuge übergeben, um dort die Abscheidung des Serums zu veranlassen. War dieses geschehen, so wurde unter Abschluss der Luft das vollkommen farbstofffreie Serum, welches in den verschiedenen Röhren vorhanden war, in eine Glaskugel übergeführt, von deren Polen zwei Glasröhren mit luftdichtschliessenden Hähnen ausgingen. Das in dieser Kugel durcheinander geschüttelte Serum wurde auf die Blutgefässe vertheilt, welche an die Luftpumpe gehören. Zwei dieser letzteren Gefässe wurden zurückgesetzt, damit später aus ihnen der Luftgehalt des Serums bestimmt werden konnte; ein drittes wurde dagegen zur Mischung mit dem arteriellen Blute verwendet. Da die Volumina der Bestandtheile des Gemenges sehr genau bekannt sein müssen, so bediente ich mich zur Abmessung derselben der mit einem Hahn versehenen gläsernen Kugelröhren, welche im hiesigen Laboratorium als sogenannte Recipienten der Gaspumpe im Gebrauche sind. Ein solches Gefäss von bekanntem Inhalt ward also mit Serum gefüllt und darauf unter Quecksilber in

ein anderes ähnliches Gefäss entleert, welches mehr als doppelt so viel Rauminhalt wie das erstere besass. Hierauf wurde das kleinere Gefäss sorgfältig gereinigt und getrocknet und nun mit dem arteriellen Blut gefüllt, worauf alsdann dieses letztere ebenfalls in den grossen Recipienten zu dem Serum gebracht ward. Auf diese Weise erlangte man die Gewissheit, dass das Gemenge zu gleichen Theilen aus Blut und Serum bestand. Selbstverständlich konnte statt des eben genannten Verhältnisses der Bestandtheile auch jedes andere gewählt werden, wenn man statt gleich grosser ungleich grosse Recipienten in Anwendung brachte. Zu diesem letzteren Mischungsverhältniss habe ich in der That mehrmals gegriffen, wobei für mich die Mengen des zu Gebote stehenden Serums bestimmend wirkten. Nachdem in der grössern Kugel Blut und Serum gut durcheinander geschüttelt waren, wurde der Inhalt derselben auf zwei kleinere Recipienten vertheilt, so dass nun nicht allein das Verhältniss der Mischung, sondern auch das absolute Volum derselben, welches zum Entgasen diente, bekannt war. Die vierfache Ueberfüllung des Serums aus einem Gefäss in ein anderes erforderte die Vorsichtsmassregel, die Vertauschung desselben gegen Quecksilber erst dann vorzunehmen, nachdem dieses letztere vor der Pumpe luftfrei gemacht worden war. — Das Blut, welches dem Serum zugesetzt wurde, ward einem zweiten Hund entzogen, und zwar jedesmal unmittelbar nach der Gewinnung des Erstickungsblutes.

Nach den oben geschilderten Vorbereitungen standen nun drei Paare von Gefässen für die Auspumpung bereit. Die Reihenfolge dieser letztern selbst wählte ich so, dass zuerst das arteriell gemachte Blut, dann das reine Serum, und endlich das Gemenge aus beiden an die Pumpe gebracht wurde. Die Entgasung sämmtlicher Flüssigkeit war jedesmal in 6 Stunden vollendet.

Kaum wird es noch der Bemerkung bedürfen, dass die Flüssigkeiten vor und nach ihrer Ueberfüllung bis zum Beginn des Auspumpens in Eiswasser aufbewahrt wurden. Wohl aber halte ich es für wichtig zu erwähnen, dass die Centrifuge in einem ungeheizten Raume stand, der, weil diese Versuche im Winter ausgeführt worden sind, nur wenige Grade über Null temperirt war.

Aus den auf diese Weise vorbereiteten Flüssigkeiten habe

ich die nachstehend verzeichneten Zahlen gewonnen. Um den Grad der Uebereinstimmung zu zeigen, welcher zwischen den verschiedenen Analysen desselben Gasgemenges besteht, sollen zuerst die Zahlen aus sämmtlichen Beobachtungen, bei denen das Serum des Erstickungsblutes in Verwendung kam, aufgeführt werden. Die Gasvolumina sind auf ein Meter Hg. und 0° C. reducirt und für 100 Volumina Flüssigkeit berechnet.

	Gesammtgase	CO_2	O.	N.
I.				
Serum des Erstickungsblutes	a 44,30[1]	43,18	0,11	1,02
	b 44,36	43,20	0,10	1,05
Arterienblut	a 31,88	14,75	15,44	1,69
	b —	14,84	—	—
Gemenge aus gleichen Theilen Serum und Arterienblut	a 38,06	28,98	7,72	1,36
	b 38,10	28,97	7,78	1,35
II.				
Serum des Erstickungsblutes	a 46,60	45,75	0,09	0,76
	b 46,62	45,62	0,11	0,80
Arterienblut	a 30,51	15,97	13,00	1,54
	b 30,50	16,24	13,10	1,20
Gemenge aus gleichen Theilen Serum und Arterienblut	a 38,35	30,53	7,82	—
	b 38,08	30,39	6,59	1,09
III.				
Serum des Erstickungsblutes	a 41,73	40,71	0,10	0,92
	b 41,68	40,69	0,09	0,90
Arterienblut	a 35,00	18,22	15,20	1,58
	b 35,07	18,13	15,30	1,64
Gemenge von Serum zum arteriellen Blut im Verhältniss von 77,31 zu 100,00	a 37,83	27,93	8,60	1,30
	b 37,77	27,96	8,52	1,27
IV.				
Serum des Erstickungsblutes	a 53,65	52,79	0,04	0,82
	b 53,54	52,60	0,00	0,94
Arterienblut	a 33,46	18,12	14,06	1,28
	b 33,31	18,16	14,10	1,05
Gemenge von Serum zum arteriellen Blut im Verhältniss von 57,0 zu 43,0	a 44,73	37,73	5,85	1,15
	b 44,60	37,60	7,00	—

	Gesammtgase	CO_2	O.	N.
V.				
Serum des Erstickungsblutes	a 46,13	45,20	0,04	0,89
	b 46,17	45,26	0,05	0,86
Arterienblut	a 42,54	22,77	18,78	0,99
	b 42,65	22,99	18,68	0,98
Gemenge von Serum zum arteriellen Blut im Verhältniss von 60,1 zu 39,9	a 44,62	36,08	7,53	1,01
	b 44,52	36,10	7,42	1,00

Um zu erfahren, welche Antwort die vorstehenden Zahlen auf die erhobene Frage ertheilen, wird es nothwendig, aus je einem Paare von Analysen desselben Gasgemisches das Mittel zu ziehn, darauf aus den Bestandtheilen des Blutes und des Serums für sich die Zusammensetzung der Gase zu berechnen, welche das Gemenge aus Blut und Serum zu liefern befähigt war und schliesslich diesen berechneten Werth mit dem zu vergleichen, welcher aus der Mischung der genannten Flüssigkeiten wirklich erhalten war. Das Ergebniss dieser Rechnung ist in der folgenden Tabelle enthalten.

	CO_2	O.	N.
I.			
Serum	43,19	0,11	1,04
Arterienblut	14,79	15,44	1,69
Gemenge aus beiden gefunden	28,98	7,75	1,36
Gemenge aus beiden berechnet	28,99	7,77	1,37
II.			
Serum	45,69	0,10	0,83
Arterienblut	16,16	13,05	1,37
Gemenge aus beiden gefunden	30,46	6,59	1,09
Gemenge aus beiden berechnet	30,93	6,56	1,10

	CO_2	O.	N.
III.			
Serum	40,70	0,10	0,91
Arterienblut	18,18	15,25	1,61
Gemenge aus beiden gefunden	27,94	8,56	1,29
Gemenge aus beiden berechnet	27,99	8,64	1,31
IV.			
Serum	52,70	0,02	0,88
Arterienblut	18,14	14,08	1,17
Gemenge aus beiden gefunden	37,67	5,85	1,15
Gemenge aus beiden berechnet	37,83	6,06	1,00
V.			
Serum	45,23	0,05	0,88
Arterienblut	22,88	18,73	0,99
Gemenge aus beiden gefunden	36,09	7,48	1,00
Gemenge aus beiden berechnet	36,31	7,50	0,93

Wenn man die aus dem Gemenge gefundenen mit den aus seinen Bestandtheilen berechneten Zahlen vergleicht, so ist zu erkennen, dass die Abweichungen zwischen beiden sehr unbedeutend sind. Dieses tritt am überzeugendsten hervor durch die Bildung einer Mittelzahl aus sämmtlichen Beobachtungen. Für die Kohlensäure beträgt die gefundene Zahl 32,23%, die berechnete dagegen 32,40%, während für den Sauerstoff der gefundene Werth sich auf 7,24%, der berechnete dagegen auf 7,31% beläuft. Die Abweichungen, welche diese Zahlen zeigen, liegen vollkommen innerhalb der Grenzen des analytischen Fehlers. Wollte man trotzdem in derselben einen Fingerzeig für die Veränderung des Erstickungsserums durch das arterielle Blut finden, so würde man in unserer Flüssigkeit auf einen wesentlich andern Vorgang als im Gesammtblute zu schliessen haben, da sich im Erstickungsserum mit dem verschwindenden Sauerstoff auch die CO_2 mindert, während sich im Erstickungsblute

bei demselben Verhalten des O die CO_2 mehrt. Somit lassen, wie es scheint, die vorstehenden Beobachtungen keinen Zweifel darüber, dass in dem zur Verwendung gekommenen Erstickungsserum kein Stoff enthalten gewesen war, der unter Aufnahme des Sauerstoffs aus den Blutscheiben eine Bildung von Kohlensäure veranlasst hatte.

Um diese für die verwendeten Serumsarten giltige Antwort zu verallgemeinern, reichen jedoch die vorliegenden Beobachtungen nicht aus, da es nach den Erfahrungen von *Alex. Schmidt* feststeht, dass es, wenn auch in seltenen Fällen, Erstickungsblut geben kann, welchem die leichtverbrennlichen Stoffe fehlen. Somit würden meine Beobachtungen erst dann für die Behauptung eintreten, dass die genannten Stoffe nicht im Serum des Erstickungsblutes enthalten seien, wenn nachgewiesen wäre, dass das Blut, dem sie entnommen, mit Substanzen, welche Sauerstoff verzehren, behaftet gewesen sei. Dieser Nachweis musste also angetreten werden. Die zu diesem Ende unternommenen Versuche gestalten sich allerdings sehr complicirt, da sich zu den für die Prüfung des Serums nothwendigen Operationen noch die weiteren hinzugesellen, das Erstickungsblut, welchem das Serum entnommen, ist für sich und nach Zusatz einer abgemessenen Menge von Sauerstoff zu entgasen, so dass statt dreier nun fünf Paare von Auspumpungen nothwendig werden. Obwohl auch diese grössere Zahl von Entgasungen bei angestrengter Arbeit in einem Tage zu bewältigen ist, so kann doch der Verdacht nicht abgewiesen werden, dass sich die Zusammensetzung der Gase in dem länger aufbewahrten Blute verändert habe bez. nicht dieselbe geblieben sei, welche ihr im lebenden Blute zukam. Glücklicherweise lässt sich jedoch das aus diesem Umstande fliessende Bedenken beseitigen, wenn es, wie im vorliegenden Falle, nur auf den Nachweis ankommt, dass wohl das gesammte Erstickungsblut, nicht aber das Serum mit Substanzen versehen sei, die den diffundirbaren Sauerstoff in eine feste Verbindung überführen. Unter dieser Voraussetzung wird der fehlerhafte Schluss, welcher aus der postmortalen Veränderung entstehen kann, vermieden, wenn man die Reihenfolge der Auspumpungen in der nachstehenden Ordnung wählt: Entgasen 1. des Erstickungsblutes, welchem Sauerstoff zugesetzt ist, 2. des Erstickungsblutes für sich allein, 3. des arteriell

gemachten Blutes, 4. des Gemenges aus Serum des Erstickungs- und des arteriell gemachten Blutes, 5. des Serums für sich allein. Bei dieser Anordnung des Versuchs wird offenbar die postmortale Verzehrung des Sauerstoffs im Erstickungsblute weit kleiner als die in dem Gemenge aus arteriellem Blut und Serum werden müssen, so dass ein Unterschied, der sich in der Bindung des Oxygens darlegt, sicherlich auf Rechnung ursprünglicher Eigenschaften des Gesammtblutes zu schreiben ist. Zwei Beobachtungen, die ich nach dem mitgetheilten Plan ausführte, ergaben folgende Zahlen. Da die im Serum gefundenen Gase schon ausführlich unter Nr. 4 und 5 in der Tabelle auf Seite 256 aufgeführt sind, so kann ich mich hier auf eine Erwähnung der Mittelzahlen beschränken, so dass nur die aus dem gesammten Erstickungsblut für sich und nach Zusatz von Sauerstoff gewonnenen Resultate ausführlicher anzugeben sind.

	Gesammtgase	CO_2	O.	N.
I.				
Erstickungsblut	a 47,73	45,09	1,51	1,13
	b 47,50	45,06	1,44	1,00
Erstickungsblut mit 11,12	a 58,86	45,41	11,85	1,60
p. C. Sauerstoff . . .	b 58,75	45,49	11,86	1,40
Serum des Erstickungsblutes.	—	52,70	0,02	0,88
Arterienblut	—	18,14	14,08	1,47
Gemenge aus beiden . .	—	37,67	5,85	1,45
II.				
Erstickungsblut	a 40.35	39,26	0,10	0,99
	b 40,35	39,82	0,09	0,94
Erstickungsblut mit 14,06	a 54,45	40,47	13,12	1,16
p. C. Sauerstoff . . .	b 54,53	40,27	13,11	1,15
Serum des Erstickungsblutes.	—	45,23	0,05	0,88
Arterienblut	—	22,88	18,73	0,99
Gemenge aus beiden . .	—	36,09	7,48	1,00

Zieht man aus den Doppelanalysen, welche mit dem Erstickungsblut für sich und nach Zusatz von Sauerstoff zu dem-

selben gewonnen sind, das Mittel, so gelangt man zu den folgenden Zahlen:

	CO_2	O.	N.
I.			
Erstickungsblut für sich .	45,08	1,48	1,07
Erstickungsblut mit 11,12 p. C. O.	45,45	11,86	1,50
II.			
Erstickungsblut für sich .	39,29	0.10	0,97
Erstickungsblut mit 14,06 p. C. O.	40,22	13,12	1,16

Aus ihnen ergiebt sich, dass in der ersten Beobachtung von dem zugesetzten Sauerstoff 0,74 Volumina verschwunden und 0,37 Volumina mehr an Kohlensäure aufgetreten sind. In dem Serum desselben Blutes waren dagegen nach dem Zusatz sauerstoffreicher Scheiben nur 0,21 Volumina Sauerstoff verschwunden und 0,16 Volumina CO_2 gewonnen.

In der zweiten Beobachtung waren aus dem Erstickungsblute nach Sauerstoffzusatz 1,04 Vol. O verschwunden und 0,93 Vol. CO_2 eingetreten. In dem Serum desselben Blutes war dagegen nach Zusatz von sauerstoffhaltigen Scheiben gar kein O verschwunden, dagegen 0,24 Vol. CO_2 weniger als man zu erwarten hatte aufgefunden. Dieses Resultat drückt sich in Worten dahin aus, dass die Substanz, welche zu Bindung von Sauerstoff und zur Entwicklung von Kohlensäure Veranlassung giebt, in den aufgeschwemmten Theilen des Blutes (rothe und weisse Körperchen) mindestens in weit reicherem Maasse als in dem Serum vorkommt. Ja es wird nach den Angaben, welche die Untersuchung des Serums für sich allein liefert, in hohem Grade wahrscheinlich, dass jene leicht zersetzbaren Substanzen diesem letzteren ganz fehlen.

Nach der Wendung, welche durch diese Untersuchung die Frage von den leicht oxydirbaren Stoffen des Erstickungsblutes

genommen hat, würden dieselben für die normale Respiration von Bedeutung sein, wenn sich nachweisen liesse, dass sie regelmässig und ununterbrochen in den aufgeschwemmten Blutbestandtheilen entstünden. Solange hierüber kein Aufschluss gewonnen ist, und solange es zweifelhaft bleibt, ob jene Stoffe an den rothen oder weissen Körperchen haften, wird es rathsam sein, weitere Folgerungen zu unterdrücken.

Eilhard Wiedemann, *Ueber die elliptische Polarisation des Lichtes und ihre Beziehungen zu den Oberflächenfarben der Körper*. Vorgelegt von dem wirkl. Mitgliede *W. Hankel.*

§. I.

Die bereits von *Arago* beobachteten Veränderungen des Lichtes bei der Reflexion an Metallen wurden von *Brewster* [1]) im Jahre 1830 näher untersucht. Aus seinen Messungen berechnete dann Hr. *Neumann* [2]) unter Zugrundelegung der Vibrationstheorie die Verzögerungen der in und senkrecht zu der Einfallsebene polarisirten Strahlen und das Verhältniss ihrer Amplituden nach der Reflexion, wenn es vor derselben gleich Eins war. Die Beobachtungen von *Brewster* beziehen sich theils auf weisses, theils auf mittleres rothes, gelbes und blaues Licht; dabei sind aber keine genaueren Angaben über den betreffenden Theil des Spectrums gemacht. Eine derartige Untersuchung nahm zuerst Hr. *Jamin* [3]) vor. Er ermittelte in seiner Arbeit über die Farben der Metalle für die verschiedenen Theile des Spectrums den »Haupteinfallswinkel«, bei dem der Gangunterschied der in und senkrecht zu der Einfallsebene polarisirten Strahlen eine Viertelwellenlänge beträgt und den Winkel, dessen Tangente das Verhältniss der Intensitäten dieser beiden Strahlen bei dem Haupteinfallswinkel giebt. In seinen weiteren Arbeiten über die elliptische Polarisation des Lichtes bei der Reflexion an Metallen

1) *Brewster*, Phil. Trans. 1830. Vol. 2. p. 287. Pogg. Ann. Bd. 21. p. 219. 1831.

2) *Neumann*, Pogg. Ann. Bd. 26. p. 89. 1832.

3) *Jamin*, Ann. de chim. et phys. Ser. III. T. 22. p. 311. 1848. Pogg. Ann. Bd. 74. p. 532. 1848.

und durchsichtigen festen und flüssigen Körpern [1]) wandte er stets homogenes rothes Licht an und fand seine Resultate in Uebereinstimmung mit den von *Cauchy* aufgestellten theoretischen Formeln. In einer ähnlichen Weise sind die sorgfältigen neueren Arbeiten von Hrn. *Quincke* [2]) angestellt, wobei derselbe auch den Einfluss der verschiedenen Herstellung der Metallspiegel und ihrer Dicke in Betracht zieht. Ausser von Hrn. *Jamin* besitzen wir noch von Hrn. *van der Willigen* [3]) Messungen, die sich auf Licht verschiedener Wellenlänge beziehen. Er ermittelte die Ellipticitätsconstanten für eine Reihe von *Fraunhofer*'schen Linien bei Indigo und Blutstein. Dabei ersetzte er, wie auch schon Hr. *Jamin*, das Verhältniss der Intensitäten beim Haupteinfallswinkel durch das Verhältniss der Amplituden; wir wollen diese Grösse das »Hauptamplitudenverhältniss« nennen. Er beschäftigte sich aber ebenso wenig, wie Hr. *Jamin* in seiner Arbeit über die Farben der Metalle, mit der Bestimmung der Verzögerungen und der Verhältnisse der Amplituden bei verschiedenen Einfallswinkeln. Die von Hrn. *van der Willigen* untersuchten Körper zeigen die sogenannten Oberflächenfarben, deren erste nähere Untersuchung wir, wenn auch nur in qualitativer Hinsicht, *Haidinger* [4]) verdanken. Ausserdem hat Hr. *Stokes* über die Körper mit Oberflächenfarben und die elliptische Polarisation an denselben [5]) einige theoretische Bemerkungen veröffentlicht, die aber nur an qualitative Schätzungen und Beobachtungen anknüpfen.

In der vorliegenden Arbeit hat sich der Verfasser die Aufgabe gestellt, Messungen der elliptischen Polarisation bei der Reflexion an Körpern mit Oberflächenfarben für eine Reihe von Einfallswinkeln und für verschiedene *Fraunhofer*'sche Linien auszuführen, einmal um die früheren Schlüsse zu bestätigen, sodann um einige neue Gesichtspunkte für das noch so dunkle Capitel der Oberflächenfarben zu gewinnen.

---

1) *Jamin*, Ann. de chim. et phys. Ser. III. T. 19. 1847, 29. 1850, 31. 1851. Pogg. Ann. Erg. II. p. 437. Erg. III. p. 282 u. p. 269.

2) *Quincke*, Pogg. Ann. Bd. 128. p. 541. 1866.

3) *Van der Willigen*, Pogg. Ann. Bd. 117. p. 464. 1862.

4) *Haidinger*, Neben anderen Stellen: Berichte d. Wiener Akademie Bd. 8. p. 97. 1852.

5) *Stokes*, Phil. Mag. Vol. 6. p. 293. Pogg. Ann. Bd. 91. p. 393. 1854, cf. auch *O. E. Meyer*, Pogg. Ann. Bd. 145. p. 80. 1870.

§. II.

Unter den von den verschiedenen Forschern benutzten Methoden leidet die älteste und directeste von *Brewster* [1]) an manchen Uebelständen. Bei ihr wird polarisirtes Licht von zwei parallel einander gegenüberstehenden Platten reflectirt, und es werden die Einfallswinkel bestimmt, bei denen nach zwei- oder mehrmaliger Reflexion das Licht wieder geradlinig polarisirt ist. Ausserdem wird die Lage der Polarisationsebene des reflectirten Lichtes gegen die des einfallenden aufgesucht. Die Ungenauigkeiten dieser Methode liegen einmal in der Unmöglichkeit, ganz gleiche Platten herzustellen; sind ferner die Platten nicht ganz eben, so mengt sich dem elliptisch polarisirten Licht durch diffuse Reflexion noch natürliches bei, wodurch eine Einstellung auf ein Minimum der Helligkeit statt auf Dunkelheit nothwendig wird. Da aber die Helligkeiten des reflectirten Lichtes bei verschiedenen Einfallswinkeln nach einander untersucht werden, so vergeht zwischen je zwei Beobachtungen eine längere Zeit, und dadurch wird die Vergleichung sehr erschwert.

Neben dieser Methode benutzte Hr. *Jamin* [2]) noch eine andere. Er liess das durch einmalige Reflexion elliptisch polarisirte Licht durch einen Kalkspath gehen und suchte die Lagen seines Hauptschnittes auf, bei denen der extraordinäre und ordinäre Strahl eine gleiche Helligkeit besitzen. Aus diesen Lagen können dann die Richtungen der Axen der von den Aethertheilchen beschriebenen Ellipsen bestimmt werden. Wie bereits *Sénarmont* hervorhob, ist die Genauigkeit einer derartigen Einstellung ziemlich gering und verschieden für verschiedene Individuen.

Sénarmont [3]) selbst hatte schon früher eine andere Methode angegeben. Er bediente sich der Combination eines Glimmerblättchens, in dem die beiden nach den Hauptschnitten polarisirten Strahlen einen Gangunterschied von einer Viertelwellenlänge erleiden und eines Kalkspaths, dem er in einzelnen Fällen noch einen Turmalin beifügte, um das eine Bild des Kalkspathes

1) *Brewster*, Phil. Trans. 1830. Vol. 2. p. 287; Pogg. Ann. Bd. 21. p. 219. 1831.

2) *Jamin*, Ann. de chim. et phys. Ser. III. T. 29. p. 296. 1850; Pogg. Ann. Erg. II. p. 437.

3) *Sénarmont*, Ann. de chim. et phys. T. 53. p. 387. 1840; Pogg. Ann. Erg. I. p. 451.

auszulöschen. Er stellte durch Drehen des Glimmerblättchens und Kalkspathes auf ein Minimum der Helligkeit des einen Bildes ein. Da er meinte, dass homogenes Licht zu lichtschwach sei, so wandte er nur weisses an und erhielt so Messungen für das mittlere Gelb, da beim Verschwinden dieser Farbe aus dem weissen Licht die Intensität des gefärbten am kleinsten ist.

Auch Hr. *Stokes* [1]) hat später unter Ersetzung des Kalkspathes und Turmalins durch ein *Nicol*'sches Prisma diese Methode wieder aufgenommen und erklärt sich, ohne indess die gemessenen Werthe anzugeben, mit der Genauigkeit zufrieden.

In seiner Arbeit über die elliptische Polarisation des Lichtes bei der Reflexion an der Oberfläche krystallinischer Medien benutzte ferner *Sénarmont* [2]) eine vortreffliche aber leider nur für weisses Licht anwendbare Methode. Polarisirtes Licht, das durch die beiden Hälften einer *Soleil*'schen Quarzdoppelplatte gegangen war, wurde von einer das Licht elliptisch polarisirenden Fläche reflectirt und durch ein doppeltbrechendes Prisma aufgefangen. Im Allgemeinen erscheinen sowohl die beiden durch den Kalkspath erzeugten Bilder der Quarzplatte unter einander, als auch in ihren einzelnen Hälften verschieden gefärbt. Man dreht den Kalkspath so lange bis die beiden Hälften des einen Bildes gleich gefärbt erscheinen; aus dieser Lage berechnen sich dann die Phasenunterschiede und die Amplitudenverhältnisse. Verhalten sich die reflectirenden Körper für die verschiedenen Farben nicht sehr nahe gleich, so haben aber Bestimmungen für das weisse Licht wenig Werth. Bei Anwendung homogenen Lichtes leidet die Methode auch an der Schwierigkeit, gleiche Helligkeiten zu vergleichen. Sie ist deshalb für unsern Zweck, wo gerade homogenes Licht untersucht werden soll, nicht brauchbar.

Die *Jamin*'sche [3]) Methode, die auf der Anwendung des zu einem Messinstrument umgewandelten Compensators von *Babinet* in Verbindung mit einem *Nicol*'schen Prisma besteht, ist wohl unstreitig von den bisher angewandten Methoden die beste. Doch muss man bei derselben schon von vornherein homogenes Licht auf den Apparat fallen lassen, was stets umständlich und

---

1) *Stokes*, Phil. Mag. Ser. IV. Vol. 2. p. 420; Pogg. Ann. Erg. III. p. 475.

2) *Sénarmont*, Ann. de chim. et phys. Ser. III. Bd. 20. 1847, Pogg. Ann. Erg. II. p. 513.

3) *Jamin*, Ann. de chim. et phys. Ser. III. T. 29. p. 263. 1850; Pogg. Ann. Erg. III. p. 232.

mit grossem Lichtverlust verbunden ist. Ferner giebt es, so viel mir scheint, kein einfaches Mittel, durch das eine genaue Orientirung der Axen der beiden Quarzkeile gegen die Einfallsebene und unter einander ermöglicht wäre. Ein Fehler in dieser Einstellung führt aber einen ebenso grossen Fehler in die Bestimmung der Lage der Axen der von den Aethertheilchen beschriebenen Ellipsen ein. Wie wenig genau ausserdem unter Umständen die Bestimmungen der Amplitudenverhältnisse sind, zeigt der höchst eigenthümliche Gang dieser Grösse bei einigen der so sorgfältigen Messungen von Hrn. *Quincke.* [1]) Auf die Mängel der Bestimmung der Einfallswinkel vermittelst der *Jamin*'schen Methode, bei der sie durch Coincidiren der Schatten verschiedener Fadenkreuze bestimmt werden, weist Hr. *Quincke* [2]) auch bereits hin.

§. III.

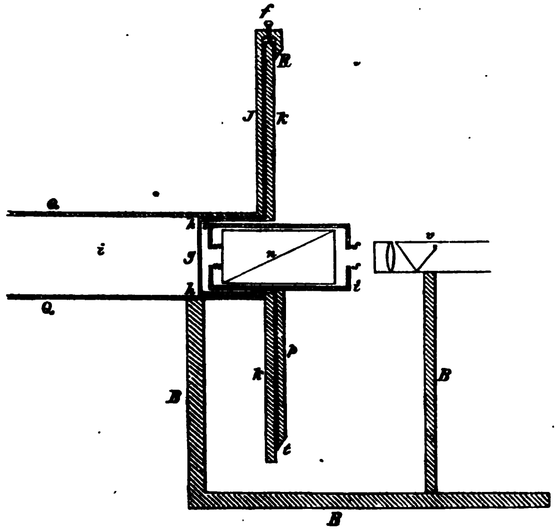
Um die Fehler und Schwierigkeiten der angeführten Methoden nach Kräften zu beseitigen, habe ich mich unter Zugrundlegung der von *Sénarmont* benutzten Verbindung eines Glimmerblättchens und eines Polarisators der folgenden Methode bedient.

Das von einem Heliostaten in das dunkle Zimmer reflectirte Sonnenlicht fiel auf das Collimatorfernrohr eines Spectrometers, welches von der Soc. génév. pour la constr. d'appareils de phys. gearbeitet war. Sein Kreis war bis auf Drittelgrade getheilt. Um die Axe des Apparates konnten ein in der Mitte befindlicher Tisch, der durch drei Schrauben verstellbar war, ein Beobachtungsfernrohr und das Collimatorfernrohr gedreht werden; doch wurde letzteres meist fest gestellt. An allen drei Theilen waren Nonien angebracht, vermittelst deren man Winkel bis auf Minuten genau ablesen konnte.

Zu den Untersuchungen über die elliptische Polarisation wurden folgende Veränderungen vorgenommen. Das Rohr des Collimatorfernrohrs wurde sammt der Linse unverändert beibehalten. Den Spalt ersetzte ich durch einen etwas weiteren vertikalen von $2\frac{1}{4}^{mm}$ Breite und 8^{mm} Höhe, über dessen Mitte ein horizontaler Faden gespannt war, und stellte ihn so ein, dass er

1) *Quincke*, Pogg. Ann. Bd. 128. p. 541. 1866. Tabelle XXX.a.
2) *Quincke*, l. c. p. 546.

sich im Brennpunkt der Collimatorlinse befand. Vor dem Spalt wurde ein in der Axe eines vertikalen Theilkreises drehbares *Nicol*'sches Prisma befestigt, dessen Stellungen mittelst eines Nonius bis auf 5′ genau bestimmt werden konnten. Dies Nicol diente als Polarisator.



Das Beobachtungsfernrohr wurde (cf. Fig., welche einen schematischen Durchschnitt giebt) durch eine Messingröhre Q von gleicher Weite ersetzt, in welcher sich eine Hülse h drehte, die einen in Grade getheilten Kreis k trug. Die Theilung lief im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers. Die Stellung dieses Kreises konnte an einem Nonius R, der an einem an der Röhre Q angeschraubten Arme J befestigt war, abgelesen werden. Vermittelst einer durch denselben Arm J hindurchgehenden Schraube f konnte der Kreis in jeder Lage festgehalten werden. Auf das im Inneren der Röhre Q befindliche Ende der Hülse h war ein Glimmerblättchen g aufgekittet (die beiden nach den Hauptschnitten polarisirten Strahlen erlitten in ihm einen Gangunterschied von etwa einer Viertelwellenlänge); auf seiner Fassung war die Richtung des einen Hauptschnittes, den wir den ersten nennen wollen, markirt. In der Hülse h drehte sich eine zweite Hülse i, in welcher sich ein *Nicol*'sches Prisma n befand, die

Hülse *i* trug an einem Arm *p* einen Nonius *t*, welcher auf der Theilung des Kreises *k* spielte; durch Blendungen *m* und *s* wurde alles seitliche Licht abgehalten.

Von der Röhre *Q* aus war ein starker Bügel *B* von Messing um den Kreis *k* herumgeführt, der ein kleines Spectroskop à vision directe von *Browning v* trug, dessen Axe mit den Axen der Hülse *h*, des Nicol *n* und der Röhre *Q* zusammenfiel und dessen denselben zugekehrter Spalt vertikal stand.

Die Anwendung des Spectroskopes bot den grossen Vortheil, dass man, ohne homogenes Licht von verschiedener Farbe auf den Apparat fallen zu lassen, unter Anwendung des weissen Sonnenlichtes nach einander in einer ununterbrochenen Beobachtungsreihe das Verhalten elliptisch polarisirten Lichtes von jeder durch die *Fraunhofer*'schen Linien im Spectrum bestimmten Wellenlänge untersuchen konnte.

Um nun den Apparat für die Untersuchung der elliptischen Polarisation bei der Reflexion an ebenen Flächen zu benutzen, konnte auf den mittleren Tisch in der Nähe seiner Drehungsaxe eine vertikale Metallplatte aufgeschraubt werden. Gegen diese wurde die zu untersuchende Spiegelplatte und darauf eine zweite mit einem weiten Ausschnitt versehene Metallplatte gelegt, die durch zwei Schrauben an ersterer festgehalten wurde. Das auf den Apparat fallende und durch das *Nicol*'sche Prisma geradlinig polarisirte Licht polarisirt die reflectirende Platte in der Mitte des Tisches elliptisch. Eine nähere Untersuchung dieses wird dann vermittelst der Combination des *Nicol*'schen Prismas und Glimmerblättchens in Verbindung mit dem *Browning*'schen Spectroskop für die verschiedenen Farben ausgeführt.

§. IV.

Der Gang der Untersuchung war folgender. Zuerst wurde unter Fortlassung der Metallplatte auf dem mittleren Tische die Axe des Collimatorfernrohrs, welche durch die Verbindungslinie der Mitte des Querfadens über den Spalt und der Mitte der Collimatorlinse gegeben ist, nach der bekannten Methode [1]) senk-

---

1) Man stellt auf den Tisch des unveränderten Spectralapparates eine planparallele Glasplatte, erleuchtet das Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohrs und zieht es soweit aus, bis das direct gesehene Faden-

recht zur Drehungsaxe gestellt. Hierauf wurde unter Weglassung des *Browning*'schen Spectroskopes die analysirende Vorrichtung der polarisirenden so gegenübergestellt, dass ihre Axen zusammenfielen. Das Glimmerblättchen und das *Nicol*'sche Prisma wurden so lange gegen einander gedreht, bis das vom ersten Nicol polarisirte Licht ausgelöscht war. Es fiel dann die bekanntlich der längeren Diagonale des Querschnittes entsprechende Polarisationsebene desselben mit dem einen Hauptschnitt des Glimmerblättchens zusammen. Es wurde hierbei beobachtet, ob diese Coincidenz für den ersten, durch den Pfeil markirten, oder den anderen Hauptschnitt des Glimmerblättchens stattfand. Die Lage des am *Nicol*'schen Prisma befindlichen Nonius wurde notirt, wenn Pfeil und Längsdiagonale parallel lagen, im anderen Falle wurden noch 90° zur betreffenden Ablesung hinzuaddirt. Diese Ablesung giebt eine der Nulllagen des Apparates.

Nach Entfernung der analysirenden Vorrichtung wurde statt ihrer das Beobachtungsfernrohr eingesetzt. Der Schnittpunkt

---

kreuz und das durch die Reflexion von der planparallelen Glasplatte entstehende Bild denselben bei Verschieben des Auges keine Verschiebungen mehr gegeneinander erleiden, denn steht das Fernrohr auf unendlich ein. Hierauf bringt man das Beobachtungsfernrohr dem Collimator gegenüber und zieht diesen so weit aus, dass das Bild des Spaltes gegen das Fadenkreuz bei Verschiebung des Auges sich nicht mehr verschiebt. Dann bringt man den Schnittpunkt des Fadenkreuzes des Fernrohrs, durch Drehen dieses um eine horizontale Axe, mit einem Punkte des Querfadens über den Spalt zur Deckung, die Axen der beiden Fernröhre fallen dann zusammen. Durch Drehen des Fernrohrs um eine vertikale Axe sucht man das von der Glasplatte reflectirte Bild des Spaltes auf. Kann man nicht durch blosse Drehung um eine vertikale Axe den Querfaden und den Schnittpunkt des Fadenkreuzes zur Deckung bringen, so corrigirt man die Abweichung zum Theil durch Drehen der Glasplatte vermittelst der an dem früher erwähnten Tischchen befindlichen Schrauben und zum Theil durch Heben oder Senken des Collimator- und Beobachtungsfernrohres. Dann erleuchtet man das Fadenkreuz des Beobachtungsfernrohres, sucht das von der Platte reflectirte Bild desselben auf, corrigirt, falls sich die Schnittpunkte der Fadenkreuze nicht zur Deckung bringen lassen, halb die Stellung der Glasplatte, halb die des Fernrohres. Durch Fortsetzung dieser Correctionen gelangt man dahin, dass sowohl direct gesehen, als auch im reflectirten Bild der Schnittpunkt des Fadenkreuzes auf den Querfaden des Spaltes fällt und dass auch das reflectirte Bild des Fadenkreuzes mit diesem selbst zur Deckung durch blosses Drehen um eine vertikale Axe gebracht werden kann. Dann stehen die beiden Fernröhre senkrecht zur Drehungsaxe und diese liegt parallel der Ebene der Platte.

seines Fadenkreuzes wurde auf die Mitte des quer über den Spalt laufenden Fadens eingestellt und die Lage des mit dem Fernrohr verbundenen Nonius abgelesen. Sie sei a. Alsdann wurde auf dem Tischchen die zu untersuchende Platte, welche bei der Reflexion das Licht elliptisch polarisirt (ein Metallspiegel u. s. f.), befestigt, ihre Ebene parallel der Drehungsaxe gestellt, indem man sie mit den 3 Schrauben so lange verstellte, bis der Querfaden über den Spalt im reflectirten Licht durch den Schnittpunkt des Fadenkreuzes ging. Der mit dem Tischchen verbundene Nonius wurde dann auf 0 gestellt, der Schnittpunkt des Fadenkreuzes auf die Mitte des Spaltes im reflectirten Licht eingestellt und der Nonius am Beobachtungsfernrohr abgelesen. Die Ablesung ergebe b. Es ist dann der Einfallswinkel der von dem Spiegel reflectirten Strahlen gleich

$$90 - \frac{b-a}{2}.$$

Ist dann bei ferneren Beobachtungen der Tisch mit dem Spiegel gegen seine Nullstellung um c Grad gedreht, so ergiebt sich der Einfallswinkel ohne weitere Beobachtung

$$i = 90 - \frac{b-a}{2} - c.$$

Das Ocularfernrohr wurde darauf entfernt und statt seiner die Combination des Glimmerblättchens mit dem Nicol eingesetzt und das *Nicol'*sche Prisma so eingestellt, dass seine Polarisationsebene mit einem der Hauptschnitte des Glimmerblättchens zusammenfiel (dann wirkt die analysirende Vorrichtung wie ein einfaches *Nicol'*sches Prisma). Nun drehte man die ganze Vorrichtung mittelst des Kreises k und gleichzeitig das polarisirende Nicol so lange, bis das an der spiegelnden Platte reflectirte Licht, das im Allgemeinen elliptisch polarisirt ist, ausgelöscht wurde. Jetzt fiel die Polarisationsebene des polarisirenden *Nicol'*schen Prismas mit der Einfallsebene zusammen oder stand senkrecht darauf, indem nur in diesen beiden Fällen metallisch wirkende Körper polarisirtes einfallendes Licht auch als geradlinig polarisirtes reflectiren. Welches von beiden der Fall war, entschied wieder die Lage der Längsdiagonale des Querschnittes am polarisirenden Nicol. Durch diese Bestimmung ist auch die Lage des durch den Pfeil bezeichneten Hauptschnittes gegeben. [1])

1) Die an dem Collimatorfernrohr befestigte Linse stört hier, wie bei

Hierauf drehte man das polarisirende *Nicol*'sche Prisma um einen bestimmten Winkel gegen die Einfallsebene, die Tangente des Neigungswinkels ergab dann das Verhältniss der in und senkrecht zu der Einfallsebene polarisirten Lichtstrahlen. Nach Vorsetzung des *Browning*'schen Spectroskopes wurde darauf das Glimmerblättchen und das zugehörige *Nicol*'sche Prisma so lange gegeneinander gedreht, bis ein dunkler Streifen im Spectrum erschien; derselbe wurde durch weiteres Drehen auf eine *Fraunhofer*'sche Linie gerückt und dort auf ein Maximum der Dunkelheit gebracht. Wie später gezeigt werden wird, giebt es zwei wirklich, d. h. nicht um 180^0 verschiedene Lagen des Glimmerblättchens und des *Nicol*'schen Prismas, bei denen dies eintritt; sie wurden beide notirt.

Die Erscheinung eines schwarzen Streifens im Spectrum zeigt an, dass das an der spiegelnden Fläche elliptisch polarisirte Licht durch den Durchgang durch das Glimmerblättchen wiederum linear polarisirt ist, und dass seine Polarisationsebene (die wiederhergestellte Polarisationsebene) auf der Polarisationsebene des analysirenden Nicols senkrecht steht.

§. V.

Hat das Glimmerblättchen eine solche Dicke, dass für Licht von mittlerer Brechbarkeit die nach den Hauptschnitten polarisirten Strahlen einen Gangunterschied von einer Viertelwellenlänge $\left(\frac{\lambda}{4}\right)$ besitzen, so sind die Abweichungen für die übrigen Theile des Spectrums nicht so bedeutend, dass wir nicht wenigstens für qualitative Versuche sie vernachlässigen könnten. Da bei dem Haupteinfallswinkel für eine beliebige Farbe der Gangunterschied der in und senkrecht zu der Einfallsebene polarisirten Strahlen $\frac{1}{4}\lambda$ ist, so wird in diesem Falle das elliptisch polarisirte Licht auf geradliniges zurückgeführt, wenn der eine

---

den folgenden Versuchen, die Polarisationserscheinungen nicht; die etwa zu befürchtende Depolarisation des Lichtes durch die Linse ist nicht merklich. Denn wurde dieselbe zwischen zwei auf eine helle Lichtquelle gerichtete Nicols eingeschaltet, so konnte mit gleicher Sicherheit auf Dunkelheit eingestellt werden, wie ohne die Linse. Dagegen ermöglichte sie eine genaue Bestimmung der Einfallswinkel, die bei dem *Jamin*'schen Verfahren nicht so gut ausführbar erscheint.

Hauptschnitt des Glimmerblättchens in der Einfallsebene liegt, und man kann dann durch alleiniges Drehen des *Nicol*'schen Prismas einen schwarzen Streifen für die betreffende Farbe erzeugen. Ist umgekehrt der eine Hauptschnitt in die Einfallsebene gestellt, und gelingt es durch blosses Drehen des Nicols bei einem bestimmten Einfallswinkel den schwarzen Streifen im Spectrum für eine Farbe hervorzurufen, so ist der betreffende Einfallswinkel der Haupteinfallswinkel für diese Farbe und die Neigung der Polarisationsebene des Nicols gegen die Einfallsebene bestimmt das Hauptamplitudenverhältniss. Es lassen sich so die Haupteinfallswinkel annähernd ohne genauere Messungen bestimmen und in einzelnen Fällen schon gewisse Eigenthümlichkeiten ihres Verlaufes für die verschiedenen Farben ermitteln. Bringt man also z. B. den Hauptschnitt des Glimmerblättchens bei einem Einfallswinkel in die Einfallsebene und verschwindet beim Drehen des Nicols auf einmal das ganze Spectrum oder grössere Theile desselben, so zeigt dies, dass die ausgelöschten Farben nahe denselben Haupteinfallswinkel und nahe dasselbe Hauptamplitudenverhältniss besitzen. Verschwinden dagegen beim alleinigen Drehen des Nicols nach einander verschiedene Theile des Spectrums, so haben diese Farben denselben Haupteinfallswinkel, aber verschiedene Hauptamplitudenverhältnisse.

§. VI.

Für genauere qualitative Bestimmungen bedarf es noch einer mathematischen Ableitung der zu bestimmenden Grössen aus den beobachteten Werthen. Sind m und n die Ablesungen an dem Arm R und dem Nonius t, wenn der erste Hauptschnitt des Glimmerblättchens und die Polarisationsebene des *Nicol*'schen Prisma in der Einfallsebene liegt, m_1 und n_1 dagegen die Ablesungen von R und t bei einem beliebigen Einfallswinkel und einem Auftreten des dunkeln Streifen, so ist die Neigung des Hauptschnittes des Glimmerblättchens bei dieser Lage gegen die erste

$$\varphi = m - m_1 ;$$

die Neigung ψ' der durch die Einschaltung des Glimmerblättchens wiederhergestellten Polarisationsebene gegen den Hauptschnitt des Glimmerblättchens aber

$$\psi' = n_1 - n + 90\,.$$

Diese beiden Grössen hängen ab

1. von der Verzögerung der beiden in und senkrecht zu der Einfallsebene polarisirten, von der Spiegelfläche reflectirten Strahlen,
2. von dem Verhältniss der Amplituden dieser beiden Strahlen,
3. von der Verzögerung, die die beiden, durch das Glimmerblättchen gehenden Strahlen in diesem erleiden. Es ist diese für jede Farbe eine andere Constante. [1])

In der Einfallsebene liege die x Axe, der Lichtstrahl selbst bilde die z Axe, die Verschiebung parallel der x Axe sei u, parallel der y Axe v, die Phasenänderungen der parallel und senkrecht zu der Einfallsebene polarisirten Componenten seien δ und ε und das Verhältniss der Amplituden dieser beiden Strahlen nach der Reflexion sei $\operatorname{tg}\psi$, wenn es vor derselben gleich Eins war, dann sind die Bewegungsgleichungen des reflectirten Strahles

$$(1) \quad \dots \quad \begin{cases} u = \cos\psi \sin(t + \delta) \\ v = \sin\psi \sin(t + \varepsilon) \end{cases}$$

Schalten wir in den Weg des Lichtstrahles ein Glimmerblättchen ein, so können durch dieses nur Strahlen gehen, deren Schwingungen parallel den beiden Hauptschnitten stattfinden. Um die Strahlen nach ihrem Durchgang durch das Glimmerblättchen zu untersuchen, wollen wir deshalb die Bewegungsgleichungen auf ein Coordinatensystem beziehen, dessen Axen x' und y' parallel den Hauptschnitten des Glimmerblättchens sind. In Bezug auf dieses Coordinatensystem lauten die Gleichungen

$$(2) \quad \dots \quad \begin{cases} u' = \cos\psi' \sin(t + \delta') \\ v' = \sin\psi' \sin(t + \varepsilon') \end{cases}$$

δ' ε' ψ' sind abhängig von der Neigung des zweiten Coordinatensystems gegen das erste. Geht nun das Licht durch das Glimmerblättchen, so werden die Phasen des parallel den beiden Hauptschnitten x' y' polarisirten Lichtes um δ'' und ε'' geändert, so dass die Bewegungsgleichungen nach dem Austritt sind:

---

1) Die folgende Ableitung ist in ihren Grundzügen von Hrn. *Kirchhoff* gegeben.

$$u'' = \cos\psi' \sin(t + \delta' + \delta'')$$
$$v'' = \sin\psi' \sin(t + \varepsilon' + \varepsilon'') .$$

Es finden sich nun stets zwei Lagen des Glimmerblättchens und des analysirenden Nicols, für welche

$$\delta' + \delta'' = \varepsilon' + \varepsilon'' \quad \text{oder} \quad \varepsilon' - \delta' = -\{\varepsilon'' - \delta''\}$$

ist. In diesem Fall ist das aus dem Glimmerblättchen austretende Licht linear polarisirt, da beide Strahlen gleiche Phasenänderungen erlitten haben, und $\operatorname{tg}\psi'$ giebt das Verhältniss der Verrückungen parallel x' und y' an. Den Winkel ψ' und den Neigungswinkel von x' gegen x geben aber die Messungen, so dass es möglich ist aus diesen Grössen $\varepsilon' - \delta'$ und $\varepsilon'' - \delta''$, $\varepsilon - \delta$ und $\operatorname{tg}\psi$ zu bestimmen. Diese Bestimmung ergiebt sich folgendermassen: Ist φ der Neigungswinkel von x' gegen x, so ist

$$\left.\begin{aligned} u' &= u\cos\varphi + v\sin\varphi \\ v' &= -u\sin\varphi + v\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Setzen wir hierin für $u\ v\ u'\ v'$ ihre Werthe aus 1 und 2, so erhalten wir nach Auflösung der vorkommenden Sinus und Cosinus folgende Gleichungen in $\sin t$ und $\cos t$

$$\begin{aligned} \cos\psi' \sin t \cos\varepsilon' + \cos\psi' \cos t \sin\delta' = {} & \cos\varphi \cos\psi \sin t \cos\delta \\ & + \cos\varphi \cos\psi \cos t \sin\delta + \sin\varphi \sin\psi \sin t \cos\varepsilon \\ & + \sin\varphi \sin\psi \cos t \sin\varepsilon \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin\psi' \sin t \cos\varepsilon + \sin\psi' \cos t \sin\varepsilon' = {} & -\sin\varphi \cos\psi \sin t \cos\delta \\ & - \sin\varphi \sin\psi \cos t \sin\delta + \cos\varphi \sin\psi \sin t \cos\varepsilon \\ & + \cos\varphi \sin\psi \cos t \sin\varepsilon . \end{aligned}$$

Diese Gleichungen gelten für jedes t, es müssen also in jeder auf beiden Seiten die Coefficienten von $\sin t$ und $\cos t$ gleich sein, hieraus folgt folgendes System von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\alpha)\ \cos\psi' \cos\delta' = \cos\varphi \cos\psi \cos\delta + \sin\varphi \sin\psi \cos\varepsilon \\ &\beta)\ \cos\psi' \sin\delta' = \cos\varphi \cos\psi \sin\delta + \sin\varphi \sin\psi \sin\varepsilon \\ &\gamma)\ \sin\psi' \cos\varepsilon' = -\sin\varphi \cos\psi \cos\delta + \cos\varphi \sin\psi \cos\varepsilon \\ &\delta)\ \sin\psi' \sin\varepsilon' = -\sin\varphi \cos\psi \sin\delta + \cos\varphi \sin\psi \sin\varepsilon \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Quadrirt man α und β und addirt, quadrirt dann γ und δ und addirt und subtrahirt die beiden Summen von einander, so erhält man

(5) $\cos 2\psi' = \cos 2\psi \cos 2\varphi + \sin 2\psi \sin 2\varphi \cos(\varepsilon - \delta)$.

Multiplicirt man ferner β und γ, α und δ und subtrahirt die Producte, so erhält man

(6) . . $\sin 2\psi' \sin(\varepsilon' - \delta') = \sin 2\psi \sin(\varepsilon - \delta)$.

Multiplicirt man endlich α und γ, β und δ und addirt, so findet man

(7) . . $\sin 2\psi' \cos(\varepsilon' - \delta') = -\sin 2\varphi \cos 2\psi + \sin 2\psi \cos(\varepsilon - \delta) \cos 2\varphi$.

Setzen wir zur Abkürzung

$$a = 2\psi$$
$$c = 2\varphi \qquad b = 2\psi'$$
$$B = \varepsilon - \delta \qquad A = 180 - (\varepsilon' - \delta')$$

so gehen Gl. 5, 6, 7 über in

$$(8) \begin{cases} \text{I.} & \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B \\ \text{II.} & \sin b \sin A = \sin a \sin B \\ \text{III.} & \cos a \sin c = \cos A \sin b + \sin a \cos c \cos B. \end{cases}$$

Diese Gleichungen haben dieselbe Form, wie die, auf die man bei der Untersuchung eines sphärischen Dreiecks gelangt, in dem *a b c* die Seiten, *A B C* die Winkel bezeichnen.

Ebenso wie dort ergeben sich daraus die folgenden *Gauss*'schen oder *Delambre*'schen Formeln

$$(9) \ldots \begin{cases} \alpha) & \cos\frac{a}{2}\sin\frac{B+C}{2} = \cos\frac{A}{2}\cos\frac{b-c}{2} \\ \beta) & \sin\frac{a}{2}\cos\frac{B-C}{2} = \sin\frac{A}{2}\sin\frac{b+c}{2} \\ \gamma) & \sin\frac{a}{2}\sin\frac{B-C}{2} = \cos\frac{A}{2}\sin\frac{b-c}{2} \\ \delta) & \cos\frac{a}{2}\cos\frac{B+C}{2} = \sin\frac{A}{2}\cos\frac{b+c}{2} \end{cases}$$

Zunächst soll eine Relation für A gesucht werden. Wir zeigen, dass den Gleichungen 8) zwei Werthsysteme von φ und ψ' Genüge leisten; es ergiebt sich dann daraus auch, dass wir zwei Lagen des Glimmerblättchens und Nicols finden können, für die an derselben Stelle des Spectrums Dunkelheit entsteht.

Ist die Gleichung 8) II.

$$\sin b \sin A = \sin a \sin B$$

durch einen Werth b_1 erfüllt, so genügt ihr auch ein zweiter Werth

$$b_2 = 180 - b_1$$

da

$$\sin b_1 = \sin(180 - b_1) .$$

Führen wir diese beiden Werthe von b in 8) I. und 8) III. ein und bezeichnen die ihnen entsprechenden zwei c Werthe mit c_1 und c_2, so geben diese Gleichungen leicht die gesuchte Relation.

Multiplicirt man I. mit $\sin c_1$ resp. $\sin c_2$, III. mit $\cos c_1$ resp. $\cos c_2$ und addirt, so ergeben sich dann die folgenden zwei Gleichungen

$$\cos b_1 \sin c_1 - \sin b_1 \cos c_1 \cos A = \sin a \cos B$$
$$\cos b_2 \sin c_2 - \sin b_2 \cos c_2 \cos A = \sin a \cos B .$$

Nach Subtraction dieser beiden Gleichungen von einander ergiebt sich unmittelbar

$$\cos A = \frac{\cos b_1 \sin c_1 - \cos b_2 \sin c_2}{\sin b_1 \cos c_1 - \sin b_2 \cos c_2}$$

da nun

$$b_1 + b_2 = 180^0$$

so ist

$$\cos b_1 = -\cos b_2$$
$$\sin b_1 = \sin b_2 .$$

Also ist

$$\cos A = \frac{\cos b_1}{\sin b_1} \left\{ \frac{\sin c_1 + \sin c_2}{\cos c_1 - \cos c_2} \right\} .$$

Nun ist aber

$$\frac{\sin c_1 + \sin c_2}{\cos c_1 - \cos c_2} = - \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{c_1 - c_2}{2}} .$$

Ferner ist

$$b_1 = 180 - b_2$$

also

$$b_1 = \frac{b_1}{2} + \frac{180 - b_2}{2}$$

$$\frac{\cos b_1}{\sin b_1} = \operatorname{cotg}\left\{\frac{b_1}{2} + \frac{180 - b_2}{2}\right\} = -\operatorname{tg}\frac{b_1 - b_2}{2}$$

$$(10) \quad \ldots \quad \cos A = \frac{\operatorname{tg}\frac{b_1 - b_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{c_1 - c_2}{2}}$$

Diese Gleichung bestimmt A, aber es bleibt noch unentschieden, ob wir es mit einem Winkel $+A$ oder $-A$ zu thun haben. Um dies zu entscheiden wurde das benutzte Glimmerblättchen mit einer gegen die Hauptaxe senkrecht geschlossenen Kalkspathplatte zwischen 2 gekreuzte Nicols gebracht. Es zeigte sich, dass, wenn die Hauptschnitte des Glimmerblättchens gegen das in der Kalkspathplatte erscheinende schwarze Kreuz um 45° geneigt waren, in der Richtung des mit dem Pfeil bezeichneten Hauptschnittes die Ringe eine Zusammenziehung erlitten. Daraus folgt, dass die nach diesem Hauptschnitt polarisirten Strahlen die verzögerten sind. Es ist also, da der Phasenunterschied der senkrecht und parallel zu dem Pfeil polarisirten Strahlen gleich

$$\varepsilon'' - \delta''$$

ist,

$$\varepsilon'' - \delta'' > 0\,.$$

Nun ist aber auch

$$A = 180 - (\varepsilon' - \delta')\,,$$

oder da $\varepsilon' - \delta' = -(\varepsilon'' - \delta'')$ ist,

$$A = 180 + (\varepsilon'' - \delta'')$$

also

$$A > 180^\circ.$$

Hieraus ersehen wir, welcher der beiden Werthe für A aus der obigen Gleichung zu nehmen ist. So ist A vollständig bestimmt.

Aus dem Gleichungssystem 8) ergiebt sich

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha) & \operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}\,\dfrac{\sin\frac{b-c}{2}}{\sin\frac{b+c}{2}}\\[2ex] \beta) & \operatorname{tg}\frac{B+C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\,\dfrac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}}\\[2ex] \gamma) & \operatorname{tg}\frac{a}{2} = \operatorname{tg}\frac{b+c}{2}\,\dfrac{\cos\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}\end{array}\right\}\quad \ldots \quad (11)$$

oder nach Einführung von ψ', φ und ψ

$$\left.\begin{array}{ll}\alpha) & \operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\,\frac{\sin(\psi'-\varphi)}{\sin(\psi'+\varphi)}\\[1ex] \beta) & \operatorname{tg}\frac{B+C}{2} = \operatorname{cotg}\frac{A}{2}\,\frac{\cos(\psi'-\varphi)}{\cos(\psi'+\varphi)}\\[1ex] \gamma) & \operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}(\psi'+\varphi)\,\dfrac{\cos\frac{B+C}{2}}{\cos\frac{B-C}{2}}\end{array}\right\}\quad \ldots \quad (12)$$

In dem System 12 bestimmen (α) und (β) die Werthe von $\frac{B-C}{2}$ und $\frac{B+C}{2}$, also auch den Werth von B, während (γ) den Werth von ψ giebt. Dadurch sind alle zu suchenden Grössen als Functionen der beobachteten ψ' und φ ausgedrückt. Bei der Bestimmung von B ist es unbestimmt, ob B einen Werth α oder $180 + \alpha$ hat. Je nach der Annahme, ob bei senkrechtem Einfall die in und senkrecht zu der Einfallsebene polarisirten Strahlen einen Gangunterschied von keiner oder einer halben Wellenlänge erleiden, wird der eine oder andere dieser Werthe zu nehmen sein. In dem Folgenden ist die erstere Annahme gemacht, die wohl auch die richtigere ist, da bei senkrechtem Einfall alles um den einfallenden Strahl symmetrisch liegt. Um ferner aus B die Verzögerung in Theilen von einer Wellenlänge zu erhalten, hat man seinen Werth noch durch 360 zu dividiren. Diese Grösse bezeichnen wir mit δ', das nicht mit dem δ in Gleichung 1 zu verwechseln ist. Wir können also den Gangunterschied und das Amplitudenverhältniss der in und senkrecht zu der Einfallsebene polarisirten

Strahlen, und da durch diese beiden Grössen die elliptische Polarisation des Lichtes vollständig gegeben ist, auch die letztere bestimmen. Je verschiedener die Ellipticität des Lichtes für die verschiedenen Farben ist, um so mehr werden die Lagen des Glimmerblättchens und des *Nicol*'schen Prismas für die verschiedenen Farben von einander abweichen, und um so genauere Resultate wird die Methode geben. Es haben nämlich, wenn die Ellipticität für die verschiedenen Theile sehr verschieden ist, trotzdem dass eine Farbe ausgelöscht ist, die umliegenden doch noch eine bedeutende Intensität; hierdurch ist eine grössere Schärfe des Streifens und damit eine grössere Genauigkeit der Einstellung bedingt.

§. VII.

Nach der oben angegebenen Methode wurden für zwei verschiedene Spiegel von Fuchsin (I und II), für einen Spiegel von Anilinviolett und für einen von Kupfer bei einer Reihe von Einfallswinkeln Messungen angestellt. Die Spiegel von Anilinviolett und Fuchsin waren durch Aufgiessen von Lösungen der betreffenden Körper in Alkohol, auf Glasplatten hergestellt worden. Sie wurden erst einige Zeit nach ihrer Bereitung untersucht. Man erhält dabei manchmal ziemlich gut spiegelnde ebene Flächen, doch konnte bis jetzt kein Verfahren gefunden werden, bei dem dies mit Sicherheit gelang. Das Misslingen beruht darauf, dass die betreffenden Körper sich mehr oder weniger krystallinisch niederzuschlagen pflegen. Versucht man durch Poliren spiegelnde Flächen der Substanzen darzustellen, so erleiden die oberflächlichen Schichten einen Druck, und da dieser nicht nach allen Seiten gleich ist, so sind nicht alle Richtungen auf den Spiegeln gleichwerthig. Bei dem einen, besseren, Fuchsinspiegel I. wurden die Messungen bei Einfallswinkeln angestellt, die um je $2\frac{1}{2}^0$ auseinander lagen, bei den anderen Spiegeln standen sie um 5^0 von einander ab. Die Beobachtungen wurden für das Roth in der Gegend von *C* für die Linie *D*, für die Mitte zwischen den Linien *E* und *b* ($E\frac{1}{2}b$), die Linie *F*, und bei den Fuchsinspiegeln für einen Punkt des Spectrums, der etwa in der Mitte zwischen *F* und *G* ($F\frac{1}{2}G$) liegt, angestellt. Bei den Beobachtungen $E\frac{1}{2}b$ wurde der schwarze Streifen so eingestellt, dass seine beiden Ränder gleichweit von *E* und *b*

abstanden. Die Messungen für $F\frac{1}{2}G$ sind ungenau, da sich einmal der betreffende Punkt nicht fest fixiren lässt, und das Spectrum in dieser Gegend schon ziemlich dunkel ist. Bei den Versuchen war stets die Polarisationsebene des polarisirenden Nicols um 45° gegen die Einfallsebene geneigt, so dass die Intensitäten der in und senkrecht zu der Einfallsebene polarisirten Lichtstrahlen vor der Reflexion gleich waren.

In der Zusammenstellung der Resultate enthalten für jeden Spiegel die Tabellen I. und II. die beobachteten Grössen m_1, m_2 und n_1, n_2, über ihnen stehen die Werthe von m und n (cf. pag. 273). Ferner geben III. und IV. die aus diesen Grössen berechneten Werthe von δ, nämlich δ_1, δ_2 und von $\operatorname{tg}\psi$, nämlich $\operatorname{tg}\psi_1$, $\operatorname{tg}\psi_2$ (die beiden Werthe dieser Grössen entsprechen den beiden Werthsystemen m_1, n_1 und m_2, n_2). Tabelle V. giebt die Mittelwerthe von δ_1 und δ_2 $\delta = \frac{\delta_1 + \delta_2}{2}$ und von $\operatorname{tg}\psi_1$ und $\operatorname{tg}\psi_2$, $\operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg}\psi_1 + \operatorname{tg}\psi_2}{2}$ und $(\operatorname{tg}\psi)^2$, d. h. das Intensitätsverhältniss der in und senkrecht zu der Einfallsebene polarisirten Strahlen. In den Tabellen I. bis V. giebt die erste Verticalreihe den Einfallswinkel i. Tabelle VI. endlich enthält den Haupteinfallswinkel J, seine Tangente, die nach dem *Brewster*'schen Gesetz das Brechungsverhältniss des untersuchten Körpers für die betreffende Farbe giebt (s. weiter unten), das Hauptamplitudenverhältniss $\operatorname{tg}\Psi$ und das diesem entsprechende Hauptintensitätsverhältniss $\{\operatorname{tg}\Psi\}^2$. Die letzten Grössen sind, falls der Haupteinfallswinkel nicht mit einem der beobachteten Einfallswinkel zusammenfiel, durch Interpolation gefunden. Das richtige Hauptamplitudenverhältniss liegt etwas höher als das so gefundene, da bei dem Haupteinfallswinkel das Amplitudenverhältniss ein Minimum erreicht.

Fuchsinspiegel I.

Er war von den untersuchten Spiegeln der beste und die Messungen an ihm die ausgedehntesten. Es lassen diese einen Schluss auf die bedeutende Genauigkeit machen, zu der man mit der angewandten Methode bei vollkommneren Spiegeln, als sie mir zu Gebote standen, gelangen könnte, indem sie schon hier ziemlich gross ist.

Tabelle I.

Werthe von m_1 und m_2.

$m = 226\frac{1}{4}$.

i	C		D		$E\frac{1}{2}b$		F		$F\frac{1}{2}G$	
	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2
79° 4	202½	293½	200¼	291¼	195	283	191¾	278¼	190	278
76 34	206	298¼	205¼	296¼	199	285½	194½	280		
74 4	211½	303	210½	301½	203	289½	197¾	282	194¾	283
71 34	215¼	307	214½	306¼	207	293	201¼	284½		
69 4	220¼	312½	219½	311	211½	296¾	205	287½	201	287
66 34	224	317	223¼	316	216¼	301	208½	290		
64 4	229	320½	228	320¼	220¾	305	213	294	207	296
61 34	232	324½	232¼	324	226	310¼	217	298		
59 4	236	328¼	236	328	230½	314½	220¾	300	213	300½
56 34	239½	331	240	332	234	319½	224½	305		
54 4	242½	334½	243	334¾	239¼	324	230	309	222	309½
51 34	245½	337½	246½	337½	243	327½	233½	313¼		
49 4	249	340¼	249	340½	246	332	238½	319	230	318
46 34	251	342¾	252	343	249¼	335¼	242	323		
44 4	254	344¾	254	345¼	251¾	338¼	245	326½	238	327

Die angegebenen Zahlen sind wie alle folgenden das Mittel aus je drei Ablesungen, bei *C* und *D* beträgt in einem einzigen Fall der Unterschied der abweichendsten Zahlen $1\frac{1}{4}^0$, bei $E\frac{1}{2}b$ $\frac{3}{4}^0$, bei *F* 2^0, doch überschreitet er meist $\frac{1}{2}^0$ nicht, bei $F\frac{1}{2}G$ sind dagegen die Unterschiede weit beträchtlicher.

Tabelle II.

Werthe von n_1 und n_2.

$n = 282^0\ 45'$

i	C		D		$E\frac{1}{2}b$		F		$F\frac{1}{2}G$	
	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2
79° 4	188	287½	184	291	182¼	293¼	184½	290¼	190½	285
76 54	188	287	182¾	292¾	180½	294½	183	229		
74 4	187	289	181	294	178¼	297	181	294	190½	284
71 54	187	287	180¾	294½	177	298	180½	295½		
69 4	186¼	289¼	180	296	176	299½	178	297¼	189	287
66 54	187½	288½	180	295¾	174¾	300¾	177	298½		

i	C		D		$E\frac{1}{2}b$		F		$F\frac{1}{2}G$	
	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2
64° 4	187½	288¼	180	295¾	174¼	301¾	175¾	299	188	287
61 34	187½	288½	181	295	173	301¾	175¾	299¼		
59 4	187¾	289	180¼	294	174	302	175	300½	189	284
56 34	189	287½	181¾	293¾	174¾	301¼	175	300½		
54 4	188¼	287½	182¾	293	175	300½	174	301¾	190	289
51 34	189	287¼	183½	292½	176	299¼	174¼	300½		
49 4	189	287¼	184¼	291¾	177½	298¼	176¼	299½	191	287
46 34	189¾	286½	185¼	290½	178½	297	177	298¼		
44 4	190	285¾	186	289½	180	295½	179	297	196(?)	285

Für C und D betrugen die grössten Abweichungen der Einstellungen 1°, für $E\frac{1}{2}b$ 1½°, für F 2°, doch blieben auch hier die Unterschiede meist weit unter dieser Grösse.

Tabelle III.

Werthe von δ_1 und δ_2.

i	C $A = 257°$		D $A = 266°$		$E\frac{1}{2}b$ $A = 277\frac{1}{2}°$		F $A = 283°$		$F\frac{1}{2}G$ $A = 295°$	
	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2
79° 4	0.036	0.034	0.061	0.058	0.063	0.064	0.046	0.042	0.012	0.012
76 34	0.040	0.038	0.081	0.080	0.078	0.074	0.059	0.055		
74 4	0.066	0.066	0.111	0.107	0.099	0.098	0.070	0.067	0.012	0.004
71 34	0.086	0.069	0.139	0.137	0.115	0.114	0.081	0.080		
69 4	0.153	0.142	0.186	0.185	0.137	0.137	0.099	0.097	0.024	0.026
66 34	0.215	0.234	0.235	0.236	0.164	0.165	0.113	0.112		
64 4	0.354	0.330	0,281	0.284	0.192	0.193	0,134	0.128	0.032	0.035
61 34	0.397	0.390	0.330	0.326	0.227	0.228	0.149	0.150		
59 4	0.432	0.414	0.358	0.367	0.260	0.259	0.175	0.167	0.038	0.013
56 34	0.458	0.446	0.390	0.392	0.288	0.294	0.200	0.199		
54 4	0.458	0.455	0.410	0.409	0.324	0.324	0.240	0.235	0.055	0.152
51 34	0.469	0.463	0.427	0.422	0.350	0.349	0.267	0.264		
49 4	0.472	0.466	0.437	0.434	0.374	0.385	0.316	0.309	0.423	0.368
46 34	0.479	0.474	0.450	0.447	0.392	0.393	0.345	0.340		
44 4	0.482	0.480	0.455	0.456	0.423	0.409	0.376	0.366	0.385	0.472

Der grösste Unterschied zwischen den beiden Werthen beträgt bei C 24, D 9, bei $E\frac{1}{2}b$ 14 und bei F 10 Tausendstel, doch ist er meist weit geringer, so dass hier die Genauigkeit

als genügend betrachtet werden kann. Die in der Tabelle V. gegebenen Mittelwerthe sind deshalb etwa bis auf 5 Tausendstel genau.

Tabelle IV.

Werthe von $tg\,\psi_1$ *und* $tg\,\psi_2$.

i	*C*		*D*		$E\frac{1}{2}b$		*F*		$F\frac{1}{2}G$	
	$tg\,\psi_1$	$tg\,\psi_2$	$tg\,\psi_1$	$tg\,\psi_2$	$tg\,\psi_1$	$tg\,\psi_2$	$tg\,\psi_1$	$tg\,\psi_2$	$tg\,\psi_1$	$tg\,\psi_2$
79° 4	0.425	0.449	0.497	0.499	0.663	0.643	0.761	0.740	0.759	0.762
76 34	0.366	0.351	0.408	0.416	0.590	0.590	0.721	0.689		
74 4	0.258	0.283	0.337	0.342	0.534	0.521	0.638	0.638	0.666	0.648
71 34	0.197	0.199	0.285	0.282	0.480	0.468	0.606	0.583		
69 4	0.137	0.144	0.247	0.259	0.428	0.426	0.529	0.527	0.509	0.524
66 34	0.091	0.099	0.227	0.231	0.391	0.390	0.455	0.487		
64 4	0.113	0.107	0.231	0.236	0.361	0.370	0.434	0.429	0.393	0.340
61 34	0.151	0.156	0.240	0.248	0.360	0.345	0.375	0.365		
59 4	0.211	0.215	0.287	0.278	0.337	0.346	0.358	0.370	0.272	0.273
56 34	0.259	0.256	0.324	0.329	0.333	0,347	0.329	0.330		
54 4	0.320	0.319	0.360	0.368	0.365	0.366	0.328	0.334	0.104	0.123
51 34	0.371	0.376	0.415	0.411	0.391	0.381	0.326	0.311		
49 4	0.441	0.438	0.456	0.463	0.412	0.425	0.318	0.316	0.059	0.092
46 34	0.478	0.484	0.513	0.510	0.456	0.457	0.342	0.328		
44 4	0.542	0.530	0.548	0.555	0.511	0.492	0.363	0.348	0.085	0.210

Diese Zahlen zeigen, dass für *C* die grössten Abweichungen der beiden Werthe für das Amplitudenverhältniss etwa $2\frac{1}{2}$ Hundertel, für *D* etwa 1 Hundertel, für $E\frac{1}{2}b$ 2 Hundertel, für *F* 3 Hundertel betragen, dass aber die Fehler im Allgemeinen weit kleiner sind; die folgende Tabelle, welche die Mittel giebt, enthält auch sehr angenähert die wahren Werthe der Amplitudenverhältnisse bis auf Hundertel genau.

Tabelle V.

Werthe von δ, $tg\,\psi$ und $(tg\,\psi)^2$.

i	C			D			$E\frac{1}{2}b$			F			$F\frac{1}{2}G$		
	δ	tg ψ	(tg ψ)^2	δ	tg ψ	(tg ψ)^2	δ	tg ψ	(tg ψ)^2	δ	tg ψ	(tg ψ)^2	δ	tg ψ	(tg ψ)^2
79° 4	0.035	0.437	0.191	0.060	0.498	0.248	0.063	0.653	0.427	0.044	0.750	0.562	0.012	0.761	0.579
76 34	0.039	0.358	0.128	0.080	0.412	0.170	0.076	0,590	0.348	0.057	0.705	0.500			
74 4	0.066	0.260	0.068	0.109	0.339	0.115	0.098	0.527	0.278	0.068	0.638	0.407	0.008	0.657	0.432
71 34	0.077	0.198	0.039	0.138	0.283	0.080	0.115	0.471	0.222	0.080	0.594	0.353			
69 4	0.147	0.140	0.020	0.186	0.253	0.064	0.137	0.427	0.182	0.098	0.528	0.279	0.025	0.515	0.265
66 34	0.224	0.095	0.009	0.235	0.229	0.052	0.164	0.390	0.152	0.113	0.470	0.221			
64 4	0.342	0.110	0.012	0.283	0.234	0.055	0.192	0.366	0.134	0.134	0.432	0.187	0.033	0.365	0.133
61 34	0.393	0.153	0.023	0.328	0.244	0.060	0.227	0.352	0.124	0.149	0.370	0.137			
59 4	0.423	0.213	0.045	0.363	0.283	0.080	0.260	0.342	0.117	0.170	0.364	0.132	0.028	0.272	0.074
56 34	0.452	0.257	0.066	0.391	0.327	0.107	0.291	0.340	0.110	0.200	0.330	0.109			
54 4	0.457	0.320	0.102	0.410	0.364	0.132	0.324	0.366	0.134	0.237	0.332	0.110	0.075	0.114	0.013
51 34	0.465	0.373	0.139	0.425	0.413	0.171	0.350	0.389	0.151	0.266	0.320	0.102			
49 4	0.468	0.440	0.194	0.435	0.460	0.212	0.379	0.418	0.175	0.313	0.317	0.101	0.400	0.064	0.004
46 34	0.477	0.481	0.231	0.449	0.511	0.261	0.392	0.457	0.209	0.342	0.335	0.112			
44 4	0.481	0.536	0.287	0.455	0.553	0.306	0.416	0.501	0.251	0.371	0.355	0.126	0.430	0.150	0.023

Tabelle VI.

Werthe von J, $tg\,\Psi$, $tg\,J$, $(tg\,\Psi)^2$.

	C	D	$E\frac{1}{2}b$	F	$F\frac{1}{2}G$	G
J	66°3	65°45	59°48	53°	50°23	(53°)
$tg\,\Psi'$	0.084	0.225	0.340	0.320	0.020	
$tg\,J$	2.251	2.220	1.718	1.327	1.252	(1.327)
$(tg\,\Psi')^2$	0.007	0.051	0.116	0.102	0.0004	

Nachdem bei dem Haupteinfallswinkel für F der Hauptschnitt des Glimmerblättchens so eingestellt war, dass durch Drehen des Nicols bei der Linie F Dunkelheit erzeugt wurde, so sprang bei weiterem Drehen des Nicols der schwarze Streifen nach G, es zeigt dies nach den früheren Ausführungen, dass für F und G die Haupteinfallswinkel nahe gleich sind, nach dieser Bestimmung ist der obige Haupteinfallswinkel von G angegeben.

Fuchsinspiegel II.

Die Fuchsinschicht war etwas dicker als bei dem ersten Fuchsinspiegel.

Tabelle I.

Werthe von m_1 und m_2.

$m = 227$

i	C		D		$E\frac{1}{2}b$		F		$F\frac{1}{2}G$	
	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2
79° 5	200	292	198½	290	194½	281¾	191	277¾	189	277½
74 5	209½	302	208	300	202	287¾	196¾	280½	193½	281½
69 5	218¾	311	218	309	210	295½	203¼	286	198½	235½
64 5	226¼	320	226½	318½	220¼	304¼	211	292½	204	290½
59 5	235½	327½	235½	327	229¼	313¾	218½	298¾	212½	298
54 5	242½	334¾	242½	334	239	323	229½	307	217¼	307
49 5	248½	340	249	340	245½	331	237¼	317	225	313
44 5	254	345	254	345	252	338	245	326½		

Die grössten Abweichungen der drei Messungen, deren

Mittel diese Zahlen sind, betragen für C 1°, für D 1°, für $E\frac{1}{2}b$ 1°, für F 2° und für $F\frac{1}{2}G$ $2\frac{1}{4}$°.

Tabelle II.

Werthe von n_1 und n_2.

$n = 282\frac{3}{4}$

i	C		D		$E\frac{1}{2}b$		F		$F\frac{1}{2}G$	
	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2
79° 5	187	289	183	292	183	$293\frac{1}{2}$	185	290	$190\frac{1}{2}$	284
74 5	$185\frac{1}{2}$	290	$179\frac{3}{4}$	$295\frac{1}{4}$	$178\frac{1}{4}$	$297\frac{1}{2}$	$181\frac{1}{2}$	$294\frac{3}{4}$	$189\frac{1}{2}$	$287\frac{1}{2}$
69 5	$185\frac{3}{4}$	$290\frac{1}{4}$	179	296	175	$300\frac{1}{2}$	$177\frac{1}{4}$	$296\frac{3}{4}$	$189\frac{1}{4}$	$286\frac{3}{4}$
64 5	$184\frac{1}{4}$	$291\frac{1}{2}$	$178\frac{1}{2}$	$296\frac{3}{4}$	172	$302\frac{1}{2}$	175	$302\frac{1}{2}$	$187\frac{3}{4}$	$289\frac{1}{4}$
59 5	$185\frac{1}{2}$	$289\frac{1}{4}$	$179\frac{1}{2}$	$295\frac{3}{4}$	173	$302\frac{3}{4}$	174	$302\frac{1}{4}$	188	288
54 5	$187\frac{1}{2}$	289	$181\frac{1}{4}$	$294\frac{1}{4}$	$173\frac{3}{4}$	$301\frac{3}{4}$	$172\frac{3}{4}$	$303\frac{1}{2}$	$189\frac{1}{2}$	287
49 5	$187\frac{1}{2}$	$288\frac{1}{4}$	183	$292\frac{1}{4}$	$176\frac{1}{2}$	299	$174\frac{3}{4}$	$300\frac{1}{2}$	190	$287\frac{1}{2}$
44 5	$189\frac{1}{4}$	$287\frac{1}{4}$	185	291	179	$296\frac{1}{4}$	$177\frac{1}{4}$	$299\frac{3}{4}$		

Bei diesen Zahlen betragen die grössten Unterschiede der Messungen für C 1°, für D 1°, für $E\frac{1}{2}b$ 1° und für F 2°.

Tabelle III.

Werthe von δ_1 und δ_2.

i	C $A = 261°$		D $A = 266°30$		$E\frac{1}{2}b$ $A = 277°$		F $A = 284°30$		$F\frac{1}{2}G$ $A = 295$	
	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2
79° 5	0.039	0.043	0.064	0.061	0.058	0.066	0.043	0.040	0.012	0.007
74 5	0.070	0.071	0.109	0.107	0.095	0.096	0.065	0.069	0.018	0.026
69 5	0.125	0.130	0.172	0.162	0.134	0.136	0.096	0.089	0.022	0.023
64 5	0.261	0.278	0.255	0.256	0.191	0.187	0.126	0.145	0.033	0.044
59 0	0.405	0.402	0.343	0.339	0.246	0.248	0.159	0.155	0.043	0.047
54 5	0.448	0.440	0.394	0.394	0.312	0.309	0.226	0.225	0.043	0.072
49 0	0.460	0.454	0.426	0.429	0.360	0.362	0.290	0.290	0.079	0.180
44 0	0.474	0.470	0.448	0.445	0.401	0.400	0.357	0.352		

Die grössten Abweichungen zwischen den beiden Werthen von δ betragen für C 11, für D 10, für $E\frac{1}{2}b$ 8, für F 19 und für $F\frac{1}{2}G$ 100 Tausendstel Wellenlänge.

Tabelle IV.

Werthe von $tg\,\psi_1$ und $tg\,\psi_2$.

i	C		D		E½b		F		F½G	
	$tg\,\psi_1$	$tg\,\psi_2$	$tg\,\psi_1$	$tg\,\psi_2$	$tg\,\psi_1$	$tg\,\psi_2$	$tg\,\psi_1$	$tg\,\psi_2$	$tg\,\psi_1$	$tg\,\psi_2$
79° 5	0.499	0.499	0.554	0.545	0.685	0.674	0.787	0.771	0.809	0.808
74 5	0.319	0.316	0.399	0.389	0.565	0.573	0.677	0.682	0.698	0.665
69 5	0.175	0.181	0.284	0.282	0.471	0.465	0.590	0.563	0.582	0.579
64 5	0.148	0.154	0.253	0.249	0.412	0.395	0.490	0.479	0.476	0.451
59 5	0.212	0.201	0.285	0.281	0.356	0.360	0.408	0.405	0.306	0.312
54 5	0.307	0.320	0.355	0.355	0.378	0.373	0.354	0.369	0.203	0.200
49 5	0.420	0.378	0.449	0.444	0.401	0.408	0.331	0.320	0.070	0.083
44 5	0.525	0.521	0.536	0.538	0.390	0.483	0.361	0.388		

Hier betragen die grössten Abweichungen für *C* 10, für *D* 10, für *E½b* 17, für *F* 27 und für *F½G* 33 Tausendstel, doch sind fast stets die Abweichungen sehr viel geringer

Tabelle V.

Werthe von δ, $tg\,\psi$ und $(tg\,\psi)^2$.

i	C			D			$E\frac{1}{2}b$			F			$F\frac{1}{2}G$		
	δ	tg ψ	(tg ψ)^2	δ	tg ψ	(tg ψ)^2	δ	tg ψ	(tg ψ)^2	δ	tg ψ	(tg ψ)^2	δ	tg ψ	(tg ψ)^2
79^0 5	0.041	0.499	0.249	0.062	0.550	0.303	0.061	0.679	0.461	0.041	0.779	0.607	0.009	0.808	0.653
74 5	0.070	0.317	0.101	0.108	0.394	0.155	0.096	0.569	0.324	0.067	0.679	0.461	0.022	0.681	0.463
69 5	0.127	0.178	0.032	0.167	0.283	0.080	0.135	0.468	0.219	0.093	0.576	0.332	0.023	0.580	0.337
64 5	0.269	0.152	0.023	0.255	0.252	0.064	0.189	0.403	0.163	0.136	0.484	0.234	0.038	0.463	0.214
59 5	0.403	0.206	0.042	0.341	0.283	0.080	0.247	0.358	0.128	0.157	0.407	0.166	0.045	0.308	0.095
54 5	0.444	0.313	0.098	0.394	0.355	0.126	0.310	0.375	0.141	0.226	0.361	0.130	0.057	0.201	0.040
49 5	0.457	0.400	0.160	0.428	0.446	0.208	0.361	0.405	0.164	0.290	0.325	0.106	0.099	0.076	0.006
44 5	0.473	0.523	0.274	0.447	0.537	0.288	0.400	0.486	0.236	0.357	0.374	0.140			

Tabelle VI.

Werthe von J, $tg\,\Psi$, $tg\,J$, $(tg\,\Psi)^2$.

	C	D	$E\frac{1}{2}b$	F	$F\frac{1}{2}G$
J	64°52	64°22	58°51	52°14	kleiner als 49°5
$tg\,\Psi$	0.114	0.250	0.35	0.315	kleiner als 0.076
$tg\,J$	2.181	2.084	1.655	1.294	
$(tg\,\Psi)^2$	0.014	0.063	0.123	0.099	

Die Grössen tg J und Ψ zeigen hier ganz dieselben Verhältnisse, wie bei dem Fuchsinspiegel I., wenn auch die Zahlen nicht ganz übereinstimmen.

Anilinviolettspiegel.

Der benutzte Spiegel war nicht sehr gut.

Tabelle I.

Werthe von m_1 und m_2.

$m = 226^0\ 45$

i	C m_1	C m_2	D m_1	D m_2	$E\frac{1}{2}b$ m_1	$E\frac{1}{2}b$ m_2	F m_1	F m_2
74° 5	212	304	212½	303½	205	289¾	198¾	280½
69 5	222¼	314½	221½	314	214¾	299	207	285¾
64 5	230¾	321¾	230½	323	224½	308¼	215¼	293¾
59 5	238¼	330	238¼	330	235	319	225	301
54 5	244¾	336	245	336½	243	327¼	234	310
49 5	250¾	341	251	342	249¾	335	241½	320½
44 5	255	346	255¼	346½	255¾	341½	249	328

Die grössten Unterschiede der Messungen, aus denen die obigen Zahlen die Mittel sind, betragen für C 1¾°, für D 1½°, für $E\frac{1}{2}b$ 1½° und für F 2°.

Tabelle II.

Werthe von n_1 und n_2.

$n = 282\frac{3}{4}$

i	C		D		$E\frac{1}{2}b$		F	
	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2
74° 5	188	288¼	180¼	294¾	176¼	298¾	179	297¼
69 5	187½	289½	179½	296¾	173½	302½	174½	301½
64 5	188	288	180	295¼	172½	304	172¾	302
59 5	188½	288	181	293½	172	303	171	305
54 5	188¼	286¾	183	292½	174¾	301½	171½	305½
49 5	190½	285	185	290½	177½	299	173¾	303
44 5	191½	284¾	186½	289	180	296	177	302

Hier betragen die grössten Unterschiede für *C* 1½°, für *D* 1½°, für *E*½*b* 1½° und für *F* 2°.

Tabelle III.

Werthe von δ_1 und δ_2.

i	C $A = 260\frac{1}{2}^0$		D $A = 265\frac{3}{4}^0$		$E\frac{1}{2}b$ $A = 277\frac{1}{2}^0$		F $A = 285\frac{3}{4}^0$	
	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2
74° 5	0.054	0.063	0.128	0.120	0.113	0.109	0.080	0.084
69 5	0.154	0.176	0.204	0.211	0.160	0.164	0.116	0.120
64 5	0.376	0.356	0.303	0.310	0.215	0.219	0.148	0.148
59 5	0.445	0.445	0.372	0.381	0.281	0.285	0.196	0.202
54 5	0.466	0.465	0.417	0.417	0.340	0.335	0.251	0.256
49 5	0.482	0.483	0.444	0.444	0.386	0.378	0.311	0.316
44 5	0.492	0.487	0.459	0.460	0.416	0.413	0.374	0.354

Hier betragen die grössten Abweichungen zwischen den beiden Werthsystemen für *C* 22, für *D* 8, für *E*½*b* 8 und für *F* 20 Tausendstel.

Tabelle IV.

Werthe von $tg\,\psi_1$ und $tg\,\psi_2$.

i	*C*		*D*		*E½b*		*F*	
	tg ψ_1	tg ψ_2	tg ψ_1	tg ψ_2	tg ψ_1	tg ψ_2	tg ψ_1	tg ψ_2
74° 5	0.262	0.261	0.323	0.329	0.532	0.535	0.662	0.662
69 5	0 111	0.131	0.246	0.257	0.435	0.439	0.566	0.561
64 5	0.117	0.115	0.240	0.240	0.377	0.394	0.472	0.447
59 5	0.228	0.237	0.302	0.290	0.384	0.377	0.410	0.413
54 5	0.343	0.343	0.383	0.385	0.401	0.410	0.369	0.397
49 5	0.455	0.444	0.481	0.479	0.464	0.470	0.361	0.395
44 5	0.542	0.553	0.563	0.571	0.557	0.537	0.413	0.454

Die grössten Abweichungen zwischen beiden Werthen von tg ψ beträgt für *C* 20, für *D* 12, für *E½b* 20 und für *F* 43 Tausendstel.

Tabelle V.

Werthe von δ, $tg\,\psi$ und $(tg\,\psi)^2$.

i	*C*			*D*			*E½b*			*F*		
	δ	tg ψ	$(\text{tg}\psi)^2$	δ	tg ψ	$(\text{tg}\psi)^2$	δ	tg ψ	$(\text{tg}\psi)^2$	δ	tg ψ	$(\text{tg}\psi)^2$
74° 5	0.059	0.261	0.068	0.124	0.326	0.106	0.111	0.533	0.284	0.082	0.662	0.439
69 5	0.165	0.121	0.015	0.207	0.251	0.063	0.162	0.437	0.191	0.118	0.564	0.318
64 5	0.366	0.116	0.013	0.306	0.240	0.058	0.217	0.383	0.147	0.148	0.459	0.211
59 5	0.445	0.233	0.054	0.376	0.295	0.087	0.288	0.380	0.145	0.199	0.411	0.169
54 5	0.466	0.343	0.118	0.417	0.384	0.148	0.337	0.405	0.164	0.254	0,384	0.148
49 5	0.482	0.450	0.202	0.444	0.480	0.230	0.382	0.467	0.218	0.314	0.378	0.143
44 5	0.490	0.547	0.299	0.459	0.567	0.321	0.415	0.547	0.299	0.364	0,433	0.187

Tabelle VI.

Werthe von J, $tg\,\Psi$, $tg\,J$, $(tg\,\Psi)^2$.

	C	*D*	*E½b*	*F*
J	66°58.	66°56	61°35	54°27
tg Ψ'	0.065	0.214	0.362	0.384
tg *J*	2.352	2.348	1.848	1.399
$(\text{tg}\,\Psi')^2$	0.004	0.046	0.131	0.148

Kupfer.

Der benutzte Spiegel war nicht sehr gut und daher mögen auch die etwas bedeutenderen Fehler der Messungen, besonders bei der Bestimmung der Amplitudenverhältnisse rühren.

Tabelle I.

Werthe von m_1 und m_2.

$m = 222\frac{1}{2}^0$

i	C		D		$E\frac{1}{2}b$		F	
	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2	m_1	m_2
79⁰ 8	181	287	185	280	194½	279	198¼	276
74 8	187	310	195	293	208½	289½	213	284
69 8	215	341	214	317	224½	302½	230¾	295½
64 8	237	349	237½	336½	240	318	245	311½
59 8	247	356	247½	343	247	327	250½	322
54 8	254½	354½	254½	348½	252½	335½	255½	332
49 8	258	356	258½	351½	257¼	341½	260	338
44 8	260½	356	260½	352½	259½	345	261½	342

Die Zahlen sind das Mittel aus je drei Beobachtungen. Dabei ist der grösste Unterschied der Messungen für C 2⁰, für D 2⁰, für $E\frac{1}{2}b$ 1⁰ und für F 1⁰.

Tabelle II.

Werthe von n_1 und n_2.

$n = 282^0 53$

i	C		D		$E\frac{1}{2}b$		F	
	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2	n_1	n_2
79⁰ 8	345	310	349½	306	252	303½	352	303¾
74 8	335	319	340½	314	345½	310¼	345½	310¾
69 8	333¾	322¼	336¾	318½	343	313½	341½	314½
64 8	—	318¼	338¼	317½	343	312½	342½	313
59 8	343	312½	342	313	345½	310	345½	310
54 8	348½	306½	347	308¾	350½	306¼	350	306½
49 8	353	302½	352	303½	355½	302	353¾	302
44 8	353	298	355¼	299½	357	208½	356¼	299½

Hier sind die grössten Unterschiede für C 1½⁰, für D 1½⁰, für $E\frac{1}{2}b$ 1¾⁰ und für F 1¾⁰.

Tabelle III.

Werthe von δ_1 und δ_2.

i	C		D		$E\frac{1}{2}b$		F	
	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2	δ_1	δ_2
79° 8	0.154	0.156	0.134	0.134	0.128	0.124	0.124	0.122
74 8	0.216	0.221	0.192	0.197	0.187	0.184	0.184	0.179
69 8	0.260	0.271	0.248	0.246	0.239	0.238	0.239	0.235
64 8	0.292	—	0.287	0.290	0.287	0.288	0.291	0.287
59 8	0.336	0.334	0.316	0.319	0.318	0.319	0.323	0.320
54 8	0.368	0.363	0.350	0.353	0.354	0.361	0.358	0.360
49 8	0.392	0.392	0.382	0.383	0.386	0.398	0.385	0.390
44 8	0.416	0.419	0.403	0.401	0.409	0.409	0.405	0.407

Die grössten Abweichungen sind hier für *C* 11, für *D* 5, für $E\frac{1}{2}b$ 12 und für *F* 5 Tausendstel Wellenlängen.

Tabelle IV.

Werthe von $\operatorname{tg}\psi_1$ und $\operatorname{tg}\psi_2$.

i	C		D		$E\frac{1}{2}b$		F	
	$\operatorname{tg}\psi_1$	$\operatorname{tg}\psi_2$	$\operatorname{tg}\psi_1$	$\operatorname{tg}\psi_2$	$\operatorname{tg}\psi_1$	$\operatorname{tg}\psi_2$	$\operatorname{tg}\psi_1$	$\operatorname{tg}\psi_2$
79° 8	0.792	0.775	0.789	0.774	0.687	0.654	0.671	0.666
74 8	0.768	0.745	0.732	0.716	0.601	0.598	0.589	0.589
69 8	0.776	0.766	0.722	0.715	0.566	0.589	0.572	0.579
64 8	—	0.767	0.754	0.750	0.597	0.596	0.575	0.579
59 8	0.813	0.848	0.770	0.759	0.630	0.611	0.583	0.594
54 8	0.832	0.812	0.801	0.785	0.635	0.659	0.620	0.654
49 8	0.878	0.849	0.833	0.821	0.696	0.696	0.695	0.734
44 8	0.894	0.861	0.858	0.867	0.744	0.737	0.732	0.731

Der grösste Unterschied der Werthe von $\operatorname{tg}\psi$ ist für *C* 35, für *D* 15, für $E\frac{1}{2}b$ 34 und für *F* 40 Tausendstel, doch sind die Abweichungen meistens viel kleiner.

Tabelle V.

Werthe von δ, $tg\,\psi$ und $(tg\,\psi)^2$.

i	C			D			$E\frac{1}{2}b$			F		
	δ	$tg\,\psi$	$(tg\psi)^2$	δ	$tg\,\psi$	$(tg\psi)^2$	δ	$tg\,\psi$	$(tg\psi)^2$	δ	$tg\,\psi$	$(tg\psi)^2$
79°8	0.155	0.783	0.614	0.134	0.781	0.608	0.126	0.6 0	0.449	0.123	0.668	0.447
74 8	0.219	0.756	0.572	0.194	0.724	0.520	0.186	0.599	0.359	0.182	0.589	0.347
69 8	0.265	0.771	0.594	0.247	0.718	0.515	0.238	0.577	0.333	0.237	0.576	0.332
64 8	0.292	0.767	0.612	0.288	0.752	0.565	0.288	0.596	0.335	0.289	0.577	0.333
59 8	0.336	0.830	0.689	0.318	0.765	0.585	0.319	0.620	0.385	0.321	0.588	0.346
54 8	0.365	0.822	0.676	0.351	0.792	0.627	0.357	0.647	0.419	0.359	0.633	0.401
49 8	0.392	0.865	0.748	0.382	0.827	0.684	0.372	0.696	0.484	0.387	0.714	0.510
44 8	0.418	0.879	0.773	0.402	0.863	0.745	0.409	0.740	0.548	0.406	0.731	0.535

Tabelle VI.

Werthe von J, $tg\,\Psi$, $tg\,J$, $(tg\,\Psi)^2$.

	C	D	$E\frac{1}{2}b$	F
J	70°46	68°46	67°56	67°53
$tg\,\Psi$	0.746	0.718	0.573	0.571
$tg\,J$	2.866	2.574	2.467	2.461
$(tg\,\Psi)^2$	0.556	0.515	0.328	0.318

Nach den obigen Tabellen sind die auf beiliegenden Tafeln gezeichneten Curven construirt. Die Tafeln 1, 1a, 1b beziehen sich auf den Fuchsinspiegel I.; 2, 2a, 2b auf den Anilinviolett-, und 3, 3a, 3b auf den Kupferspiegel. Und zwar geben, als Functionen der Einfallswinkel, die als Abscissen aufgetragen sind, die Tafeln 1, 2, 3 die Verzögerungen in Procenten der Wellenlänge; 1a, 2a, 3a die Verhältnisse der Amplituden und 1b, 2b, 3b die Verhältnisse der Intensitäten der senkrecht zu der Einfallsebene polarisirten Strahlen zu den in derselben polarisirten, die Amplitude und Intensität des letzteren Strahles, bei dem die beiden Grössen am grössten sind, gleich 100 gesetzt. Die Curven für die verschiedenen Theile des Spectrums sind durch Beisetzen der entsprechenden *Fraunhofer*'schen Linien characterisirt. Für Kupfer sind bei den Verzögerungen nur die Curven für *C* und *F* gezeichnet, denen die anderen sehr nahe liegen. Die Curven für den zweiten Fuchsinspiegel, die denen für den ersten vollständig entsprechen, sind fortgelassen worden.

In den Curventafeln 4, 5, 6, 7 sind ferner die Haupteinfallswinkel, die Hauptamplitudenverhältnisse, die Tangenten der Haupteinfallswinkel und die Hauptintensitätsverhältnisse als Functionen der Wellenlänge aufgetragen. Die Curven für das Fuchsin sind durch den Buchstaben F, die für das Anilinviolett durch AV und die für das Kupfer durch C bezeichnet. Auf der Abscissenaxe sind die den betreffenden Wellenlängen entsprechenden *Fraunhofer*'schen Linien durch diese selbst angegeben.

Die Curven auf Tafel 4, 5, 6, 7 für Indigo J, Blutstein B sind nach Angaben von Herrn *van der Willigen* [1]) und die für Silber Ag nach Beobachtungen von Hrn. *Jamin* [2]) construirt; es lassen sich nach den Messungen von Hrn. *van der Willigen* und Hrn. *Jamin* folgende Tabellen aufstellen.

Indigo.

	B	*C*	*D*	*E*	*b*	*F*	*G*
J	62°33	60°43	57°26	57°15	57°20	57°55	59°16
$\operatorname{tg} \Psi'$	0.168	0.180	0.147	0.098	0.090	0.081	0.081
$\operatorname{tg} J$	1.925	1.783	1.565	1.555	1.560	1.590	1.682
$(\operatorname{tg} \Psi')^2$	0.028	0.032	0.022	0.009	0.008	0.007	0.007

Blutstein (Hämatit).

	B	*C*	*D*	*E*	*b*	*F*	*G*
J	66°57	67.6	67.55	67°50	67°47	67°37	66°29
$\operatorname{tg} \Psi'$	0.084	0.094	0.114	0.157	0.166	0.188	0.236
$\operatorname{tg} J$	2.350	2.367	2.465	2.455	2.448	2.428	2.298
$(\operatorname{tg} \Psi')^2$	0.007	0.009	0.012	0.025	0.027	0.035	0.056

Silber.

	äusserstes Roth	mittleres Roth	*D*	*E*	*F*	*H*
J	75°45	75°0	72°30	71°30	69°34	66°12
$\operatorname{tg} \Psi'$	0.888	0.869	0.843	0.849	0.832	0.914
$\operatorname{tg} J$	3.938	3.732	3.172	2.989	2.684	2.267
$(\operatorname{tg} \Psi')$	0.942	0.931	0.918	0.920	0.912	0.834

1) *Van der Willigen*, Pogg. Ann. 117. p. 464. 1862.

2) *Jamin*, Ann. de chim. et phys. Ser. III. T. 22. p. 311; Pogg. Ann. Bd. 74. p. 528. 1848.

Bei dem Silber ist die Curve der Raumersparniss halber für $\mathrm{tg}\, J$ um 0.6 herabgerückt, für $(\mathrm{tg}\, \Psi)^2$ um 20.

§. VIII.

Die Curve für die Haupteinfallswinkel zeigt für Fuchsin ein sehr starkes Steigen von $F\frac{1}{2}G$ nach D, das dann nach C zu langsamer wird; zwischen G und $F\frac{1}{2}G$ fällt die Curve. Das Steigen der Curve zwischen F und D ist etwa 5mal so stark als das der Curve für Kupfer zwischen denselben Grenzen. Die Curve für Anilinviolett zeigt ebenfalls ein starkes Steigen von F nach D, zwischen D und C verläuft sie fast horizontal. Die Curve für Kupfer steigt von F nach C, doch so, dass zwischen D und C die Steigung ihr Maximum erreicht. Die Curve für Indigo, die zuerst von G bis b fällt, steigt nachher bis B, und zwar ist das Steigen ein stärkeres als das Fallen, umgekehrt steigt die Curve für Blutstein zuerst von G bis D und fällt dann nach B zu; hier ist der erste Theil der Curve der steilere. Bei der Curve für Silber findet ein continuirliches Steigen von H bis B statt. Ganz dieselben Verhältnisse bestehen für die Curven für die Tangenten der Haupteinfallswinkel. Die Curve für die Hauptamplitudenverhältnisse zeigt für Fuchsin zwischen $F\frac{1}{2}G$ und F ein sehr schnelles Steigen, zwischen F und $E\frac{1}{2}b$ steigt sie langsamer, um dann nach C zu zu fallen; wahrscheinlich liegt zwischen $E\frac{1}{2}b$ und D ein Maximum. Bei Anilinviolett findet ein Fallen von F nach C zu statt, doch ist dasselbe zwischen C und $E\frac{1}{2}b$ weit stärker, als zwischen $E\frac{1}{2}b$ und F, es dürfte deshalb vielleicht zwischen F und $E\frac{1}{2}b$ ein Maximum liegen. Die Curve für Kupfer steigt von F bis C, zwischen F und $E\frac{1}{2}b$ und zwischen D und C langsam, schnell dagegen zwischen $E\frac{1}{2}b$ und D. Bei Indigo steigt die Curve von G nach C und fällt dann nach B, während die Curve für Blutstein von D bis B fällt. Die Curve für Silber endlich verläuft fast horizontal und steigt nur ganz wenig nach B hin.

§. IX.

An die vorhergehenden Beobachtungen schliessen sich noch die folgenden Versuche an.

Das von einer concentrirten Fuchsinlösung reflectirte Licht

besass eine sehr starke elliptische Polarisation, indem die beiden in und senkrecht zu der Einfallsebene polarisirten Strahlen bei sehr verschiedenen Einfallswinkeln noch beträchtliche Phasenunterschiede zeigten; eine solche Erscheinung tritt aber nur bei metallischen Körpern ein, die das Licht stark elliptisch polarisiren.

Bei der Untersuchung des von der Grenze eines Crownglasprismas und einer Fuchsinlösung reflectirten Lichtes scheinen die Haupteinfallswinkel für das Roth und Grün gleich zu sein; es wurde dies nach der pag. 273 angegebenen Methode untersucht. Die Beobachtungen greifen die Augen in hohem Grade an, so dass die weitere Verfolgung dieses Gegenstandes einer späteren Zeit vorbehalten bleiben musste.

Pyrite, welche im rechten und linken Pentagondodekaeder krystallisirt waren, verhielten sich bei der elliptischen Polarisation des Lichtes bei der Reflexion an ihrer Oberfläche nicht wesentlich verschieden.

§. X.

Ausser der elliptischen Polarisation bei der Reflexion an Körpern mit Oberflächenfarben wurde noch eine andere Erscheinung untersucht, die mit ihr in naher Verbindung steht, nämlich die Farbenänderungen der Körper mit Oberflächenfarben bei ihrer Berührung mit Medien von verschiedener Brechbarkeit.

Die erste Beobachtung über diesen Gegenstand rührt von *Haidinger*[1]) her, er fand dass Indigo und zweifach wolframigsaures Natron in Berührung mit Glas roth und grünlich gelb werden. Weitere Versuche führt Herr *Stokes*[2]) an, nach denen Safflorroth (Carthamin) und Cyanplatinmagnesium an ihrer Contactfläche mit Glas grün und blau werden. Endlich hat auch Herr *Christiansen*[3]) ähnliche Erscheinungen beobachtet. Alle diese Forscher haben aber nicht verschiedene Medien in ihrem Verhalten gegen denselben Oberflächenfarben zeigenden Körper

1) *Haidinger*, Wiener Berichte 8. p. 97. 1832.

2) *Stokes*, Phil. Mag. 1853. Bd. 6. p. 393; Pogg. Ann. Bd. 91. p. 300. 1854.

3) *Christiansen*, Pogg. Ann. 143. p. 270. 1871.

und den Einfluss der Brechungsverhältnisse derselben in den Bereich ihrer Untersuchungen gezogen.

Bei den vorliegenden Versuchen wurden die Körper theils auf Glasplatten aufpolirt, theils liess man Lösungen derselben verdunsten, um spiegelnde Flächen zu erhalten, theils wandte man sie in Form von Krystallen an. Sie wurden in dieser Gestalt in ein rechtwinkeliges gleichseitiges Hohlprisma gestellt, so dass ihre reflectirende Fläche parallel der Hypotenusenfläche des Prismas lag und der Kante am rechten Winkel zugekehrt war. Das Prisma war durch Zusammenkitten von drei passend angeschliffenen dicken Spiegelglasplatten gebildet. Die äussere Seite der Hypotenusenfläche war geschwärzt. Das durch die Seitenfläche auf die zu untersuchende Substanz fallende und nach der Reflexion aus der andern Seitenfläche tretende Licht wurde untersucht. Durch diese Vorrichtung wurde das an den Glas- und Flüssigkeitsoberflächen reflectirte Licht ausgeschlossen. Das Prisma wurde dann mit Schwefelkohlenstoff oder Benzin gefüllt oder es wurden auch die verschiedenen Flüssigkeiten über einander geschichtet, so dass eine unmittelbare Vergleichung der Oberflächenfarben desselben Körpers bei der Berührung mit verschiedenen Medien ermöglicht wurde. Dabei wurde bei einem grossen und einem kleinen Einfallswinkel i die Farbe untersucht; ausserdem wurde mit der dichroskopischen Loupe der sogenannte orientirte Flächenschiller, d. h. die Farben der in und senkrecht zu der Einfallsebene polarisirten Strahlen, wobei in dem einen Strahl hauptsächlich die metallisch reflectirten Farben enthalten sind, bestimmt. Diese Erscheinung ist zuerst von *Haidinger* [1]) und *Brewster* [2]) beobachtet worden, und Ersterer hat ihr eine sehr grosse Aufmerksamkeit geschenkt. Die Versuche, deren Resultate in der folgenden Tabelle enthalten sind, beziehen sich vorläufig nur auf qualitative Bestimmungen.

Fuchsin.

In der Luft:		goldgelb
in Benzin	i gross	grüngelb (bläulich)
	i klein	grüngelb

1) *Haidinger*, Pogg. Ann. Bd. 68. p. 302. 1846.

2) *Brewster*, Phil. Mag. Ser. III. Vol. 29. p. 331; Pogg. Ann. Bd. 69. p. 552. 1836.

in CS_2	*i* gross	intensiv blau
	i klein	grünblau

mit der dichroskopischen Loupe:

		senkrecht zur Einfallsebene polar.	parallel zur Einfallsebene pol.
in der Luft	*i* gross	blau	weiss
	i klein	gelb	gelb
in Benzin	*i* gross	blaugrün	weisslich
	i klein	gelbgrün	gelblich
in CS_2	*i* gross	intensiv blau	weiss
	i klein	gelb	weiss.

Anilinviolett.

in der Luft:		gelb, doch etwas mehr ins Grüne als Fuchsin
in Benzin	*i* gross	blaugrün
	i klein	gelbgrün
in CS_2	*i* gross	blau
	i klein	grünblau

mit der dichroskopischen Loupe:

		senkr. zur Einf. polarisirt	parallel zur Einf. pol.
in der Luft	*i* gross	blau	weisslich
	i klein	gelb	hellgelb
in Benzin	*i* gross	blau	weisslich
	i klein	intensiv gelb	hellgelb
in CS_2	*i* gross	intensiv blau	weisslich
	i klein	grüngelb	weisslich.

Anilingrün.

in der Luft:		roth, etwa wie Kupfer.
in Benzin	*i* gross	tiefbraunroth
	i klein	ebenso
in CS_2	*i* gross	gelbbraun, etwas grünlich
	i klein	braunroth

mit der dichroskopischen Loupe:

		senkr. zur Einf. polarisirt	parallel zur Einf. pol.
in der Luft	i gross	braunroth	bräunlich
	i klein	roth	roth etw. ins Braun
in Benzin	i gross	röthlich	rosa
	i klein	röthlich	rosa
in CS_2	i gross	grünlich	gelbbraun
	i klein	roth	braun.

Anilinblau.

In der Luft:		rothbraun
in Benzin	i gross	gelbgrün
	i klein	braungelb
in CS_2	i gross	gelbgrün
	i klein	gelbbraun

mit der dichroskopischen Loupe:

		senkr. zur Einf. polarisirt	parallel zur Einf. pol.
in der Luft	i gross	roth } sehr	grün
	i klein	roth } glänzend	gelbgrün
in Benzin	i gross	gelbbraun	grüngelb
	i klein	gelbbraun	gelbbraun
in CS_2	i gross	grünblau	gelb
	i klein	braun	braun.

Indigo.

In der Luft: roth
in Benzin: wird das Roth intensiver
in CS_2: gelbbraunroth.

Kupfer.

In CS_2 wird das Roth intensiver.

Platincyanmagnesium.

In der Luft: blau
in CS_2: das Blau sehr viel intensiver.

Uebermangansaures Kali als Krystall.

In der Luft:		braunroth
in Benzin	i gross	gelb
	i klein	grüngelb
in CS_2	i gross	grün
	i klein	grüngelb.

Diese Angaben zeigen erstens »wie sehr verschieden die Oberflächenfarben bei Berührung mit verschiedenen Medien sind, dass also die bisherigen Angaben der Oberflächenfarbe nur für die Grenze zwischen Luft und dem betreffenden Körper gelten.«

Sie bestätigen ferner, dass der orientirte Flächenschiller unabhängig ist von einer bestimmten Anordnung der Theilchen der reflectirenden Fläche, wie sie etwa durch Poliren hervorgerufen werden könnte, da die reflectirenden Flächen von Fuchsin, Anilinviolett, -grün und -blau durch Aufgiessen und Eintrocknenlassen der betreffenden Substanzen hergestellt waren. Ausserdem zeigt auch eine concentrirte Fuchsinlösung einen orientirten Flächenschiller, indem das senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Licht bei grossen Einfallswinkeln blau erscheint.

§. XI.

Es sei gestattet an die im Vorigen mitgetheilten Beobachtungen noch einige allgemeinere Betrachtungen zu knüpfen.

1. Zunächst zeigen die Curven, die den Gang der Verzögerungen als Functionen der Einfallswinkel darstellen, bei dem Fuchsin und Anilinviolett einige Eigenthümlichkeiten. Bei beiden nämlich laufen die Curven für D, $E\frac{1}{2}b$, F nahe parallel und steigen gleichmässig, während die Curve für C bei beiden Körpern und in noch weit höherem Grade die für $F\frac{1}{2}G$ bei Fuchsin, erst langsam, dann auf einmal sehr schnell steigt, um dann ziemlich parallel den Curven der drei anderen Linien zu verlaufen. Mit den Curven für das Kupfer verglichen sind diesen die für die Linien D, $E\frac{1}{2}b$ und F sehr ähnlich. Dagegen stehen die Curven für C und $F\frac{1}{2}G$ den Curven, wie sie für durchsichtige Körper gelten, sehr nahe, nur dass bei Letzteren das Ansteigen noch schneller stattfindet. Die Beobachtungen für die

Absorption zeigen auch entsprechend bei Fuchsin eine starke Durchlässigkeit für Roth und Blau und bei Anilinviolett für Roth.

»Die halbmetallischen Körper verhalten sich demnach in Bezug auf den Gang der Verzögerungen in ihren durchsichtigen Theilen analog den durchsichtigen Körpern, in den undurchsichtigen analog den Metallen.«

2. Die Curventafeln 5 und 7, welche die Hauptamplituden- und Hauptintensitätsverhältnisse als Functionen der Wellenlänge darstellen, lassen einige weitere Eigenschaften der elliptischen Polarisation an Körpern mit Oberflächenfarben erkennen. Bei einigen Körpern ergiebt sich eine stete Zu- oder Abnahme dieser Grösse mit der Wellenlänge, während bei anderen das Hauptamplitudenverhältniss erst steigt und dann fällt oder umgekehrt. Auf diese Unterschiede hat bereits Herr *Jamin* in der Abhandlung über die Farben der Metalle aufmerksam gemacht und nach ihnen die Metalle in verschiedene Klassen eingetheilt.

Vergleichen wir aber diese Erscheinung mit der Lage der Absorptionsstreifen, welche die betreffenden Körper im durchgehenden Licht zeigen, so ergiebt sich, dass mit dem Maximum der Absorption, welches durch die Lage des Absorptionsstreifen angegeben ist, auch das Hauptamplitudenverhältniss ein Maximum erreicht. So liegt bei einer Lösung von Indigo in Schwefelsäure der Absorptionsstreifen im Roth, doch so, dass das äusserste Roth noch mit Leichtigkeit durchgelassen wird, dem entsprechend steigt auch das Hauptamplitudenverhältniss von A nach C und fällt dann gegen das Blau. Bei dem Fuchsin findet sich ein Steigen der Hauptamplitudenverhältnisse vom Roth zum Grün und ein nachheriges Fallen zum Blau und in der That liegt ein Absorptionsstreifen im Grün. Bei Anilinviolett liegt ein Maximum der Hauptamplitudenverhältnisse wahrscheinlich zwischen E und F, und es tritt auch hier ein Absorptionsstreifen auf. [1] Bei Kupfer fallen die Hauptamplitudenverhältnisse gegen das Blau zu und *Strecker* [2] giebt an, dass Kupfer in dünnen Blättchen grün erscheine, was offenbar einer Auslöschung

1) In den Lösungen tritt noch ein Absorptionsstreifen zwischen D und b auf, doch müssen, um Punkte des Spectrums zu untersuchen, die nicht mit *Fraunhofer*'schen Linien zusammenfallen, noch einige Aenderungen am Apparate vorgenommen werden.

2) *Strecker*, Lehrbuch der Chemie 1864. Bd. I. p. 544.

des Roth entspricht. Für Hämatit, bei dem die Farbe des Pulvers, d. h. die Farbe des durchgehenden Lichtes roth ist, findet ein Steigen der Hauptamplitudenverhältnisse nach dem Blau zu statt, bei Silber endlich, welches im durchgehenden Licht nur schwach blau erscheint, bleiben auch die Hauptamplitudenverhältnisse nahe constant.

Da nun das Axenverhältniss der von den Aetherttheilchen beschriebenen Ellipsen unter dem Haupteinfallswinkel, d. h. das Hauptamplitudenverhältniss, am grössten ist, so kann diese Grösse als ein Mass für die Elliptieität des reflectirten Lichtes betrachtet werden. Es lassen sich dann die obigen Beziehungen, soweit die vorliegenden Versuche reichen, so zusammenfassen:

»Je stärker Licht einer bestimmten Wellenlänge von einem Körper absorbirt wird, um so grösser ist auch bei der Reflexion die Elliptieität desselben.«

Da nun ferner schon *Haidinger* gezeigt hat, dass die am stärksten absorbirten Farben bei der Berührung mit Luft auch nahe am stärksten reflectirt werden und so die Oberflächenfarben bilden, wie es auch die vorliegenden Körper bestätigen, so lässt sich der Satz auch so formuliren:

»Die am stärksten reflectirten Farben zeigen im Allgemeinen auch die stärkste elliptische Polarisation, es ist dabei als berührendes Medium aber stets Luft resp. das Vacuum zu denken.«

Die *Jamin*'sche Eintheilung der Metalle würde sich demnach, wenn wir nach Analogie weiter schliessen, auf eine Eintheilung der Metalle nach ihrer Absorptionskraft für die verschiedenen Farben reduciren.

3. Die Curventafeln 4, die den Gang der Haupteinfallswinkel als Functionen der Wellenlänge darstellen, ergeben, dass

»die Haupteinfallswinkel den schnellsten Aenderungen für Wellenlängen, die nahezu Absorptionsstreifen entsprechen, unterworfen sind.«

Ob erstere in den Absorptionsstreifen selbst ein Maximum erreichen, müssen weitere Versuche zeigen.

Bei Fuchsin und Anilinviolett, die das Grün absorbiren, fällt hier die Curve am schnellsten. Bei Kupfer und Indigo ist die Neigung der Curve im Roth am grössten, und bei Hämatit

im Blau. Bei Silber, bei dem alle Farben nahe gleich durchgelassen werden, zeigt sich kein merklicher Unterschied der Neigung in den verschiedenen Theilen der übrigens sehr unregelmässigen, nach Hrn. *Jamin* construirten Curve.

Indess bedarf es noch ausgedehnterer Untersuchungen mit anderen Körpern, um die oben ausgesprochene Beziehung sicher festzustellen.

4. Für durchsichtige Körper ist bekanntlich nach dem *Brewster*'schen Gesetz die Tangente des Polarisationswinkels (des Winkels bei dem die Intensität des senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Strahles ein Minimum ist, und bei dem der Phasenunterschied der beiden senkrecht zu einander polarisirten Strahlen eine Viertelwellenlänge beträgt) gleich dem Brechungsverhältnisse. Nehmen wir dies Gesetz auch für undurchsichtige Körper, etwa die Metalle, bei denen nur an Stelle des Polarisationswinkels der Haupteinfallswinkel tritt, als richtig an, so stellen die in den Curventafeln 6 verzeichneten Tangenten der Haupteinfallswinkel die Brechungsverhältnisse, zunächst gegen Luft, dar.

Es erleiden also auch die Brechungsexponenten ihre schnellsten Aenderungen bei Aenderungen der Wellenlänge in der Nähe der Absorptionsstreifen. Es stimmt dies mit der Beobachtung von Herrn *Kundt* überein, nach welcher die Brechungsexponenten von Lösungen stark absorbirender Substanzen in der Nähe der Absorptionsstreifen auch sehr starken Aenderungen unterworfen sind; es theilt sich also diese Eigenschaft der festen Körper ihren Lösungen mit. Umgekehrt können wir vielleicht diese Uebereinstimmung als eine Bestätigung des *Brewster*'schen Gesetzes ansehen. Es würden damit auch die in §. IX angegebenen vorläufigen Versuche übereinstimmen, nach denen für eine Fuchsinlösung die Haupteinfallswinkel für roth und grün gleich waren, denn aus den Versuchen von Herrn *Kundt* über die anomale Dispersion folgt, dass etwa für roth und grün die Brechungsexponenten einer Fuchsinlösung gleich sind.

5. Aus den nach dem *Brewster*'schen Gesetz berechneten Brechungsexponenten ergiebt sich für das feste Fuchsin eine sehr starke anomale Dispersion. Die Differenz der Brechungsexponenten für die Linien *C* und *F* ist etwa 31mal so stark als beim Schwefelkohlenstoff; diese Differenzen sind für Fuchsin (2.251—1.327) für Schwefelkohlenstoff (1.622—1.655). Es er-

klärt dies dann auch die sehr starke anomale Dispersion der Fuchsinlösungen. Eigenthümlich ist dabei nur, dass die Brechungsexponenten beim festen Fuchsin von C nach D, wenn auch nur wenig, abnehmen, während sie bei den Fuchsinlösungen zunehmen, doch kennen wir den Einfluss des Lösungsmittels nicht. Für F und G zeigen sowohl festes wie gelöstes Fuchsin einen ziemlich gleichen Brechungsexponenten.

6. Die unter 1 bis 5 angeführten Resultate folgen unmittelbar aus den Beobachtungen. Wir wollen mit Hülfe derselben versuchen noch einige andere an den Körpern mit Oberflächenfarben auftretende Erscheinungen zu erklären.

Es werde gemischtes Licht von einer Fläche reflectirt und es seien die Intensitäten der parallel und senkrecht zu der Einfallsebene polarisirten verschieden gefärbten Strahlen nach der Reflexion $p_r\ p_g\ p_b \ldots s_r\ s_g\ s_b \ldots$. Soll das aus sämmtlichen in der einen Richtung polarisirten Strahlen zusammengesetzte Licht dieselbe Färbung haben, wie das in der anderen Richtung polarisirte, so muss

$$s_r = n.\, p_r \quad s_g = n.\, p_g \quad s_b = n.\, p_b \text{ u. s. w.}$$

sein, wo n eine Constante ist. Erhält n für die verschiedenen Farben verschiedene Werthe, so sind die beiden polarisirten Strahlen verschieden gefärbt, und wir haben die Erscheinung, welche uns die dichroskopische Loupe an den Körpern mit Oberflächenfarben zeigt, den orientirten Flächenschiller.

Der Werth von n hängt für einen bestimmten Einfallswinkel ab von dem Haupteinfallswinkel, d. h. dem Brechungsverhältniss und dem Hauptamplitudenverhältniss. Bei durchsichtigen Körpern sind die Haupteinfallswinkel und die Hauptamplitudenverhältnisse für alle Farben nahe gleich, es wird also kein orientirter Flächenschiller auftreten.

Bei den Körpern mit Oberflächenfarben sind aber beide Grössen für die verschiedenen Theile des Spectrums sehr verschieden, n wird also auch für die verschiedenen Farben sehr verschiedene Werthe annehmen, und daraus erklärt sich der orientirte Flächenschiller.

Aus der Verschiedenheit der beiden Constanten lässt sich aber nicht allein die Existenz des orientirten Flächenschiller voraussehen, sondern es lässt sich auch die Färbung der beiden Strahlen bis zu einem gewissen Grade ableiten.

Wächst der Einfallswinkel von 0 bis zu dem Haupteinfallswinkel J und dann bis zu 90°, so fällt das Verhältniss der Amplituden der parallel und senkrecht zu der Einfallsebene polarisirten Strahlen nach der Reflexion von Eins bis zu einem Minimum, dem Hauptamplitudenverhältniss tg Ψ, und steigt von diesem wieder bis zu Eins.

Es sei zunächst für zwei verschiedene Farben, roth und blau, tg Ψ gleich, J aber für roth grösser als blau, dann muss das Verhältniss der Amplituden für roth von 90° bis J schneller fallen, von J bis 0° langsamer steigen als für blau. Es wird also bei Einfallswinkeln, die grösser als der Haupteinfallswinkel sind, das Amplitudenverhältniss für das Blau grösser sein als für das Roth; der senkrecht zur Einfallsebene polarisirte Strahl wird also mehr blau im Verhältniss zum roth enthalten als der in der Einfallsebene polarisirte. Wäre ausserdem das Hauptamplitudenverhältniss für das Blau grösser als für das Roth, so ist das Vorwalten des Blau über das Roth in dem senkrecht zur Einfallsebene polarisirten Strahl noch stärker. Es erklärt dies die stark blaue Färbung dieses Strahles bei grossen Einfallswinkeln beim Fuchsin. Ganz analoge Betrachtungen lassen sich für die übrigen Farben durchführen.

Da beim Fuchsin der Haupteinfallswinkel sowohl für roth als blau grösser als 45° ist und ausserdem für roth beträchtlich grösser (etwa 66°) als für das Blau (53°), so nähern sich auf ihrem längeren Gange zwischen J und 0° die Curven für die Amplitudenverhältnisse (cf. Curve für C und F Tafel 1 a), und es verschwinden die Unterschiede der Färbung für kleinere Einfallswinkel. Beide Strahlen erscheinen dann gelb.

7. Wir wenden uns schliesslich zu den Farbenänderungen der Körper mit Oberflächenfarben bei der Berührung mit Substanzen von verschiedenem Brechungsvermögen.

Treten diese Körper in Contact mit durchsichtigen, stärker brechenden Medien als Luft, so sind ihre Brechungsverhältnisse zunächst für diejenigen Farben, für welche sie sich wie durchsichtige Körper verhalten, und für welche die Brechungsverhältnisse grösser sind als die der durchsichtigen Medien, weniger von denen jener Medien verschieden als von dem der Luft. Da ausserdem für jene Farben die *Fresnel*'schen Intensitätsformeln annähernd gelten, so reflectiren die Körper an ihrer Berührungsfläche mit jenen Medien weniger von diesen Farben als an der

Luft. Die metallisch reflectirten Theile des Spectrums z sich also überwiegend.

Nehmen wir auch für die metallische Reflexion als nähert richtig an, dass wenn zwei Körper denselben Brechu exponenten für eine Farbe haben an ihrer Grenze eine Sc chung dieser Farbe im reflectirten Licht eintritt, so ist die bung des reflectirten Lichtes bei einfallendem weissen mit d abhängig, für welche Farben der Körper und das auf ihm be liche Medium einen gleichen Brechungsexponenten haben. die obige Annahme nur angenähert richtig sein kann, zeigt, in dem an der Grenze von Fuchsin und Schwefelkohle reflectirten Licht kein Absorptionsstreifen bei *b* auftritt, t dem hier die Brechungsexponenten für beide Körper gleich

So verhält sich Fuchsin annähernd wie ein durchsic Körper gegen das Roth und die Brechungsexponenten d Strahlen sind grösser als Schwefelkohlenstoff und Benzin. Strahlen treten also beim Uebergiessen mit Schwefelkohle und Benzin im reflectirten Licht zurück. Die übrigen Stra mit Ausnahme des Blau in der Gegend von *F* ½ *G*, für we Fuchsin durchsichtig, aber für das der Brechungsexponent kl als der von Benzin und Schwefelkohlenstoff ist, werden meta reflectirt. Nun hat Benzin einen Brechungsexponenten, der des Fuchsin für etwa die Linie *F* entspricht, Schwefelko stoff einen solchen, der der Linie *b* entspricht. Benzin schw also die blauen Theile des reflectirten Lichtes mehr als Schw kohlenstoff, letzterer mehr die grünen Strahlen und weniger blauen, so dass bei Uebergiessen mit Schwefelkohlenstoff Licht blauer, mit Benzin grünlicher erscheint. Diese blaue, a bei senkrechtem Einfall auftretende Färbung bei der Berühr mit Schwefelkohlenstoff ist wohl von der bei grossen Einfa winkeln auftretenden zu unterscheiden, da diese von einer t len Reflexion des Blau herrührt.

Bei Anilinviolett erklären sich die Erscheinungen ganz eb so, bei Indigo sind die Verhältnisse etwas complicirter, da Unterschiede der Brechungsexponenten weniger verschieden die verschiedenen Farben sind.

Durch die obigen Untersuchungen sind die verschiede Erscheinungen der Oberflächenfarben mit dem Haupteinfal winkel und dem Hauptamplitudenverhältniss wenigstens qu tativ in Verbindung gebracht. Da für diese ein Zusammenh

mit der Absorption nachgewiesen ist, so scheint sich das ganze Problem der Körper mit Oberflächenfarben zunächst auf ein Problem der elliptischen Polarisation und dann auf eine Erforschung des Zusammenhanges zwischen Absorption und elliptischer Polarisation zu reduciren.

Um aber diese Aufgabe zu lösen, müssen zunächst quantitative Bestimmungen der Absorption gemacht werden. Vielleicht eignet sich dazu auch der zur Bestimmung der elliptischen Polarisation benutzte Apparat, worüber ich weitere Untersuchungen anzustellen beabsichtige.

ÖFFENTLICHE GESAMMTSITZUNG

AM 12. DECEMBER 1872.

ZUR FEIER DES GEBURTSTAGES SEINER MAJESTÄT DES KÖNIGS.

F. Zöllner, *Ueber den Zusammenhang von Sternschnuppen und Cometen.*

Nach der epochemachenden Entdeckung *Schiaparelli's* im Jahre 1866 von der Uebereinstimmung der Bahnen einiger kleinen Cometen mit periodisch wiederkehrenden Sternschnuppenfällen hat sich die Aufmerksamkeit der Astronomen besonders auf solche Cometen gerichtet, deren Bahnen nahe an derjenigen der Erde vorübergehen oder dieselbe kreuzen. Wenn die Erde an diejenige Stelle ihrer Bahn gelangt, welche vorher ein Comet passirt hatte, so waren nach der Entdeckung und den Anschauungen *Schiaparelli's* zu dieser Zeit in ähnlicher Weise Sternschnuppenfälle zu erwarten, wie dies bei den Cometen 1862 III, und 1866 I, bezüglich der bekannten Meteore am 10. August und 13. November der Fall ist.

Am 27. November dieses Jahres hat sich ein solcher Fall ereignet. Die Erde befand sich an jenem Tage an derjenigen Stelle ihrer Bahn, welche der Berechnung zufolge vor etwa $2^1/_2$ Monaten der *Biela*'sche Comet in seinem niedersteigenden Knoten durchschnitten hatte. Auf dieses Ereigniss in seiner Beziehung zu einem wahrscheinlich zu erwartenden Sternschnuppenfall war man vorbereitet, nachdem durch eine umfassende Arbeit von *E. Weiss* in Wien[1]) und kurz vorher durch *d'Ar-*

---

1) Sitzungsberichte der k. k. Akademie in Wien am 16. Januar 1868.

rest in Kopenhagen[1]) auf die Zusammengehörigkeit des *Biela*'-schen Cometen mit Sternschnuppenfällen hingewiesen war, welche man in verschiedenen Jahren gegen Ende November und Anfang December beobachtet hatte. Leider war die Klarheit des Himmels hier keine dauernd so günstige, dass mit Erfolg eine spectroskopische Untersuchung des Lichtes der Meteore vorgenommen werden konnte, so überaus günstig auch sonst die grosse Fülle derselben derartigen Beobachtungen sein mochte.

Man hat nun aber die durch solche Thatsachen zweifellos constatirte Uebereinstimmung in den Bahnen von Sternschnuppen und einiger Cometen auch mehrfach auf eine Uebereinstimmung in der physischen Beschaffenheit dieser Körper übertragen, indem man behauptet, es seien zufolge der Entdeckung *Schiaparelli*'s die Dunsthüllen und Schweife der Cometen nichts anderes als die aus grosser Entfernung gesehenen Meteorschwärme, deren einzelne Elemente uns in grosser Nähe als ein Aggregat zahlreicher Sternschnuppen erscheinen.

Einer solchen Anschauungsweise widersprechen aber gewichtige Thatsachen der Beobachtung. Ein aus der Entfernung betrachteter Meteorschwarm kann uns nur durch reflectirtes Sonnenlicht sichtbar werden, da die Bestandtheile der Sternschnuppen erst in Folge des Widerstandes der Erdatmosphäre einem Licht- und Verbrennungsprocesse unterworfen werden.

Das Licht aller bis jetzt spectroskopisch untersuchten Cometen erweist sich dagegen durch die Discontinuität des Spectrums seiner Hauptmasse nach als eigenes Licht, wie wir es an glühenden oder electrisch leuchtenden Gasmassen beobachten[2]).

---

1) *d'Arrest*, Ueber einige merkwürdige Meteorfälle beim Durchgange der Erde durch die Bahn des *Biela*'schen Cometen. Astronomische Nachrichten Bd. 69 p. 7 (1867).

2) Vgl. *H. C. Vogel*, »Ueber die Spectra der Cometen«. Astronomische Nachrichten No. 1908. October 23. 1872.

»Die Spectra aller bisher untersuchten Cometen bestanden aus wenigen hellen Linien, oder besser lichten Streifen, und einem meist sehr schwachen, continuirlichen Spectrum.«

Seit der Anwendung der Spectralanalyse auf die Himmelskörper sind bis jetzt im Ganzen neun Cometen spectralanalytisch untersucht worden, und unter diesen ist bei einem Cometen (II. 1868) von *Huggins* und *Secchi* die Coïncidenz der hellen Bänder des Spectrums mit denen des Kohlenwasserstoffspectrums mit grosser Wahrscheinlichkeit constatirt. Die Spectra

Die zweite Thatsache, welche der oben erwähnten Ansicht widerspricht, nach welcher die Schweife der Cometen aus der Entfernung gesehene Schwärme von Sternschnuppen sein sollen, hebt *Schiaparelli* selber hervor, und verwahrt sich bei dieser Gelegenheit ausdrücklich gegen die obigen Anschauungen, die man seiner Theorie fälschlich untergeschoben habe. Ich würde es für überflüssig halten, die betreffenden Worte *Schiaparelli*'s hier selber anzuführen, wenn nicht ein Mann von der Bedeutung Sir *William Thomson*'s die soeben als unhaltbar bezeichneten Anschauungen mit folgenden Worten auch zu den seinigen gemacht hätte:

»Die Meteor-Hypothese, von der ich spreche, blieb nur Hypothese (ich weiss nicht ob sie jemals veröffentlicht wurde), bis im Jahre 1866 *Schiaparelli* aus Beobachtungen der Auguststernschnuppen eine Bahn für diese Körper berechnete, die er ziemlich vollkommen übereinstimmend fand mit der Bahn des grossen Cometen von 1862, die von *Oppolzer* berechnet war; und so entdeckte und bewies er, dass ein Comet aus einer Gruppe von Meteorsteinen besteht. . . . Der dichteste Theil des Zuges erscheint, wenn er uns nahe genug ist, als der Kopf des Cometen«[1]).

der übrigen Cometen zeigen zum Theil keine, zum Theil eine nur wenig sicher verbürgte Coïncidenz, im Allgemeinen aber eine so characteristische Uebereinstimmung ihrer Typen, dass mir die Annahme auch einer analogen Uebereinstimmung des chemischen Typus ihrer Constitution nicht ungerechtfertigt erscheint.

Sollte daher auch nur bei einem dieser so characteristischen Cometen-Spectra mit Sicherheit die Coïncidenz mit einem Kohlenwasserstoffspectrum nachgewiesen sein, so würde ich nicht Anstand nehmen, auch bei den andern Cometen eine ähnliche chemische Constitution vorauszusetzen und mir einstweilen die Nichtcoïncidenz durch Unterschiede von Druck- und Temperaturverhältnissen erklären, die bei der grossen Mannigfaltigkeit der Kohlenwasserstoffverbindungen gerade hier von wesentlichem Einfluss auf die chemische Constitution der leuchtenden Dämpfe sein könnten.

1) »The meteoric hypothesis to which I have referred remained a mere hypothesis (I do not know that it was ever even published) until in 1866 *Schiaparelli* calculated, from observation on the August meteors, an orbit for these bodies which he found to agree almost perfectly with the orbit of the great comet of 1862 as calculated by *Oppolzer*; and so discovered and demonstrated that a comet consist of a group of meteoric stones« . . . . »The densest part of the train, when near enough to us, is

Schiaparelli vertheidigt sich gegen diese Interpretation seiner Theorie mit folgenden Worten, die ich mir aus der von *G. v. Boguslawski* herausgegebenen deutschen Uebersetzung seines »Entwurfes einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen«[1], zu citiren erlaube.

Schiaparelli weist l. c. p. 180 darauf hin, dass nach seiner Theorie der Ausbreitung einer aus discreten Theilchen bestehenden kosmischen Wolke, welche in die Nähe eines grösseren Himmelskörpers, z. B. der Sonne oder eines Planeten geräth, diese Ausbreitung nur eine solche längs der Bahn sein kann. Alsdann fährt er wörtlich folgendermassen fort:

> »Wenn man also in irgend einem dieser Körper, welche aus den Tiefen des Weltraumes zu uns gelangen, irgend eine andere Art der Zerstreuung sich offenbaren sieht, bei welcher seine Theile sich nicht längs der Bahn ausbreiten, sondern in anderen Richtungen, so wird man daraus schliessen müssen, dass diese Zerstreuung von einer anderen Ursache herrührt, als von derjenigen, welche wir bisher betrachtet haben. Dies ist gerade der Fall bei den mit einem Schweife versehenen Cometen, welche bei jedem Periheldurchgange an Materie zu verlieren scheinen: Dieser Verlust erfolgt aber nicht längs der Bahn, sondern vielmehr in der Richtung des Radiusvector . . . .
>
> »Nichtsdestoweniger haben einige Schriftsteller geglaubt, — (und diese Ansicht ist sehr mit Unrecht auch dem Verfasser dieses Buches zugeschrieben worden) — dass die Auflösung der Cometen in Meteorschwärme und die Bildung der Schweife identische oder wenigstens mit einander zusammenhängende Erscheinungen seien, und dass man in dem Schweife den Anfang der Bildung eines Meteorschwarmes erkennen müsse.«

Auf p. 186 a. a. O. drückt sich *Schiaparelli* noch entschiedener gegen die bekämpfte Anschauung einer Identität der Schweife der Cometen mit Meteorschwärmen aus, indem er sagt:

---

visible as the head of the comet.« Inaugural Address of Sir *William Thomson* in the British Association Meeting at Edinburgh. 1871.

1) Entwurf einer astronomischen Theorie der Sternschnuppen von *J. V. Schiaparelli*. Einzig autorisirte deutsche Ausgabe der vom Verfasser völlig umgearbeiteten »Note e Riflessioni sulla teoria astronomica delle Stelle cadenti« aus dem Italienischen übersetzt und herausgegeben von *G. von Boguslawski*.

»Da ich aber hier nicht in die so sehr verwickelte Frage über die Natur und die Erscheinungen der Cometen näher eingehen will, so genügt es mir, die Existenz der repulsiven Kraft bei den Lichtausströmungen und den Schweifen gezeigt zu haben, was für uns der Hauptzweck war.

»Ist diese angenommen, so wird man sofort erkennen, dass weder die Lichtausströmungen, noch die Schweife die Sternschnuppen erzeugen können«.

Wenn nun nach den vorstehend mitgetheilten Argumenten aus der Gleichheit der Bahnen einiger Cometen mit denjenigen von Meteorschwärmen nicht auf eine Gleichheit der physischen Beschaffenheit beider Phänomene geschlossen werden darf, so bleibt zur Erklärung jener merkwürdigen Coïncidenz ihrer räumlichen Beziehungen nichts anderes als die Annahme einer Gleichheit des Ursprungs übrig. Aehnlich wie sich aus der übereinstimmenden Richtung der Revolutions- und Rotationsbewegungen sämmtlicher Planeten und Satelliten die Hypothese von dem gemeinsamen Ursprunge der Körper unseres Sonnensystems entwickelt hat, und ebenso wie *Olbers*[1] durch die Uebereinstimmung der Bahnen der kleinen Planeten zur Hypothese eines gemeinsamen Ursprungs dieser Körper geführt wurde, ähnlich deutet die Uebereinstimmung der Bahnen von Cometen und Sternschnuppenschwärmen nur auf eine ursprüngliche Zusammengehörigkeit der Stoffe, aus denen diese verschiedenen Körper gebildet sind.

Schiaparelli denkt sich diese ursprüngliche Zusammengehörigkeit in der Weise, dass die Kerne der Cometen aus einer festen Substanz bestehen, welche durch die meteorologischen Vorgänge in ihrer Dunsthülle einer Art »Verwitterungsprocess« unterworfen wird, so dass sich die Kerne der Cometen allmälig in ein Aggregat discreter Theilchen auflösen, welche bei ihrer Zerstreuung durch die Attraction und den atmosphärischen Widerstand eines grösseren Weltkörpers in einen Meteorschwarm verwandelt werden.

Die betreffenden Worte *Schiaparelli*'s in seinem oben citirten Werke lauten folgendermassen (l. c. p. 212 u. 213):

»Stellen wir uns aber auf einen Cometen versetzt vor

---

1) *Zach*'s monatl. Corresp. Bd. VI. p. 88.

und nehmen wir an, dass eine leicht zerstörbare Gesteinsmasse im Centrum desselben einen kleinen Kern bilde. Die Veränderungen der Temperatur und der Feuchtigkeit — (es versteht sich von selbst, dass das Wort Feuchtigkeit hier nicht als nothwendig mit der Vorstellung von Wasser verbunden betrachtet werden muss) —, die mechanischen und chemischen Einwirkungen, welche bei einem solchen Körper stattfinden müssen, sind ebenso schwierig sich vorzustellen, als zu beschreiben.« . . . »Da wir allen Grund haben zu vermuthen, dass die Sternschnuppen fest seien und dass sie von der Auflösung der Cometen herstammen, so können uns die obigen Annahmen eine (ohne Zweifel sehr unvollständige und unvollkommene) Vorstellung von der Art und Weise geben, wie die Zertheilung der Cometen in eine grosse Anzahl von kleinen Meteorkörperchen erfolgt.«

Nach den von mir entwickelten und in meiner Abhandlung »Ueber die Stabilität kosmischer Massen etc.« begründeten Anschauungen von der Natur der Cometen ist ihr gemeinschaftlicher Ursprung mit dem der Meteoriten dadurch begründet, dass beide Klassen von Körpern Bruchstücke oder Trümmer eines grösseren Weltkörpers sind, und zwar die Cometen die flüssigen, die Meteoriten oder Sternschnuppen die festen Ueberreste dieses Weltkörpers. Selbstverständlich soll durch diese Unterscheidung der Aggregatzustände für irdische Temperaturverhältnisse nur der grössere oder geringere Grad der Verdampfbarkeit jener kosmischen Massen angedeutet werden, ein Unterschied, der auch bei niedrigen Temperaturen im festen Aggregatzustande im Allgemeinen den Stoffen gewahrt bleibt. Meine Worte, in denen ich von diesem Gesichtspunkte aus die Entdeckung *Schiaparelli*'s in der erwähnten Abhandlung vom 6. Mai 1871 und in meiner Schrift: »Ueber die Natur der Cometen etc.« p. 109 interpretirte, waren die folgenden: [1]

»In der That, giebt man die Existenz flüssiger Meteormassen zu — und ich sehe keinen irgend wie haltbaren Grund, ihr Vorkommen unter den zahllosen festen Massen im Weltraume a priori zu bestreiten — so ist die von *Schiaparelli* hervorgehobene und von Andern bestätigte

1) Diese Berichte, Sitzung am 6. Mai 1871 p. 205 u. 206.

Uebereinstimmung zwischen den Bahnen kleiner Cometen mit denjenigen der Meteor- und Sternschnuppenschwärme eine nothwendige und selbstverständliche Folge jener Annahme.

»Würde unsere Erde jemals durch einen ähnlichen Process in einzelne Stücke zertrümmert, durch welchen sich *Olbers* die kleinen Planeten entstanden denkt, so müssten sich neben den zahlreichen festen Fragmenten auch Theile der gegenwärtigen Meere und der im Innern gebildeten flüssigen Kohlenwasserstoffverbindungen zu einzelnen Flüssigkeitskugeln gruppiren, die den Bewohnern anderer Welten den Anblick cometenartiger, mit variablen Dunsthüllen umgebener Körper darböten.«

Es muss weiteren Beobachtungen überlassen bleiben, zu entscheiden, ob das scheinbare Verschwinden des *Biela*'schen Cometen in einem ursächlichen Zusammenhange mit dem am 27. Nov. d. J. beobachteten so überaus reichen Sternschnuppenfall zu suchen sei. Es wäre denkbar, dass beim Verschwinden des Kernes eines Cometen in Folge allmäliger Verdampfung die übrig bleibende Dunstwolke in Ermangelung eines stark prävalirenden Attractionscentrums sich in ähnlicher Weise bei ihrer Abkühlung in eine Anzahl discreter Centra verdichtete, wie eine Wasserdampfwolke bei zunehmender Abkühlung sich in Regentropfen auflöst. Jene condensirten Theile des Cometendampfes würden dann, wenn sie im festen oder vielleicht noch flüssigen Zustande in die Atmosphäre der Erde eindringen, das Phänomen zahlreicher Sternschnuppen erzeugen können. Die Anwendung des Spectroskopes wird uns hoffentlich auch über diese Fragen Aufschluss geben.

F. Zöllner, *Ueber die durch strömendes Wasser erzeugten electrischen Ströme.*

(Mit einer Tafel.)

In einem Nachtrage zu meiner Abhandlung »über den Ursprung des Erdmagnetismus und die magnetischen Beziehungen der Weltkörper«[1]) theilte ich einige Versuche mit, in denen das Auftreten von galvanischen Strömen beim Durchfliessen des Wassers durch Röhren beobachtet wurde. Hinsichtlich der Ursache dieser Ströme drückte ich meine Vermuthung in folgenden Worten aus (l. c. p. 574):

»Ich vermuthe, dass die Ursache dieser Ströme dieselbe ist wie bei den *Quincke*'schen Diaphragmenströmen.«

Wenige Monate später wiederholte Herr *Beetz* in München meine Versuche[2]) mit gleichem Erfolge, zeigte jedoch durch geeignete Modification der Bedingungen, dass die von mir vermuthete Ursache jener Ströme wahrscheinlich nicht die richtige sei und dass die Anordnung meiner Experimente Einwürfen unterliege, deren Berechtigung ich bereits am Schlusse meiner letzten Abhandlung »Ueber die electrische und magnetische Fernewirkung der Sonne« vollständig anerkannt habe.[3])

Ich war daher bemüht, meine Versuche unter Bedingungen zu wiederholen, welche derartigen Einwendungen nicht unterworfen sind, und erlaube mir in Folgendem die bis jetzt erlangten Resultate meiner Beobachtungen in Kürze mitzutheilen.

Die Methode zur Erzeugung der Flüssigkeitsströmung ist im Wesentlichen die von *Quincke* bei seinen Untersuchungen

---

1) Diese Berichte, Sitzung am 20. October 1871. p. 479—575.

2) Berichte der Königl. Bairischen Akademie d. W. Sitzung am 4. Mai 1872.

3) Diese Berichte, Sitzung am 1. Juli 1872.

über Diaphragmenströme angewandte,[1]) und die beifolgende Tafel zeigt die Anordnung der einzelnen Theile des hierzu benutzten Apparates. In dem Gefässe *B* kann die über dem Wasser befindliche Luft zusammengedrückt oder verdünnt werden, je nachdem das Quecksilbergefäss *D* höher oder niedriger als das durch einen starken mit Hanf durchwebten Gummischlauch damit communicirende Gefäss *D* aufgestellt wird. Die Höhendifferenz der Quecksilberniveaus in beiden Gefässen giebt alsdann unmittelbar die Grösse der positiven und negativen Druckwerthe an, durch welche das Wasser entweder von dem Gefässe *B* nach *A* oder in umgekehrter Richtung in dem Röhrensysteme bewegt wird. Die beiden Röhrentheile von c. 8 Mm. Oeffnung sind bei *c* durch ein feines-, mit Kork und Siegellack sorgfältig eingekittetes Röhrenstück verbunden, welches leicht durch Röhren von verschiedener Länge und anderem Caliber ersetzt werden kann. In den seitlichen Röhren-Ansätzen *a* und *b* sind Platindrähte von c. 0.5 Mm. Durchmesser eingeschmolzen, welche c. 30 Mm. tief in die Ansätze hineinragen.

Die freien Enden dieser Platindrähte sind vermittelst des Commutators *W* mit einem sehr empfindlichen Galvanometer *G* mit Spiegelablesung und aperiodischer Bewegung[2]) in Verbindung gesetzt. Der Abstand der Scala vom Spiegel betrug 3020 Mm.

Die Längen (l) der bei *c* nacheinander eingeschalteten Glasröhren waren:

l_1 = 10 Millimeter,
l_2 = 20 »
l_3 = 28 »
l_4 = 55 »

Die Oeffnungen dieser Röhren waren zum Theil kreisförmig, zum Theil elliptisch. Die mikroskopisch bestimmten Durchmesser (d) der kreisförmigen Oeffnungen waren folgende:

d_a = 0.949 Millimeter,
d_b = 0.557 »
d_c = 0.519 »
d_d = 0.152 »

1) *Poggendorff's* Annalen Bd. CVII. p. 1—p. 47.

2) *E. du Bois-Reymond*, Ueber aperiodische Bewegung gedämpfter Magnete. Monatsberichte der Berliner Akademie 1869. p. 807—p. 887.

Bei der elliptischen Oeffnung betrug
die Länge der grossen Axe: 0.696 Millimeter,
die Länge der kleinen Axe: 0.228 »

Die Grössen des angewandten Quecksilberdruckes (P) waren entsprechend der oben gegebenen Bezeichnung für positive und negative Druckwerthe die folgenden:

$$P_a = + 480 \text{ Millimeter},$$
$$P_b = + 200 \text{ »}$$
$$P_c = - 180 \text{ »}$$
$$P_d = - 470 \text{ »}$$

Da es mir bei den mitzutheilenden Versuchen vorläufig nur darauf ankommt, die Existenz von electrischen Strömen unter den vorstehend angegebenen Bedingungen nachzuweisen, deren Richtung in dem Wasser mit der in diesem erzeugten Flüssigkeitsströmung übereinstimmt, so verzichte ich auf eine genauere Angabe der übrigens aus den Arbeiten *Quincke's* bekannten Vorsichtsmassregeln, welche bei derartigen Versuchen zu berücksichtigen sind. Ich bemerke nur, dass die durch Ungleichartigkeiten der beiden Platindrähte erzeugten Ströme gering waren und dass sowohl die hieraus als die aus der Polarisation entspringenden Fehlerquellen durch die Umkehr und kurze Dauer der Flüssigkeits- und electrischen Ströme unschädlich gemacht werden konnten.

Bei einem vorläufigen Versuche mit der Röhre von elliptischem Caliber und einer Länge von 20 Mm. erhielt ich bei abwechselnder Anwendung der Druckgrössen $P_b = + 200$ Mm. und $P_c = - 180$ Mm., also bei einer Gesammtdruckdifferenz von nur einer halben Atmosphäre die folgenden Differenzen der Ausschläge am Galvanometer:

Nr. der Beob.	Differenz
1.	3.4
2.	3.4
3.	3.6
4.	3.7
5.	3.8
6.	3.7
7.	3.6
8.	2.5

Nr. der Beob.	Differenz
9.	3.5
10.	3.7
11.	3.6

Die Richtung des electrischen Stromes war wie bei den *Quincke*'schen Diaphragmenströmen übereinstimmend mit der Richtung der erzeugten Flüssigkeitsströmung.

Bei der folgenden Versuchsreihe war ich bemüht, die Abhängigkeit der electrischen Stromstärke von der Grösse der angewandten Druckdifferenzen annähernd festzustellen. Die Röhre bei *c* war durch eine andere von demselben Caliber, aber einer Länge von 28 Mm. ersetzt.

Werden die bei Anwendung der Druckgrössen P_a P_b P_c P_d beobachteten Stromstärken beziehungsweise mit S_a S_b S_c S_d bezeichnet, so ergaben sich folgende Mittelwerthe:

$\frac{S_a}{S_b}$	$\frac{S_c}{S_d}$
1.84	2.31
2.42	2.80
2.28	1.81
1.91	2.40
2.63	2.06
Mittel = 2.22 ± 0.09	Mittel = 2.28 ± 0.11

Dem Obigen gemäss sind die Druckgrössen P_a und P_b positiv, P_c und P_d negativ, so dass bei beiden Beobachtungsreihen die Flüssigkeitsströmung und dem entsprechend auch die electrische Strömung ihre Richtung wechselte.

Die Maximaldifferenz der beobachteten Multiplicatorablenkungen betrug 8.8 Scalentheile, und die Art der Ablenkung zeigte stets einen electrischen Strom an, dessen Richtung mit der des strömenden Wassers übereinstimmte.

Vergleicht man die obigen Mittelwerthe für das Verhältniss der Stromstärken mit dem Verhältniss der dabei angewandten Druckwerthe, so ergiebt sich:

$$\frac{P_a}{P_b} = 2.40 \qquad \frac{S_a}{S_b} = 2.22 \pm 0.09$$

$$\frac{P_c}{P_d}' = 2.64 \qquad \frac{S_c}{S_d} = 2.28 \pm 0.11.$$

Trotz des provisorischen Characters der mitgetheilten Versüche scheint sich also auch hier wie bei den von *Quincke* beobachteten Diaphragmenströmen annähernd eine Proportionalität zwischen der Stromstärke und den sie erzeugenden Druckgrössen zu ergeben. [1])

Es mag hier noch eine Beobachtungsreihe folgen, bei welcher die Verbindung bei c durch eine Röhre mit kreisförmigem Querschnitt hergestellt war von dem Durchmesser:

$$d_b = 0.557 \text{ Mm.}$$

Die abwechselnd angewandten Druckgrössen waren beziehungsweise

$$P_a = + 480 \text{ Mm.}$$
$$P_e = - 320 \text{ Mm.},$$

so dass auch hierbei die Richtung des Wasserstromes und gleichzeitig die damit verbundene electrische Strömung entsprechend dem Vorzeichen der Druckgrössen sich umkehrte.

Die folgenden Zahlen sind unmittelbar abgelesene Theile der Multiplicatorscale. Die Unterbrechung der Strömung wurde durch Hinausziehen des Hahnstöpsels h bewirkt, wo dann durch das Entweichen oder Eindringen der Luft in das Gefäss B das Gleichgewicht des Druckes sich unmittelbar wieder herstellte und so am Schlusse einer jeden Beobachtung eine Controle des Nullpunctes ermöglicht war. Das Gleichgewicht des Druckes ist durch P_0 bezeichnet. Die Differenzen zwischen den bei P_0, P_a und P_e abgelesenen Werthen sind mit Berücksichtigung der Mittelwerthe von (P_0 vor und nach Anwendung des Druckes) erhalten.

P_0	$-P_e$	P_0	Differenz
532.1	529.0	532.4	— 3.3
532.8	528.7	532.8	— 4.1
532.8	528.8	533.0	— 4.1
		Mittel =	— 3.81

1) *Poggendorff*'s Annalen Bd. CVII. p. 22.

p_0	$+ p_a$	p_0	
533.4	539.0	533.5	+ 5.5
533.6	539.5	533.7	+ 5.7
533.7	539.0	533.6	+ 5.4
		Mittel =	+ 5.53

p_0	$- p_e$	p_0	
530.5	526.8	530.4	— 3.6
530.3	526.3	530.0	— 3.7
530.0	526.0	530.1	— 4.0
		Mittel =	— 3.76

p_0	$+ p_a$	p_0	
529.9	535.3	529.8	+ 5.5
529.8	535.0	529.6	+ 5.3
529.3	534.6	529.0	+ 5.5
		Mittel	+ 5.43

Um ungefähr eine Vorstellung von der Grösse der bei diesen Strömen auftretenden electromotorischen Kraft zu erhalten, schaltete ich in den Stromkreis ein frisch zusammengesetztes *Daniell*'sches Element ein und beobachtete während Gleichgewicht des Druckes, also keine Strömung stattfand, die Ausschläge des Multiplicators bei abwechselnd in entgegengesetztem Sinne gerichtetem Strome. Es ergaben sich folgende Differenzen in Scalentheilen:

1.	69
2.	71
3.	71
4.	70
5.	70
6.	71
7.	71
Mittel =	70.04

Da man unter den gegebenen Bedingungen berechtigt war, den Widerstand des *Daniell*'schen Elementes im Verhältniss zu dem übrigen und constant gebliebenen Widerstande [1])

1) Dieser Widerstand war so gross, dass die Einschaltung eines *Siemens*'schen Rheostaten von 20.5 Meilen Telegraphendraht keine wesentliche Aenderung der Stromstärke erzeugte.

des Stromkreises zu vernachlässigen, so verhielten sich die electromotorischen Kräfte wie die beobachteten Stromstärken. Ich bemerke hierbei, dass zu allen diesen Versuchen destillirtes Wasser angewandt wurde und dass nach längerem Gebrauch desselben (etwa nach 2 Tagen) in ähnlicher Weise eine Abnahme der Wirkung beobachtet wurde, wie dies *Quincke* bei seinen Versuchen gefunden hat.

Unter der gemachten Voraussetzung würde sich also bei dem Drucke $P_a = + 480$ Mm. eine electromotorische Kraft von c. 0.156 *Daniell*, also, unter Voraussetzung der Proportionalität zwischen Druck und Stromstärke, für den Druck einer Atmosphäre eine electromotorische Kraft von 0.247 *Daniell* ergeben. — Eine ähnliche Bestimmung ergab für die Röhre von 0.949 Mm. Durchmesser und gleicher Länge eine electromotorische Kraft von 0.43 *Daniell.* Vergleicht man diese Werthe mit den von *Quincke* für poröse Diaphragmen aus verschiedenen Substanzen bei derselben Druckdifferenz (1 Atmosphäre) erhaltenen electromotorischen Kräften,[1]) so ergiebt sich

für gebrannten Thon die electromotor. Kraft zu 0.361 *Daniell*,
Asbest dieselbe zu 0.221

Ohne daher den oben durch vorläufige Versuche ermittelten Werthen der electromotorischen Kraft eine grosse Bedeutung beilegen zu wollen, glaube ich doch daraus schliessen zu dürfen, dass die Stärke der electromotorischen Kraftentwickelung bei den von mir beobachteten Flüssigkeitsströmen von derselben Ordnung wie bei den *Quincke*'schen Diaphragmenströmen anzunehmen ist.

E. du Bois-Reymond hat in seiner Abhandlung »Ueber die electromotorische Kraft der Nerven und Muskeln«[2]) gezeigt, in wie erfolgreicher Weise Bestimmungen der electromotorischen Kräfte dazu dienen können, um beim Erforschen der Ursachen dieser Kräfte von vornherein gewisse Kategorien des Ursprungs auszuschliessen. So wird z. B. in der genannten Abhandlung p. 454 Folgendes bemerkt:

---

1) *Poggendorff*'s Annalen Bd. CX (1860) p. 56.
2) *Reichert*'s und *du Bois-Reymond*'s Archiv 1867. Heft 4. p. 417—p. 497.

»Von den bekannten Ursachen galvanischer Ströme sind es nur drei, an welche man, behufs der Erklärung der electromotorischen Kraft der Nerven, Muskeln u. s. w. denken kann. Dies ist 1. die, welche die Ströme in den Ketten aus mehreren Flüssigkeiten, 2. die, welche die *Wild*'schen Hydro-Thermoströme, [1]) 3. die, welche die *Quincke*'schen Diaphragmenströme erzeugt.«

Nachdem die electromotorischen Kräfte der beiden ersten Kategorien mit denjenigen der Muskeln und Nerven verglichen worden sind, bemerkt *E. du Bois-Reymond* l. c. p. 491 ff. Folgendes:

»Keine Combination, die nicht eine Kraft von 2 × 0.080 = 0,160 *Daniell* liefert, kann die in den electromotorischen Molekeln thätige sein;« »halten wir uns aber an das Bekannte, so sind die einzigen Combinationen, welche nicht durch ihre zu geringe Leistung ohne Weiteres von der Mitbewerbung ausgeschlossen sind, ... merkwürdigerweise nur solche, deren eines Glied destillirtes Wasser ausmacht.«

»Allerdings giebt es eine Stromursache, welche gerade unter solchen Verhältnissen thätig ist, wie wir sie eben in den thierischen Geweben annehmen, und welche unter Umständen eine Kraft erzeugt, die mehr als ausreicht, um die electrischen Erscheinungen an den Nerven und Muskeln zu erklären. Dies ist die von Hrn. *Georg Quincke* entdeckte, von der die Diaphragmaströme herrühren. Die Muskeln und Nerven lassen sich als poröse Körper auffassen, durch welche hindurch Flüssigkeiten unter mechanischem Druck, oder unter Einwirkung von Diffusionskräften, oder von electrischen Triebkräften sich bewegen können. Gleichviel woher die Bewegung stamme, sie wird, nach Hrn. *Quincke*, von einer electromotorischen Wirkung in ihrem Sinne begleitet sein. Wenn nun aber auch, wie ich es bei einer früheren Gelegenheit andeutete, die Möglichkeit da ist, die Entstehung der Electrotonus-

1) *Poggendorff*'s Annalen Bd. CIII (1858) p. 353.

ströme auf diesem Wege zu begreifen,[1]) so möchte es doch nicht leicht sein, eine Vorstellung zu ersinnen, wonach der Strom des ruhenden Muskels oder Nerven auf das Schema eines Diaphragmastromes zurückgeführt würde, geschweige eine solche, wonach eine electromotorische Molekel als ein kleiner Diaphragmaapparat erschiene.«

Dass die von mir beobachteten Ströme beim Durchfluss von destillirtem Wasser durch dünne Glasröhren derselben Ursache ihren Ursprung verdanken wie die Diaphragmenströme *Quincke*'s erhellt, wie mir scheint, auch aus der übereinstimmenden Richtung der beobachteten Ströme und vor allem aus dem Reciprocitätsverhältniss, welches die ganze Klasse jener Phänomene characterisirt.

Auf dieses Verhältniss und nicht auf die von mir mitgetheilten Versuche gestützt, suchte ich in meiner Abhandlung »Ueber den Ursprung des Erdmagnetismus und die magnetischen Beziehungen der Weltkörper« die Annahme zu rechtfertigen, »dass alle strömenden Bewegungen in Flüssigkeiten, besonders wenn dieselben theilweise mit starren Körpern in Berührung stehen, von electrischen Strömen begleitet sind, die sich nach den bisher vorliegenden Thatsachen vorzugsweise in der Richtung der strömenden Flüssigkeit entwickeln.«[2])

Auch der Erdmagnetismus, wenn man ihn durch galvanische Ströme zu erklären versucht, scheint die Annahme einer so ergiebigen Electricitätsquelle im Innern der Erde vorauszusetzen, dass man unter den bekannten Ursachen electrischer Stromerregung, — wie bei den Nerven- und Muskelströmen, — nur an die in den Diaphragmenströmen und deren Modificationen auftretenden Electricitätsquellen zu denken hätte.

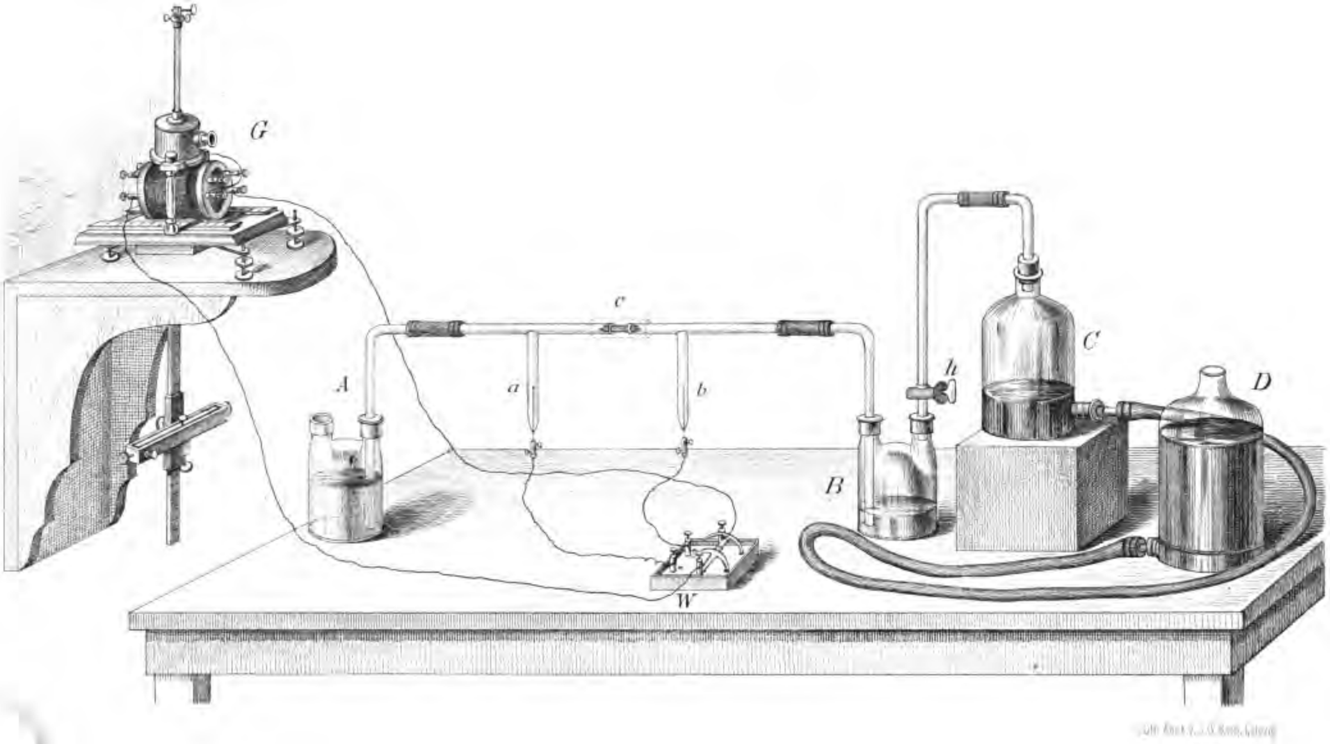
Bei der hohen Bedeutung, welche demgemäss die bis jetzt unbekannten Electricitätsquellen jener merkwürdigen Ströme vielleicht dereinst erlangen können, beabsichtige ich die hier

---

1) *Reichert*'s und *du Boi-Reymond*'s Archiv 1860, S. 542. Anm. 1.
2) Diese Berichte, Sitzung am 20. October 1871.

vorläufig mitgetheilten Versuche mit vervollkommneten Apparaten in umfassenderer Weise fortzusetzen. Es leuchtet ein, dass das Studium der Erscheinungen in ihrer Abhängigkeit von äusseren Bedingungen bei dem Ersatz der porösen Diaphragmen durch Röhren eine sehr wesentliche Erleichterung und Vereinfachung verspricht.

Berichte d. K.S. Ges. d. Wiss. math. phys. Cl. 1872.
Zur Abhandlung v. F. Zöllner.



O. Schlömilch, *Ueber bedingt-convergirende Reihen.*

Nach einem von Hrn. Prof. *Scheibner* entwickelten Satze besteht die nothwendige und hinreichende Bedingung für die absolute Convergenz einer Reihe darin, dass die Reihe auch dann convergirt, wenn statt der einzelnen Glieder deren absolute Werthe, resp. deren Moduli gesetzt werden. [1]) Aus dem Beweise des genannten Satzes ersieht man leicht, dass jene Bedingung keine Erleichterung gestattet, solange der Begriff der absoluten Convergenz allgemein aufgefasst und demnach jede beliebige regellose Umstellung der Reihenglieder erlaubt wird; anders dagegen gestaltet sich die Sache, wenn man die speciellere Voraussetzung macht, dass die Summe der Reihe ungestört bleiben solle, sobald immer p positive und q negative Glieder aufeinander folgen. Dieser Forderung kann, wie das Folgende zeigt, genügt werden, auch wenn die Reihe der absoluten Werthe nicht convergirt.

Bezeichnet $f(x)$ eine bei wachsendem x abnehmende und positiv bleibende Function von x, deren asymptotischer Werth $f(\infty) = 0$ ist, so convergirt bekanntlich die Reihe

$$f(0) - f(1) + f(2) - f(3) + \dots\dots,$$

ihre Summe heisse s. Dagegen soll unter S die Summe der neuen Reihe verstanden werden, welche aus der obigen Reihe dadurch hervorgeht, dass man immer p positive und q negative Glieder aufeinander folgen lässt. Setzt man zur Abkürzung $f(x) = u_x$, so ist s der für $m = \infty$ entstehende Grenzwerth von

$$s_{2m} = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots \quad + u_{2m-2} - u_{2m-1}$$

1) Ueber unendliche Reihen und deren Convergenz. Gratulationsschrift von Prof. Dr. *Scheibner*. Leipzig, Hirzel, 1860. (§. 7.)

und S der für $n = \infty$ zum Vorschein kommende Grenzwerth von

$$\begin{aligned} S_{(p+q)n} = & \; u_0 + u_2 + u_4 + \ldots + u_{2p-2} \\ & - u_1 - u_3 - u_5 - \ldots - u_{2q-1} \\ & + u_{2p} + u_{2p+2} + u_{2p+4} + \ldots + u_{4p-2} \\ & - u_{2q+1} - u_{2q+3} - u_{2q+5} - \ldots - u_{4q-1} \\ & + u_{4p} + u_{4p+2} + u_{4p+4} + \ldots + u_{6p-2} \\ & - u_{4q+1} - u_{4q+3} - u_{4q+5} - \ldots - u_{6q-1} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + u_{(2n-2)p} + u_{(2n-2)p+2} + \ldots + u_{2np-2} \\ & - u_{(2n-2)q+1} - u_{(2n-2)q+3} - \ldots - u_{2nq-1}. \end{aligned}$$

Für $m = nq$ enthält $s_{2m} = s_{2nq}$ alle in $S_{(p+q)n}$ vorkommenden negativen Glieder, daher ist

1) $$S_{(p+q)n} - s_{2qn} = u_{2nq} + u_{2nq+2} + u_{2nq+4} + \ldots + u_{2np-2},$$

wobei die Reihe $n(p-q)$ Glieder zählt, falls p mehr als q beträgt, was einstweilen vorausgesetzt werden möge. Zufolge der im Gebiete des Positiven stattfindenden continuirlichen Abnahme von $f(x)$ gilt nun folgende bekannte Ungleichung

$$\frac{1}{h}\int_a^{a+rh} f(x)\,dx$$
$$< f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \ldots\ldots + f(a+[r-1]h) <$$
$$\frac{1}{h}\int_a^{a+rh} f(x)\,dx + f(a) - f(a+rh);$$

wendet man sie für $f(x) = u_x$, $a = 2nq$, $h = 2$, $r = n(p-q)$ auf die rechte Seite von No. 1) an, so erhält man

$$\frac{1}{2}\int_{2nq}^{2np} f(x)\,dx < S_{(p+q)n} - s_{2qn} < \frac{1}{2}\int_{2nq}^{2np} f(x)\,dx + u_{2nq} - u_{2np}$$

oder für $x = n\xi$

$$\frac{1}{2}\int_{2q}^{2p} \frac{n\xi . f(n\xi)}{\xi}\,d\xi < S_{(p+q)n} - s_{2qn} < \frac{1}{2}\int_{2q}^{2p} \frac{n\xi . f(n\xi)}{\xi}\,d\xi + u_{2qn} - u_{2pn}$$

Nach einem bekannten Satze ist ferner, wenn $\varphi(\xi)$ endlich und stetig, $\psi(\xi)$ endlich, stetig und positiv bleibt von $\xi = \alpha$ bis $\xi = \beta$,

$$\int_\alpha^\beta \varphi(\xi)\psi(\xi)d\xi = \varphi(\mu)\int_\alpha^\beta \psi(\xi)d\xi, \qquad \alpha < \mu < \beta;$$

macht man von dieser Gleichung Gebrauch für

$$\varphi(\xi) = n\xi . f(n\xi), \quad \psi(\xi) = \frac{1}{\xi}, \quad \alpha = 2q, \quad \beta = 2p,$$

so gelangt man zu folgender Ungleichung

$$\tfrac{1}{2}n\mu . f(n\mu) . l\left(\frac{p}{q}\right) < S_{(p+q)n} - s_{2qn} < \tfrac{1}{2}n\mu . f(n\mu) . l\left(\frac{p}{q}\right) + u_{2qn} - u_{2pn} .$$

Bei unendlich wachsenden n convergiren u_{2qn} und u_{2pn} gegen die Null, ferner wird auch $n\mu$ unendlich wegen $n\mu > n.2q$ setzt man nun für unendlich wachsende ω

$$\text{Lim}\,[\omega f(\omega)] = K,$$

so erhält man aus der vorigen Ungleichung die Gleichung

$$S - s = \tfrac{1}{2}K . l\left(\frac{p}{q}\right).$$

Zu demselben Resultate gelangt man im Falle $p < q$, wenn man die Differenz $s_{2qn} - S_{(p+q)n}$ bildet und nachher dem Vorigen analog verfährt.

Wegen $K = \text{Lim}\,(\omega u_\omega)$ oder $K = \text{Lim}\,(nu_n)$ gilt nun folgender Satz:

Wenn in der convergirenden Reihe

$$s = u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \dots.$$

die Glieder so umgestellt werden, dass immer p positive und q negative Terme aufeinander folgen, so ist die Summe der neuen Reihe

$$S = s + \frac{\text{Lim}\,(nu_n)}{2}\, l\left(\frac{p}{q}\right).$$

Hieraus folgen u. A. die bekannten Sätze für die harmonische Reihe. Im Falle $\text{Lim}\,(nu_n) = \infty$, wie z. B. bei

$$s = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots,$$

wird die neue Reihe divergent. Für Lim $(nu_n) = 0$ übt die Umstellung der Glieder keinen Einfluss auf die Summe aus; ein Beispiel hierzu bietet die Reihe

$$s = \frac{1}{2l2} - \frac{1}{3l3} + \frac{1}{4l4} - \dots,$$

bei welchem das *Scheibner*'sche Criterium keine Entscheidung liefert, weil die absoluten Werthe der Terme eine divergirende Reihe bilden.

Dr. J. Michel, *Zur näheren Kenntniss der Blut- und Lymphbahnen der Dura mater cerebralis.* Aus dem physiologischen Institute zu Leipzig. Vorgelegt von dem wirklichen Mitgliede *C. Ludwig.*

Mit 1 Tafel in Farbendruck.

Die von verschiedenen Seiten angestellten Untersuchungen über den vorliegenden Gegenstand scheiterten zumeist an der Schwierigkeit. eine bestimmte Entscheidung darüber zu treffen, ob das nahe der inneren Oberfläche der Dura gelegene Gefässnetz dem Lymph- oder Blutgefässsystem zuzurechnen sei. [1]) So spricht sich *v. Recklinghausen*[2]) für die wahrscheinliche lymphatische Natur der an der innern Schichte der Dura des Menschen und Hundes befindlichen Gefässe aus. *Böhm* [3]) sieht sich durch seine experimentellen Studien über die Dura zur Annahme eigenthümlicher Verhältnisse hinsichtlich des Gefässnetzes an der Innenfläche veranlasst. Die Communicationen des letzteren mit der Cavitas serosa cranii, seine unregelmässige Gestaltung, die sehr deutlich ausgesprochenen knotigen Anschwellungen an den Verzweigungsstellen seien geeignet, die Auffassung zu begünstigen, als handle es sich hier um ein selbstständiges Lymphsystem. Dasselbe müsse sich wegen gleichzeitig stattfindender

1) *Mascagni* lässt die Lymphgefässe der Dura mater sich nach dem Laufe der Blutgefässe richten und mit ihnen durch das Foramen spinosum zu den Drüsen geben, welche an der Theilungsstelle der Drosselader liegen. »Neue Theorie der Absonderungen durch anorganische Poren und dessen Geschichte der Lymphgefässe«, aufs Neue herausgegeben von *Peter Lupi*, Leipzig 1799, §. 345, p. 209 und 210.

2) »Die Lymphgefässe und ihre Beziehung zum Bindegewebe«. Berlin 1862. p. 56.

3) »Experimentelle Studien über die Dura mater des Menschen und der Säugethiere«. *Virchow*'s Archiv Bd. 47.

Füllung von venösen Verzweigungen der Dura an vielen Stellen mit denselben in directe Verbindung setzen. Durch Injection von der Arter. mening. med. aus könne aber ebenfalls eine vollständige Füllung der fraglichen Gefässe hergestellt werden. Es dürfe daher dieses Netz mit Wahrscheinlichkeit als »eine Art accessorischen Capillarsystems der Dura« angesprochen werden, welches dazu bestimmt sei, einerseits bei abnormen intracraniellen Blutstauungen sich zu füllen, andererseits in Folge der offenen Communication mit der Cavitas serosa cranii eine Rolle bei der Resorption krankhafter Exsudate und Flüssigkeitsansammlungen zu übernehmen. [1]) *Key* [2]) und *Retzius* [2]) betrachten das Capillarnetz an der Innenfläche der Dura als Blutbahn, die sich durch eigenthümliche, bei verschiedenen Thieren in verschiedener Weise auftretende Formen auszeichne; den Eintritt einer Füllung der venösen Verzweigungen und Sinus der Dura, im Weitern der Venen des Schädels und sogar derjenigen der Kopfhaut bei den subarachnoidealen und subduralen Injectionen schreiben sie der Vermittelung der sog. *Pacchioni*'schen Granulationen oder Arachnoidealzotten zu. Letztere werden als physiologische Bildungen von hoher Dignität bezeichnet. Die Ansicht von *Key* und *Retzius* über die Natur des Capillarnetzes an der Innenfläche theilt *Paschkewicz*. [3]) Nach Einwirkung einer Silberlösung auf die Innenfläche der Dura, welcher Manipulation eine Blutgefässinjection vorausgegangen ist, zeigt die mikroskopische Untersuchung »ausser einem System von Saftkanälchen Kanälchen, welche Blutgefässe begleiten und den *His*'schen perivasculären Räumen auf der Arachnoidea analog sich verhalten. In der Dicke der Dura sind Lymphgefässe oder Lymphräume in grosser Menge vorhanden, welche daselbst als kleine mit einander communicirende Räume auftreten und sich allmälig in ebensolche von mehr begrenzter Form und grösserem Caliber ergiessen. Letztere sind zwischen den länglichen Schlingen der Gefässe gelagert, oder Begleiter von Blutgefässen, indem sie gleichsam Gefässscheiden bilden«.

---

1) l. c. p. 15 und 16.

2) Referat, *Virchow* und *Hirsch*. 70. p. 28—31.

3) »Zur Histologie der harten Hirnhaut«. St. Petersburger Medic. Zeitschr. 1871. 4. und 5. Heft.

1. *Arterielle Injection.*

Eine vollkommene Füllung der Blutgefässe der Dura zu erreichen ist mit einigen Schwierigkeiten verknüpft, und es bedarf einer öftern Wiederholung der Injectionen, um endlich denjenigen Druck und die Modification der Steigerung desselben herauszufinden, welche ein vollkommenes Resultat zu erzielen erlaubt. Ich bediente mich hierzu fast ausschliesslich der bereits von *Prussak* [1]) angegebenen Methode. Indem die Haut des Halses vermittels einer um denselben herumgeführten und stark angezogenen Messingdrahtschlinge fest umschnürt werden konnte, vermied man jegliches Ausfliessen von Injectionsmasse aus den Gefässen der Haut, aus denjenigen von Muskeln und Knochen durch die Erzeugung eines Brandschorfes auf der abgetrennten Fläche. Eine vollkommene Injection nahm immer eine Zeitdauer von 10 bis 15 Minuten in Anspruch; dieselbe wurde unter einem Drucke von 60^{mm} begonnen, nach successiver Steigerung desselben bis auf 200^{mm} diese Druckhöhe 5 Minuten lang beibehalten und alsdann die Canüle abgebunden. Als Injectionsmasse diente Carmin- oder Chromgelbleim, und als Versuchsthier hauptsächlich der Hund, dessen Dura wegen ihrer Dünne für nachherige mikroskopische Untersuchung sich sehr eignet und hinsichtlich der Menge und Mannichfaltigkeit der Blutbahnen der menschlichen Dura am ähnlichsten ist. Die Blutgefässe der letzteren wurden von der Art. mening. med. aus injicirt.

Die Arterien, Arteria mening. media und Aeste derselben verlaufen, was ihre Hauptvertheilung betrifft, an der Aussenfläche der Dura, sind von einer dünnen Schichte von Duragewebe umschlossen und in Furchen der Innenfläche des Schädels eingelagert. Ihre Theilung trägt im Wesentlichen einen dichotomen Character. Von diesen durch regelmässige dichotome Theilung gebildeten Aesten treten manchmal isolirte Stämmchen ab, welche ein relativ schwaches Caliber aufzuweisen haben, eine grosse Strecke weit und nicht selten rücklaufend auf der Aussenfläche bleiben, bis sie meistens in das Gewebe der Dura selbst eintretend allmälig sich zwischen die Bindegewebsbündel

1) »Zur Physiologie und Anatomie des Blutstroms in der Trommelhöhle«. Arbeiten aus der phys. Anstalt zu Leipzig 1868. p. 92.

einsenken oder manchmal plötzlich nahezu rechtwinklig umbiegen. Die Capillarendvertheilung ist eine ziemlich spärliche, und findet, abgesehen von den Aesten, die sich in Knochen und in äusserer Kopfhaut verbreiten, zum grössten Theil auf der Aussenfläche, weit geringer im Gewebe der Dura selbst statt. In beiden Fällen münden die endlichen Verzweigungen direct in Venen (s. Fig. I. b), in letzterem Falle, nachdem sofort nach ihrem Eintritt in das Gewebe der Dura ihre Theilung stattgefunden hat, ausserdem noch in ein Gefässnetz an der Innenfläche (s. Fig. I. a), welches gleich ausführlicher beschrieben werden wird. Solange die Arterien auf der Aussenfläche der Dura verlaufen, sind sie meistens von je zwei Venenstämmen begleitet, die auf der von der Arterie abgewandten Seite die zahlreichsten Verästelungen zeigen und sich in ein äusserst complicirtes, aus einer Menge kleinerer sinusartiger Räume zusammengesetztes Netz auflösen, das nur wenige schmale Zwischenräume freilässt. [1])

An zahlreichen Stellen gehen breite Venenstämme über und unter der Arterie durch und stellen somit ebenso viele Verbindungsbrücken zwischen den beiden die Arterie begleitenden Venen dar (s. Fig. I.). An Breite übertrifft ihr Durchmesser den der Arterie um das 5- bis 6fache; doch sind die Venen öfters nicht von gleichem Durchmesser, sondern differiren um das 2- bis 3fache. Ueberdies zeigen sie stellenweise An- und Abschwellungen. Nicht selten ist auch die Vene der einen Seite ganz kümmerlich entwickelt und die auf der andern Seite verlaufende hat einen 9- bis 10fach breiteren Durchmesser wie die Arterie. Zahlreiche Verbindungen der Venennetze der Aussenfläche der Dura existiren mit den Venen des Schädels und der Kopfhaut. Oben wurde bereits die Einmündung von arteriellen Capillaren in Venen erwähnt, ferner eine solche mit einem an der Innenfläche vorhandenen Gefässnetz; mit diesem stehen nun auch die venösen Verzweigungen der Dura in Communication, wie? soll nach der Beschreibung des Gefässnetzes an der Innenfläche dargestellt werden. Dieses Netz, dessen Füllung ziemlich selten ganz vollständig gelingt, ist äusserst mannigfaltig und unregelmässig gestaltet (s. Fig. I.); bald ist es mit lymphgefässähnlichen knotigen Anschwellungen versehen, von

1) *Böhm*, l. c. p. 3.

welchen aus gewöhnlich nach beiden Seiten hin zwei Aeste divergirend ausstrahlen, bald besteht es aus zierlich geschlängelten Verzweigungen, welche in Folge vielfacher Communicationen untereinander nur schmale Felder zwischen sich freilassen. An manchen Stellen ist die letztere Art und Weise der Verästelung sehr stark ausgeprägt, so an der Basis cranii. Die Menge der Gefässbahnen ist nach der Localität eine ziemlich wechselnde. Die Form ist häufig eine korkzieherartig gewundene oder mehr zackige. Der bei weitem grösste Theil der Verästelungen ist zwischen diejenigen Bindegewebsfibrillenbündel gelagert, welche die innere Oberfläche zusammensetzen, nur ein Theil, bestimmt, in Verbindung mit den Venen auf der Aussenfläche zu treten, verbreitet sich im Gewebe der Dura selbst. Diese Verbindungsäste sind theilweise von grosser Feinheit, etwas geschlängelt, und durchsetzen das Gewebe der Dura in schiefer Richtung, theilweise von starkem Caliber und senkrecht die Dicke der Dura durchlaufend. Im Vergleich mit der Zahl der arteriellen Capillaren, welche mit dem Netze an der Innenfläche in Verbindung treten, (und zwar geschieht Letzteres meistens in der Weise, dass unter Bildung eines kurzen, schwachen Bogens gerade vor der Einmündungsstelle als solche die kleinen knotigen Erweiterungen [s. Fig. I. a] vorzugsweise aufgesucht werden,) dürfte die der Verbindungsäste des Netzes an der Innenfläche mit Venen eine grössere sein (s. Fig. I. c). Analog unserer Beschreibung verhält sich die *Böhm*'s [1]) hinsichtlich benannten Netzes, besonders des Zusammenhanges dieses mit den Venen der Aussenfläche, die aber auf Untersuchungen von durch Einstich in das Gewebe der Dura erhaltenen Füllungen basirt ist. In der Leiche findet sich dieses Netz grösstentheils gar nicht oder nur schwach gefüllt, während es bei Stauungen augenblicklich durch die stärkere Füllung sehr auffällig wird. Die Eigenthümlichkeit der anatomischen Anordnung der Blutbahnen der Dura besteht daher darin, dass das arterielle Capillarnetz in zwei venöse Systeme einmündet, von denen das stärkere auf der Aussen-, das schwächere auf der Innenfläche sich befindet, und welche mit einander durch von dem Netze der Innenfläche abgehende und das Gewebe der Dura durchsetzende Aeste communiciren. Der Menge und dem Caliber der Verzweigungen der beiden ve-

1) l. c. p. 14.

nösen Systeme entspricht die Zahl und die Durchmesser der in sie einmündenden arteriellen Capillaren. In Folge der Menge und grossen Ausdehnbarkeit der venösen Verzweigungen sind die beiden Oberflächen der Dura im Stande, jedenfalls grosse Blutquantitäten aufzunehmen. Der Nutzen der ganzen anatomischen Einrichtung des Kreislaufes möchte sich dann besonders geltend machen, wenn es sich darum handeln wird, rasch Ausgleichungen zu ermöglichen und so z. B. bei Stauungen die eine oder andere Bahn in höherem oder geringerem Grade zu entlasten. Es ist noch hinzuzufügen, dass selbst bei der prallsten Injection des Gefässnetzes an der Innenfläche nie eine Spur der Injectionsmasse in dem Raume zwischen Dura und Arachnoidea gefunden wurde.

II. *Controlle der Böhm'schen Versuche.*

Auf die Innenfläche des durch einen horizontalen Sägeschnitt getrennten Schädeldaches eines Schafes oder Hundes wurde, indem man durch die passende Lagerung des Versuchsobjectes diejenigen Stellen möglichst zu vermeiden suchte, an welchen sich durch Herausnahme des Gehirns eröffnete Venen befanden, eine gewisse Menge Milch gebracht, das Stehenlassen derselben auf der Innenfläche in Bezug auf Zeit vielfach variirt, $^1/_2$ Stunde bis 7 Stunden, die Milch alsdann mit der Pipette entfernt oder durch sorgfältiges Abspülen mit der Spritzflasche und hierauf durch Essigsäure zum Gerinnen gebracht. Der grösseren Deutlichkeit willen zog man vor, die Präparate für die mikroskopische Untersuchung mit Osmiumsäure zu behandeln, nachdem man zuvor die überschüssige Milch einfach abgespült hatte. In den meisten Versuchen waren Milchkügelchen weder in den venösen Verzweigungen der Dura noch auf ihrer Aussenfläche nachzuweisen. Das Letztere konnte man nur einigemal, und dazu in geringer Anzahl, constatiren, ohne dass irgend welche Milchkügelchen in den Duralgefässen vorhanden gewesen wären, eine Erscheinung, die sich nur daraus erklären liesse, dass durch die Präparation sämmtliche Milchkügelchen, die in den Gefässen vorhanden waren, aus denselben herausgetreten wären. Allein die Garantieen gegen allenfallsige Verunreinigung durch Uebertragung sind äusserst unsicher, da ausserdem die Präparation dadurch erschwert wird, dass makroskopisch die Differenz

zwischen Farbe der Milch und des Duragewebes eine geringe ist. Es wurden daher die Versuche in gleicher Weise und aller Sorgfalt mit Berliner Blau ausgeführt; sämmtliche waren von einem negativen Resultat begleitet: keine Füllung von Gefässen, keine Spur der blauen Flüssigkeit auf der Aussenfläche. Auch die menschliche Dura zeigte die nämlichen Verhältnisse, wie die der Säugethiere. Nur in einem Falle trat eine ganz circumscripte Injection von Gefässen ein, wo man als Ursache eine deutliche Verletzung der Innenfläche nachweisen konnte.

Im Weiteren wurde vom Duralsacke des Rückenmarkes aus in der von *Böhm* [1]) angegebenen Weise die Injection sowohl von Milch als von Berliner Blau vorgenommen, doch mit einigen Modificationen, die wesentlich bessere Garantieen gegen Füllungen von Gefässen zu bieten im Stande waren. Entweder trennte man vor dem Versuche den Oberkörper in der Höhe des Zwerchfellansatzes ab, oder man erhielt die Continuität, um nicht eine zu grosse Fläche, auf welcher sich eine Menge durchschnittener Gefässlumina findet, vor sich zu haben, und legte die Dura spinalis durch Trepanation des Wirbelbogens und Erweiterung der Trepanationsöffnung vermittels eines feinen Meisels blos. Bei dieser Manipulation werden augenblicklich die colossalen venösen Netze in der Umgebung der Wirbelknochen auffällig, und man ist oft zur Unterbindung genöthigt, um die Reinlichkeit des Experiments nicht zu stören. Dann führte man eine feine Glascanüle mit möglichst stumpfem Ende und passender Krümmung in eine durch eine schmale Scheere gemachte Oeffnung der Dura, nachdem man zu diesem Zwecke eine kleine Falte derselben mit der Pincette gefasst hatte. Beim Einführen der Canüle ist mit grösster Vorsicht zu verfahren, da das Gewebe der Arachnoidea und Pia des Rückenmarkes ungemein zart und leicht zerreisslich ist. Die Lagerung des Thieres war immer die gleiche, der Kopf desselben hing nach unten u. s. w. Das Einströmen der Flüssigkeiten geschah nun theils unter dem Drucke ihrer eigenen Flüssigkeitssäule, theils unter einem Drucke von 60 bis 80^{mm} Quecksilber. Die zur Injection verwandte Zeit variirte man in verschiedener Weise. Nach Beendigung des Versuches wurde das Präparat, je nach der gewählten Injectionsflüssigkeit, frisch oder nach vorheriger Aufbewahrung in dünnem

1) l. c. p. 10.

Alkohol untersucht. Es zeigte sich alsdann der Raum zwischen Dura und Arachnoidea, sowie der subarachnoidealen Räume des Rückenmarkes (von der Injectionsstelle an) und des Gehirns prall gefüllt, ebenso diejenigen Bahnen und Räume, welche *Schwalbe* [1]) nach seinen Injectionen in den subduralen Raum des Schädels beschrieben hat, und worüber an einem andern Orte bereits von mir [2]) ausführlicher berichtet worden ist. Immer blieben diese Resultate die nämlichen, so oft auch die Injectionen, ob an verbluteten oder nicht verbluteten Thieren, wiederholt wurden, nie wurden irgend welche Füllungen von Gefässen der Dura beobachtet. Zu bemerken ist noch, dass Todtenstarre wesentlich die Vollkommenheit der Füllungen hindert. Conform diesen Beobachtungen war das Verhalten der Jugularvenen; während *Böhm* makroskopisch sowohl als mikroskopisch in dem aus diesen Venen aufgefangenen Blute Injectionsflüssigkeit i. e. Milch nachweisen konnte, wurde nur bei Anfang eines Versuches oder besonders bei Anwendung einer mässigen Druckhöhe bemerkt, dass etwas Blut aus den Venen, in welche man rechtwinklig gebogene, offene Canülen eingebunden hatte, herausfloss, ohne je eine Beimengung von Injectionsflüssigkeit zu zeigen, selbst wenn man den Versuch noch 5 bis 6 Stunden lang nach dem Eintritt des Blutausfliessens fortsetzte. Letztere Erscheinung lässt sich, abgesehen von der durch die Lagerung bedingten Schwere, leicht aus dem Drucke erklären, der im subduralen Raum durch Einfliessen der Flüssigkeit erzeugt wird und auf die Gefässwandungen übertragen natürlich zur Austreibung des Gefässinhaltes führen muss.

Da in den so eben beschriebenen Versuchen keine Füllungen von Gefässen stattfanden, so fragt es sich, welche Momente zu dem *Böhm*'schen Befunde Veranlassung geben konnten. Es ist bereits oben und auch von *Böhm* darauf aufmerksam gemacht, dass man leicht in der ersten Kategorie von Versuchen Continuitätstrennungen von Gefässen bekomme, in der zweiten Kategorie auf die zahlreichen venösen Netze der Wirbelsäule, die nicht zu umgehende Verletzung derselben bei dem Versuche und die Nothwendigkeit der Unterbindung. Die Gefahr, Fül-

1) Archiv f. mikroskop. Anatomie von *M. Schultze*, Bd. VI.

2) »Beiträge zur näheren Kenntniss der hintern Lymphbahnen des Auges«. *Graefe*'s Archiv f. Ophth. Bd. 18, 1. p. 131.

lungen von Gefässen bei diesen Versuchen zu erhalten, ist daher eine sehr grosse und gewiss nur mit genauer Beachtung aller Cautelen zu vermeiden. Eine noch gefahrvollere Klippe in dieser Hinsicht bildet die Einstichsmethode, deren Resultate von *Böhm* als directer Beweis für eine offene Communication der Venen mit dem subduralen Raum angesehen werden, und die nunmehr einer Prüfung unterzogen werden sollen. Zuvörderst dürften hier die allgemeinen Bedingungen aufgestellt werden, die für das Gelingen einer reinlichen Einstichsinjection von sehr wesentlichem Vortheil sind. Vor Allem ist auf die Wahl einer möglichst feinen Canüle Bedacht zu nehmen, deren Lumen im Durchmesser den dritten bis fünften Theil eines Millimeters beträgt, ferner darf man nur eine geringe Druckhöhe anwenden und dann nur allmälig, sehr langsam injiciren und muss nach kurzer Zeit schon aufhören. Hauptsächlich für die Injection geeignete Flüssigkeiten sind Alkannin in Terpentinöl gelöst, Berl. Blau oder gleiche Theile Berl. Blau und 2 % Kochsalzlösung. Mit Leimmassen verschiedener Concentration oder grobkörnigen Flüssigkeiten angestellte Versuche blieben resultatlos, indem das Gewebe der Dura sich dafür nicht durchgängig erwies, und bei Steigerung des Druckes Zerreissungen ausgesetzt worden wäre, die zu falschen Bildern hätten Veranlassung geben können. Für den Einstich selbst ist eine möglichst gefässlose Stelle auszusuchen, sei es dass man denselben in das Gewebe der Dura oder in den Raum zwischen Knocheninnenfläche und Aussenfläche der Dura vollführt. Auf letztere Manipulation machte mich Herr Professor *Schwalbe* aufmerksam, da sich zwischen Dura und Knochen bei Erwachsenen ein System grösserer und kleinerer Räume befände, welche wenigstens auf der Aussenfläche der Dura von einem Endothel [1]) begrenzt seien. Der Vortheil dieser Modification des Einstichs liegt hauptsächlich darin, dass man viel seltener in die Lage kömmt, dabei das Lumen eines Blutgefässes zu eröffnen, besonders wenn man die feine Canüle durch entsprechende Biegung ganz fest dem Knochen entlang führt. Wegen ihres verhältnissmässig geringeren Reichthums an Blutgefässen ist die Dura des Schafes derjenigen des Hundes

1) Auch *Wiensky*, »Ueber die Verbreitung des falschen Epithels im Organismus der Wirbelthiere« (*Virchow* und *Hirsch*, Referat, 1868. p. 25) erwähnt bereits das Vorhandensein eines Endothels auf der Aussenfläche der Dura.

und Menschen vorzuziehen. Die Erscheinungen einer sorgfältig ausgeführten Injection zwischen Dura und Knochen sind nun folgende: Fast augenblicklich, nachdem man einen gelinden Druck mit dem Stempel der *Pravaz*'schen Spritze ausgeübt hat, findet schon ein Austritt von Injectionsflüssigkeit auf der innern Oberfläche statt. Rings um die Injectionsstelle tritt zuerst ein leichtes Hervorwölben, womit zugleich einige farblose Tropfen auf der Oberfläche erscheinen, dann bald in grösserer bald in geringerer Entfernung von der Injectionsstelle ein Anschiessen von nach verschiedenen Richtungen sich kreuzenden grösseren und kleineren streifigen Figuren ein, aus welchen sich die betreffende Flüssigkeit zuerst in kleinen Tropfen, dann in einem nahezu continuirlichen Strome ergiesst. Dabei kann man ganz deutlich bemerken, dass die Flüssigkeit nicht aus rundlichen, sondern aus mehr länglich geformten, spaltähnlichen Oeffnungen austritt. Wird die Injection beendet, sobald ein Austritt in Tropfen stattgefunden hat, so erhält man eine Fläche von 3 bis 4 Quadratmillimetern injicirt. Fährt man dagegen mit der Injection fort, so wird nur wenig an injicirter Fläche hinzugefügt; die ganze Fläche wird vielmehr nach und nach diffus gefärbt und von der Flüssigkeit überströmt, so dass ein Austreten an distincten Stellen nicht mehr unterscheidbar ist. Macht man den Einstich in das Gewebe der Dura, so findet, je nachdem man näher der äussern oder innern Oberfläche eingestochen hat, ein rascherer Austritt auf der betreffenden Oberfläche statt. Da in einer grossen Anzahl von Einstichsversuchen es kaum möglich ist, die Mitverletzung von Gefässen zu vermeiden, besonders bei der Wahl der menschlichen oder Hundedura, erhält man häufig Blutbahnen gefüllt, besonders das Capillarnetz an der Innenfläche und die venösen Verzweigungen, und man kann natürlich durch Fortsetzung der Injection grosse Gefässbezirke füllen. Thut man dies etwas rasch und brüsk, so treten an einzelnen Stellen des bereits injicirten grössern oder kleinern Gefässbezirkes an der Innenfläche kleine Tropfen aus, welche allmälig mit Steigerung des Druckes an Grösse zunehmen und an vielen Orten zum Vorschein kommen; besonders scheinen die Wandungen der knotigen Anschwellungen dieses Netzes den geringsten Druck aushalten zu können, da hier hauptsächlich der Austritt stattfindet. Uebrigens steht diese Erscheinung in grosser Abhängigkeit von der Frische des Präparates, abgesehen

von dem Drucke. Es dürfte daher der von *Böhm* beobachtete Austritt auf der Innenfläche lediglich einem Bersten der Wandungen von Gefässen zuzuschreiben sein, was auch *Paschkewicz* vermuthet hat. Nie zeigen die Gefässe eine offene Communication mit der Cavitas serosa, wenn man unter geringem Druck injicirt. Man kann auch sehr bald erkennen, ob man das Unglück hatte, ein Blutgefäss zu verletzen, indem der Durchtritt durch das Gewebe selbst gar nicht oder nur äusserst langsam erfolgt; die Flüssigkeitsmenge schlägt augenblicklich den weniger Widerstand darbietenden Weg in den Blutbahnen ein und füllt dieselben rasch in praller Weise. Bevor wir nun nach denjenigen Bahnen forschen, welche die Flüssigkeit bei dem Einstich zwischen Knochen und Dura in dem Gewebe der letzteren einschlägt, wollen wir betrachten

III. *Die histologische Beschaffenheit der Dura.*

Die Oberfläche der Dura cerebralis, sowohl die innere als die äussere, sind mit einem Endothelhäutchen von sehr grosser Feinheit versehen. Es gelingt schwer, dasselbe in Continuität zur Anschauung zu bringen, immer bleiben grössere oder kleinere Fetzen theils auf der Arachnoidea, theils auf dem Knochen zurück, selbst beim vorsichtigsten Abheben. Am besten überzeugt man sich von dem Vorhandensein desselben, wenn man eine ganz frische Dura ein oder mehrere Tage in 3 bis 5 % Kal. bichromic.-Lösung einlegt. Das Endothel erscheint dann bei der Isolirung in Gestalt eines zusammenhängenden, oft stark gefalteten zarten Häutchens; die Kerne sind ziemlich gross, von elliptischer Form, über die Fläche prominirend, und granulirt. An der Aussenfläche fehlt das Endothelhäutchen da, wo eine Verwachsung der Dura mit dem Knochen vorhanden ist, so bei Kindern, am grössten Theil der Basis und an denjenigen Stellen der Convexität, wo Verwachsungen mit den zahlreichen Knochenvorsprüngen bestehen. Den Wandungen der Gefässe, welche als Verbindungsäste von Gefässen der Dura mit denen des Knochens und der Kopfhaut ihren Weg durch den Knochen nehmen, sitzt das Endothelhäutchen an. An der Innenfläche ist die Lage eine einfache, nicht doppelte, wie *Paschkewicz* [1]) annimmt

---

1) l. c. p. 387.

und irrthümlich diese Annahme auch *Henle* [1]) zuschreibt. Bei Anwendung einer $^1/_4$% Silberlösung auf die Innenfläche erhält man epitheloide Zeichnungen, die in derselben Weise zu erklären sind, wie die auf der Oberfläche der Gelenkknorpel durch *Hüter* beschriebenen und durch *Schweigger-Seidel* richtig gedeuteten. Das Gewebe der Dura besteht im Allgemeinen aus vielfach durchflochtenen Bindegewebsfibrillenbündeln, die zwei mächtige sich kreuzende Lagen darstellen. Dadurch dass sie an einzelnen Stellen ziemlich lose miteinander verbunden sind, scheint eine Trennung in zwei Blätter möglich. Es hängt dies natürlich von der Menge und der Dichtigkeit der sich überall austauschenden Bindegewebsfibrillenbündel des äussern und innern Blattes ab. Beide Blätter besitzen ziemlich die gleiche Dicke und halten im Wesentlichen den Typus der Kreuzung in ziemlich regelmässiger Weise inne, und zwar so, dass auf jeder Seite der Convexität die einer Schädeldiagonale von vorn aussen nach hinten innen entsprechenden Bündeln des äussern Blattes sich mit solchen in entgegengesetzter Richtung laufenden des innern Blattes verbinden (s. Fig. 3). An der Basis nehmen die Bündel allmälig einen der Transversalaxe parallelen Verlauf an und verweben mit einander auf das mannigfaltigste. Hinzu treten, besonders an Stellen hervorspringender Knochenleisten, accessorische Verstärkungsbündel von irregulärem Verlauf, die nach allen Richtungen hin ausstrahlend angeordnet sind. Dem Verlaufe der Bindegewebsfibrillenbündel folgend, bald etwas näher, bald etwas weiter von einander gelagert, finden sich dann zahlreich vorhandene sog. Bindegewebskörperchen, ausserdem eingestreut zwischen die Bindegewebsfibrillenbündel eine ziemlich grosse Menge elastischer Fasern.

In meiner Abhandlung: »Beiträge znr näheren Kenntniss der hinteren Lymphbahnen des Auges«, [2]) wurden die sog. Bindegewebskörperchen in der äussern Opticusscheide und Sclera als Lücken beschrieben, deren durch die einzelnen Bindegewebsfibrillenbündel gebildeten Wand Zellplatten ankleben; letztere sind alsdann die einzig vorkommenden zelligen Elemente in diesen Geweben, wenn man von sporadisch vorkom-

---

1) »Handbuch d. syst. Anatomie d. Menschen«, 3. Band, 2. Abtheilung p. 311.
2) *Graefe's* Archiv f. Ophth. Bd. 18, 1. p. 143.

menden Wanderzellen absieht. Da die äussere Opticusscheide nur eine Fortsetzung der Dura bildet, so wäre in Bezug auf das Gewebe der letzteren nur dasjenige zu wiederholen, was über das Verhältniss der Bindegewebsfibrillenbündel und Zellplatten der Opticusscheide dort gesagt wurde. Es sind dagegen einige Zusätze zu machen; es ist bei der Untersuchung des Gewebes der Dura noch wahrscheinlicher geworden, dass die Zellplatten die Fibrillenbündel in toto umscheiden, indem es gelungen ist, dieselben auf eine grössere Strecke weit mit dem Bündel in Zusammenhang zu isoliren (s. Fig. 5), so dass es oft den Anschein hat, als habe die Spitze der Präparirnadel die Platte einfach auf dem Bündel zerrissen (s. Fig. 6) und zu beiden Seiten auseinander gelegt. Ferner spricht dafür die Grösse der Platten (s. Fig. 7), für die Verbindung der Platten untereinander die Darstellung mehrerer zusammenhängender Platten.

Die Resultate der Einstichsinjection, die wir jetzt betrachten wollen, sind vollkommen in Einklang mit denjenigen der Sclera und der äussern Opticusscheide. Flächenschnitte eines Stückes der Dura, auf dessen Innenfläche nach Injection von Alkannin zwischen Dura und Knochen die Flüssigkeit hervorgetreten ist, und die etwas entfernt von der Injectionsstelle selbst angefertigt wurden, zeigen daher die Flüssigkeit in regelmässigster Weise durch die ganze Dicke der Dura vertheilt und zwar an solchen Stellen, wo sonst die Kerne der sog. Bindegewebskörperchen zu erkennen sind (s. Fig. 4). Auf gleiche Weise ausgeführte Injectionen mit Berl. Blau zeigen die Masse in ganz gleicher Vertheilung und besonders instructiv werden die Bilder, welche man bei nachfolgender Carminfärbung bekömmt (s. Fig. 2). Die injicirten Stellen sind im Allgemeinen verschieden lang und breit zu beobachten, und machen vollkommen den Eindruck von Spalten oder Lücken, die in verschiedenen Graden der Füllung sich befinden. Diese Spalten sind in der Mitte am breitesten und spitzen sich an beiden Enden etwas zu (s. Fig. 2. d). Bei einer ungenügenden Füllung verkürzt sich der Querdurchmesser der Lücke. Es wird zugleich der durch Carmin gefärbte Kern theilweise sichtbar, und manchmal so vollständig, dass sich nur an derjenigen Wand, an welcher sich der Kern befindet, ein ganz schmaler Streifen der Injectionsflüssigkeit findet (s. Fig. 2. c). An der Peripherie der injicirten Partie der Dura wechseln oft gefüllte Spalten und ge-

färbte Kerne in regelmässiger Weise mit einander ab. Auf senkrechten Schnitten ist die Injectionsmasse entweder um den ganzen Bündel herum angeordnet, oder nur theilweise, so dass das Bild genau demjenigen entspricht, wie es sich nach einer Einstichsinjection in die Sclera findet (siehe l. c. Fig. 7). Die Gefässe in der Dura verlaufen in Spalten, die sowohl einen grössern Längs- als Querdurchmesser wie die soeben beschriebenen besitzen und mit Endothel ausgekleidet sind; es hat daher nicht selten den Anschein, als sei das Gefäss in toto von einem Endothelhäutchen umscheidet. Doch ist das Gefäss nur stellenweise damit versehen, so dass man bei verschiedener Schnittführung die gleiche Füllung von Spalten um die Gefässe beobachten kann, wie um die Bündel (s. Fig. 2. a).

Mit einigen Worten ist noch die diffuse Färbung der fibrillären Grundsubstanz zu berühren (s. Fig. 2. b); sie tritt immer an denjenigen Stellen ein, wo ein starker Druck herrscht, ausnahmslos bei der Injection in das Gewebe an der betreffenden Einstichsstelle. Auch bei Injectionen zwischen Dura und Knochen kommt es nicht selten zur diffusen Färbung der in der Mitte gelegenen Stellen, selbst wenn das Präparat vollkommen frisch gewesen ist. Die diffuse Färbung ist am wenigsten zu befürchten bei Benutzung von Alkannin; zweckmässig ist es bei Anwendung von Berl. Blau das Präparat 24 Stunden lang vor der Injection in dünnen Alkohol zu bringen. [1]) In Folge dieser Manipulation scheint eine Gerinnung der Kittsubstanz der einzelnen Fibrillen einzutreten, wodurch die Bündel in den Stand gesetzt werden, einem Drucke bessern Widerstand zu leisten und so eine Sprengung abzuhalten. Ferner ist noch auf eine Täuschung aufmerksam zu machen, die leicht bei der Combination einer Einstichsinjection mit einer arteriellen entstehen kann. Eröffnet man nämlich durch den Einstich das Lumen eines Gefässes, so sieht man das mit Carminleim gefüllte Gefäss zu beiden Seiten von einem blauen Streifen eingefasst und wird lebhaft an die von *His* [2]) beschriebenen perivasculären Räume

---

1) *F. Schweigger-Seidel,* »Ueber die Grundsubstanz und die Zellen der Hornhaut des Auges«. Berichte der math.-phys. Classe der k. Sächs. Ges. der Wissenschaften. 12. December 1869. p. 315.

2) »Ueber ein perivasculäres Kanalsystem in den nervösen Centralorganen und über dessen Beziehungen zum Lymphsystem«. Zeitschr. f. wissensch. Zoologie. 1865.

in den nervösen Centralorganen erinnert. Verfolgt man dann das betreffende Gefäss, so kann man bald Stellen finden, wo der Carminleim sich mit der blauen Flüssigkeit vermischt hat, und fast vollständig mit der letzteren gefüllte Gefässe, die von der arteriellen Injection nicht erreicht wurden.

IV. *Subdurale Injection nach Schwalbe und Methode von Genersich.* [1])

Nachdem durch die beschriebene Einstichsmethode das Vorhandensein eines aus zahlreichen mit einander communicirenden Spalten bestehenden Systems sich erwiesen hatte, versuchte man auf dem Wege der *Schwalbe*'schen Injectionsmethode in den Raum zwischen Dura und Arachnoidea dieses System gefüllt zu bekommen. Man erhielt aber dabei nicht das ganze Spaltsystem der Dura injicirt, sondern nur stellenweise die zu innerst gelegenen Lücken; es ist dies bei der grossen Menge der Communicationswege des subduralen Raumes, bei der Leichtigkeit, mit welcher sie betreten werden können, kein auffallendes Ergebniss. Trotz einer sehr grossen Anzahl von Versuchen wurden in keinem Falle die venösen Verzweigungen der Dura injicirt gefunden, wie man nach den Versuchen von *Böhm* und den Angaben von *Key* und *Retzius* hätte erwarten müssen, sondern nur die von *Schwalbe* beschriebenen, mit dem subduralen Raume des Schädels in Verbindung stehenden Bahnen, wie es oben bereits für den des Rückenmarks angegeben ist. Die Annahme von *Key* und *Retzius*, dass die Arachnoidealzotten in ausgedehntester Weise die Function haben, die Communication des subduralen Raumes mit den Gefässen der Dura herzustellen, dürfte grossen Bedenken unterliegen im Hinblick auf die mannigfachen Schwankungen in der Anzahl der Zotten bei den verschiedenen Individuen, obwohl man die Möglichkeit einer solchen Communication in Folge der anatomischen Structur derselben nicht läugnen kann, die ich übereinstimmend mit den Angaben von *Key* und *Retzius* beim Menschen gefunden habe. Bei jungen Thieren sind die Zotten selten, und meine Versuche, die an solchen angestellt wurden, hatten nie eine Injection von Gefässen der Dura aufzuweisen. Wie sich dies beim Menschen

1) Arbeiten aus der physiol. Anstalt zu Leipzig. 1870. p. 53.

bei den subduralen Injectionen verhält, habe ich aus Mangel an frischem Material nicht eruiren können.

Es scheint, dass überhaupt der Injectionsflüssigkeit auf ihrem Wege durch die Dura von innen nach aussen grössere Widerstände entgegenstehen, wie von aussen nach innen, worauf die Leichtigkeit des Durch- und Austritts bei der Injection zwischen Dura und Knochen und die geringe Füllung der nur in der innersten Schichte der Dura gelegenen Spalten bei der subduralen hinweist. Dafür sprechen auch die Versuche, die nach der Methode angestellt wurden, welcher *Genersich* zur Darstellung der Lymphgefässe der Sehnen sich bedient hat. Nach 3 bis 4 Stunden war die betreffende Flüssigkeit (Alkannin) von den Spalträumen der Dura aufgenommen, und es fand sich unter sonst gleichen Bedingungen, dass von der Innenfläche aus nur die zu innerst gelegenen Lücken gefüllt wurden, während von der Aussenfläche aus fast das ganze Spaltsystem der Dura injicirt wurde. Füllungen von Lymphgefässen wurden nie beobachtet. Die geringste Läsion des Gewebes i. e. die Eröffnung des Lumens eines Gefässes führt dagegen zur ausschliesslichen Injection von Blutgefässen, wie es in einem Versuche geschehen ist.

V. *Schlussergebniss.*

1. Der Raum zwischen Dura und Arachnoidea, der sog. subdurale Raum, communicirt nicht mit Gefässen der Dura, speciell nicht mit dem Blutgefässnetz an der Innenfläche.

2. Ein durch die ganze Dicke der Dura aus mit einander communicirenden Spalten bestehendes System steht dagegen mit benanntem Raume in Verbindung, sowie mit einer Anzahl grösserer und kleinerer Räume zwischen Dura und Knochen, die man der Kürze wegen als epidurale Räume bezeichnen könnte. Sowohl an der Aussen- als an der Innenfläche der Dura existirt ein Endothelhäutchen, das im ersten Falle die innere Begrenzung der epiduralen Räume, im zweiten die äussere des subduralen Raumes bildet; die Spalten selbst sind mit Endothel ausgekleidet.

Diese Thatsachen, sowie die Communication des Spaltsystems mit benannten Räumen, von welchen die lymphatische Natur des einen, nämlich des subduralen Raumes, feststeht, dürfte es rechtfertigen, sich dahin zu äussern, dass dieses System

zum Durchtritt von Lymphe benutzt wird. Dass dieser leichter von aussen nach innen als von innen nach aussen stattfindet, [1]) darauf möchte wohl auch die klinische Beobachtung häufig eintretender meningealer Affectionen nach Kopfverletzungen aufmerksam machen, und zwar wahrscheinlich durch die auf diesen Wegen stattfindende Resorption eiterig-putrider Stoffe.

Erklärung der Figuren (1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.).

Fig. 1. Arterielle Injection (Carminleim). Hundedura von der Convexität. Hartnack Ocular 2. Objectiv 4.

Der bessern Uebersicht wegen wurden drei Farben gewählt:

blau = Venen,

roth = Arterien,

schwarz = Intermediäres Capillarsystem.

aaaaaa Verbindungen von arteriellen Capillaren mit dem Capillarnetz an der Innenfläche,

bbbbb Verbindungen von arteriellen Capillaren mit Venen,

cccccccc Verbindungen von Aesten des Capillarnetzes der Innenfläche mit Venen.

Fig. 2. Flächenschnitt der Innenfläche nach Injection von Berl. Blau zwischen Dura und Knochen. Färbung des Schnittes mit Carmin. Menschliche Dura. Hartnack 2 und 8.

Roth = mit Carmin gefärbte Kerne,

Blau = mit Berl. Blau gefüllte Spalten.

a Gefäss des intermediären Capillarnetzes,

b diffus gefärbtes Fibrillenbündel,

c partiell gefüllte Spalten, in denen der mit Carmin gefärbte Kern noch sichtbar,

d vollständig gefüllte Spalten.

Fig. 3. Schnitt durch die ganze Dicke der Hundedura in paralleler Richtung mit den Bündeln des innern, und in senkrechter auf die des äussern Blattes.

1) Im Einklange mit dieser Erscheinung steht die von *H. Quincke*, »Zur Physiologie der Cerebrospinalflüssigkeit«, *Reichert's* und *Du Bois-Reymond's* Archiv 1872, Heft 2. Seite 164 gemachte Beobachtung, dass der Flüssigkeitsstrom im Leben vorwiegend vom Arachnoidealraum nach den Subarachnoidealräumen gerichtet sein muss.

Roth = Blutbahnen,
Blau = Lymphbahnen.
aa durch das Schädeldach hindurchtretende Venen
Schematische Zeichnung.

Fig. 4. Flächenschnitt der Innenfläche nach Injection von Alkannin zwischen Dura und Knochen. Schafdura. Hartnack 2 und 4.
Roth = mit Alkannin gefüllte Spalten,
Gefässe der Innenfläche der Dura sind durch einen dunkleren Ton bezeichnet.

Fig. 5. Zerzupfungspräparat.
Zellplatte im Zusammenhang mit einem Bindegewebsfibrillenbündel.
Menschliche Dura. 72stündige Maceration in 3 % Kal. bichromic.-Lösung. Hartnack 2 und 8.

Fig. 6 und 7. Herstellung des Präparates wie bei Fig. 5.
Fig. 6. Zellplatten von einem Fibrillenbündel losgelöst.
Fig. 7. Vollständig isolirte Zellplatte (Endothelmembran).

L. Gerlach, *Ueber die Bestimmung der Minerale des Blutserums durch directe Fällung.* — Aus dem physiolog. Institute zu Leipzig. Vorgelegt von d. wirkl. Mitgliede *C. Ludwig.*

Nach der Mittheilung die Dr. *Pribram* voriges Jahr in diesen Berichten gegeben hat ist es thunlich aus dem frischen Blutserum allen Kalk und einen Theil der Phosphorsäure auszufällen, welche man bis dahin nur aus der Asche des Serums für gewinnbar hielt. Die Magnesia, obwohl sie zu den constant vorkommenden mineralischen Stoffen des Blutes gehört, wurde dagegen mit Stillschweigen übergangen, sodass es zweifelhaft blieb ob sie in dem Serum des Hundeblutes nicht vorhanden oder dort nur übersehen war.

Dieses Bedenken veranlasste mich die Versuche über die Fällbarkeit der Erden mit besonderer Rücksicht auf die Magnesia zu wiederholen. Als ich zu diesem Ende reines Blutserum des Hundes mit einem starken Ueberschuss von Ammoniak versetzte fiel in der That ein Niederschlag zu Boden der aus phosphorsaurer Ammoniak-Magnesia bestand. — Demgemäss war zu erwarten, dass auch in dem Niederschlage, welcher durch den Zusatz von reinem und oxalsaurem Ammoniak erhalten wird Phosphorsäure vorkommen werde. Als ich nach der Vorschrift von *Pribram* verfuhr erhielt ich durch die ebengenannten Fällungsmittel aus dem frischen Serum 0,0163 p. c. eines Niederschlags. Das prozentische Gewicht desselben stimmt im Ganzen gut mit den von *Pribram* gefundenen Werthen, welche sich in sieben seiner Versuche zwischen 0,0150 und 0,0216 bewegen. Als ich aber meinen Niederschlag qualitativ prüfte, fand sich derselbe auch mit einem Gehalt an Phosphorsäure behaftet. — Somit erwies sich der von *Pribram* zur Bestimmung des Kalkes vorgezeichnete Weg nicht mehr als anwendbar. Da die herannahenden Ferien mir die Fortsetzung der Versuche leider unmöglich machten, so ersuchte ich Herrn Dr. *E. Drechsel* um eine

Weiterführung derselben. Auf meine Bitte habe ich von ihm nachstehende Antwort erhalten.

»Behufs Entscheidung der Frage, ob Kalk und Magnesia durch die üblichen Fällungsmittel direct aus Serum, ohne vorgängige Veraschung desselben, abgeschieden werden können, wurden folgende Versuche mit frischem Hundeblutserum angestellt.

1) 100 CC. Serum wurden mit 1,0 CC. gewöhnlicher Essigsäure und 9,0 CC. einer Lösung von oxalsaurem Ammoniak versetzt, und darauf mehrere Stunden auf die Centrifuge gebracht. Der gebildete Niederschlag wurde abfiltrirt, ausgewaschen, mit etwas verdünnter Kalilauge ausgezogen und vollständig mit H_2O ausgewaschen. Nach dem Glühen über dem Gasgebläse und Abzug der Asche wurden so erhalten: 0,0140 grmm. CaO.

Das Filtrat (mit welchem, um zu grosse Verdünnung zu vermeiden, nur die beiden ersten Waschwässer vereinigt waren) wurde mit 10,0 CC. einer Lösung von phosphorsaurem Natron und 60,0 CC. starker Ammoniakflüssigkeit versetzt, und 48 Stunden kalt stehen gelassen, da der nun entstehende Niederschlag auch ohne Hilfe der Centrifuge ausfällt. Hierauf wurde abfiltrirt, mit ammoniakalischem Wasser gewaschen, und nach dem Glühen die pyrophosphorsaure Magnesia gewogen. Erhalten wurden so: 0,0070 grmm. $Mg_2 P_2 O_7$ = 0,0025 grmm. MgO.

Das Filtrat von dem Magnesianiederschlage wurde eingedampft und der Rückstand verascht; in der Asche konnten nur unwägbare Spuren Kalk und Magnesia nachgewiesen werden. Noch ist zu bemerken, dass der Niederschlag, den oxalsaures Ammoniak in der essigsauren Lösung hervorgebracht hatte, eine Spur Magnesia, aber keine $P_2 O_5$ enthielt.

2) 100 CC. desselben Serums auf genau dieselbe Weise behandelt ergaben: 0,0145 grmm. CaO und

0,0075 grmm. $Mg_2 P_2 O_7$ = 0,0027 grmm. MgO.

3) 50 CC. desselben Serums wurden mit 4,5 CC. oxalsaurem Ammoniak und 5,5 CC. starker Ammoniakflüssigkeit versetzt, der Niederschlag nach 24 Stunden abfiltrirt, ausgewaschen und geglüht. In demselben liess sich mit Leichtigkeit sowohl Magnesia als auch Phosphorsäure nachweisen und zwar beide in ziemlicher Menge.

Es folgt hieraus, dass man allerdings sowohl Kalk als auch Magnesia direct aus Serum ausfällen kann, jedoch muss man, um brauchbare Resultate zu erhalten, den Kalk aus essigsaurer

Lösung fällen, um so einer Verunreinigung des Niederschlags durch Magnesia-Ammoniakphosphat vorzubeugen.«

Bei Gelegenheit meiner Versuche über die der Erden habe ich auch einige andere über die Phosphorsäure des Blutserums unternommen. Durch sie fanden sich die Angaben von *Sertoli*[1]) und von *Pribram* bestätigt. Aus dem frischen Serum des Hundebluts liessen sich 0,0149 p. c. Phosphorsäure ausfällen; als darauf das Serum, welches diese Phosphorsäure gegeben hatte getrocknet und verascht wurde, erhielt ich noch weitere 0,0338 p. c. Phosphorsäure. Diese Zahlen stimmen mit denjenigen, welche *Pribram* gefunden hat. — Um die Angabe von *Sertoli* zu prüfen ob der Antheil der Phosphorsäure, welcher durch Magnesia und Ammoniak nicht fällbar ist, einem Lecithingehalt des Serums angehöre, verdampfte ich vollkommen reines Serum aus Hundeblut zur Trockne, pulverisirte den Rest und zog ihn in einem Wasserbad zwischen 20 und 30° C. mit absolutem Alkohol aus. Das alkoholische Extract wurde eingedampft und abermals mit absolutem Alkohol behandelt, wobei ein kleiner Rückstand ungelöst blieb, der vorzugsweise aus Kochsalz, mit Spuren von schwefelsaurem Natron vermischt, bestand. — Die alkoholische Flüssigkeit blieb einige Tage in der Kälte sich selbst überlassen um die Ausscheidung des Cholestearins herbeizuführen. Nachdem diese vollendet, wurde die Flüssigkeit filtrirt und mit salzsäurehaltigem Platinchlorid behandelt. Der entstandene Niederschlag wurde abfiltrirt und in Aether gelöst. Als nun durch Schwefelwasserstoff das Platin entfernt und abfiltrirt war, schied sich nach dem Verdunsten der Flüssigkeit bei mässiger Wärme das Lecithin aus. — Als ich auf dieselbe Weise mit Serum verfuhr, aus dem durch die gewöhnlichen Mittel die direct fällbare Phosphorsäure entfernt war, erhielt ich ebenfalls Lecithin.

---

1) *Hoppe-Seyler* medizinisch-chemische Untersuchungen 1868 p. 350.

C. **Bruhns**, *Mittheilung über die Ermittelung der Coordinaten der Pleissenburg und verschiedener Thürme in Bezug auf die Leipziger Sternwarte, und über die Construction eines Basisapparates.*

Nachdem im Jahre 1861 die neue Sternwarte im Bau vollendet war, bestimmte ich mit einem kleinen 6 zöll. *Repsold*'schen Universal-Instrument, indem ich auf zwei einander entgegengesetzten Punkten auf der Gallerie der Pleissenburg mass, die Entfernung der Sternwarte von der Pleissenburg. Die Basis selbst, sehr nahe gleich dem Durchmesser des Thurmes der Pleissenburg, wurde mit 2 hölzernen Doppelmetern, welche Herr Geh. Rath *Hankel* mir aus dem physikalischen Cabinet lieh, gemessen und zu 16.0388 Meter gefunden. Die beiden Winkel an den Endpunkten der Basis waren 75° 18′ 32″ und 103° 57′ 15″. Damit wurde die Entfernung der Windfahne auf der Kuppel der Sternwarte von den Endpunkten der Basis und von der Mitte der Pleissenburg nach der Sternwarte zu nahe 1200 Meter berechnet.

Zugleich bestimmte ich das Azimuth der Richtung von der Pleissenburg nach der Sternwarte, welches auf die Mitte reducirt 74° 3′ 21″.9 betrug und leitete mit dessen Hilfe ab, dass die neue Sternwarte von dem Mittelpunkte der Pleissenburg

60″.0 östlicher

und

10″.7 südlicher

liegt.

Da die Basis eine sehr kleine war, das Instrument ziemlich unvollkommen, da die Trommeln der Mikroskope nur ganze Secunden abschätzen liessen, es ausserdem nur auf Holzstativen hatte gestellt werden können, hielt ich es, nachdem die Sternwarte als der Ausgangspunkt für die Sächsische Gradmessung und als ein Hauptpunkt in der Europäischen Gradmessung angenommen worden, für nöthig, mit vollkommenern Instrumenten und vermöge einer grössern Basis die Entfernung neu zu ermitteln.

Dazu fand sich jedoch erst in diesem Jahre Gelegenheit, denn ein eigener Basisapparat fehlte mir und da in diesem Jahre die Basis zur Sächsischen Gradmessung bei Grossenhain gemessen wurde, hatte ich dazu von der Kgl. Preussischen Landestriangulation durch die gütige Vermittelung ihres Chefs, des Herrn General v. Morozowicz den *Bessel'*schen Basisapparat geliehen, transportirte ihn im Mai d. J. von Berlin hierher und im October wieder zurück. — Beiläufig sei hier nur erwähnt, dass mit diesem Apparat gegenwärtig 10 Grundlinien gemessen sind, wovon 5 in Preussen, 2 in Belgien, 1 in Schweden, 1 in Dänemark, 1 in Sachsen liegen.

Das Princip dieses Apparats besteht darin, dass vier je 2 Toisen lange Eisenstangen in Holzkästen wohl verwahrt auf Holzböcke gesetzt werden, doch so, dass die Stangen nicht aneinander stossen, sondern die Zwischenräume mit Glaskeilen gemessen werden. Zu dem Zwecke sind die Enden des Apparates mit Stahlschneiden und zwar das eine Ende mit einer horizontalen Schneide, das andere Ende mit einer vertikalen Schneide versehen, zwischen welche der Glaskeil gesteckt wird. Die Glaskeile sind so getheilt, dass man auf ihnen Hundertstel Linien direct ablesen und Tausendstel schätzen kann. Die Neigung der Stangen gegen den Horizont wird an Niveaus, welche auf den Messstangen befestigt sind, abgelesen und die Temperatur mit Metallthermometern dadurch bestimmt, dass der Zwischenraum, den ein an einem Ende auf der eisernen Messstange befestigter Zinkstab gegen eine befestigte Stahlschneide am andern Ende übrig lässt, gemessen wurde.

Die Beschreibung des *Bessel'*schen Apparats ist in der von *Bessel* und *Baeyer* herausgegebenen »Gradmessung in Ostpreussen«, ferner in der »Triangulation du Royaume de Belgique« und a. a. O. gegeben; hier mag nur noch erwähnt werden, dass ich an den Böcken, welche die Messstangen tragen, verschiedene Vorrichtungen zur bequemeren Bewegung der Messstangen anbringen liess, die ich in einem besondern Werke über die Messung der Sächsischen Basis bei Grossenhain näher beschreiben werde.

In den 11 Jahren, seit welchen ich die neue Sternwarte bewohne, ist nicht nur in deren Umgebung, sondern auch auf dem Wege zwischen ihr und der Pleissenburg soviel gebaut, dass die Hauptgallerie der Pleissenburg von keinem der Pfeiler auf

der Sternwarte mehr sichtbar ist und nur von dem südöstlichen Pfeiler auf der Gallerie der Pleissenburg, welcher nebst einem andern Pfeiler für die Europäische Gradmessung gesetzt worden sind, ist es möglich, die Windfahne auf der Kuppel der Sternwarte zu sehen. Um nun die Entfernung zwischen Pleissenburg und Sternwarte bestimmen zu können, bedurfte es eines Terrains, von welchem man beide Punkte gut sehen kann und fand sich dafür kein anderes leicht zugängliches als der Weg am Napoleonstein, unter welchem die städtischen Wasserleitungsröhren in der Richtung nach der Pleisse angelegt sind, welcher selbst noch, was die Winkelmessungen anbetrifft, Manches zu wünschen übrig lässt. Bei der Vergrösserung der Stadt wird es vielleicht bald gar kein Terrain mehr geben, von wo aus man die Sternwarte und die Pleissenburg zugleich sehen kann und desshalb eilte nicht nur die Herstellung der Verbindung, sondern man musste zur Erreichung derselben schon wünschenswerthe Vortheile in den Winkelmessungen aufgeben.

Oestlich ausserhalb der Stadt beim Napoleonstein und zwar von einem Punkte nur circa 12 Meter nordwestlich von dem Wärterhäuschen bis zu einer Entfernung von 300 Toisen längs des genannten Wasserleitungsweges fand ich für eine Basis von wenig über 288 Toisen Länge ein passendes, festes und ziemlich ebenes Terrain, das gegen Westen hin um nahe 2 Grad geneigt ist, und das, da man auch die Kirchthürme der Stadt sieht, als gut geeignet betrachtet werden konnte. Ich liess, um die Endpunkte der Basis zu versichern, zwei einen Meter lange eiserne Nägel anfertigen, die so tief in die Erde eingeschlagen wurden, dass ihre Köpfe noch 0,1 Meter unter der Oberfläche liegen und sie daher nicht so leicht herausgeholt werden können. Dieselben sind mit einem $^1/_4$ Millimeter Durchmesser haltenden Loche als Marke versehen und stecken noch in der Erde und sollen auch zu einer eventuellen Nachmessung der Basis darin bleiben. Sie sind desshalb auch durch steinerne Pfeiler, die darüber aufgemauert sind, geschützt.

Die Pfeiler selbst bestehen aus Backsteinen und sind mit Cement gemauert, sowie oben mit je einer Deckplatte von Sandstein versehen. Der Mittelpunkt auf diesen Deckplatten ist einfach durch ein eingerissenes Kreuz markirt und von diesen Kreuzen, welche genau über den Löchern in den Nägeln sich befanden, ging nicht nur der Anfang der Basismessung aus, sondern selbige dienten

auch zum Aufstellen der Instrumente zu den Richtungsmessungen.

Obwohl ich für die definitiven Resultate der Coordinaten der Pleissenburg und der Thürme in Bezug auf die Sternwarte noch einige Winkelmessungen auszuführen gedenke, werden doch die schon erhaltenen Resultate so nahe richtig sein, dass, wie man aus den nachfolgenden Beobachtungen und Rechnungen ersieht, im Wesentlichen nicht geändert werden wird.

Vorher möchte ich aber auf einige Uebelstände, welche der *Bessel*'sche Basisapparat hat, aufmerksam machen und die Construction eines neuen Apparats angeben, der gegenwärtig im Modell in Ausführung begriffen ist. Die *Bessel*'schen Messstangen sind in starken Holzkästen eingeschlossen, die auf 0.6 Meter hohen Böcken ruhen, die wiederum auf weichem Erdreich auf Holzplatten, auf festem Erdreich unmittelbar auf dem Boden aufgesetzt werden. Obwohl nun durch das Gewicht der Stangen und Holzkästen, durch gelinden Luftzug und schwachen Wind keine Verrückung der Stangen sich kundgab, hat sich doch gezeigt, dass bei stärkerem Winde die Messstangen nicht so fest liegen wie ich erwartet hatte und dass ferner durch das Einschieben der Keile die Messstangen um eine nicht zu vernachlässigende Grösse auseinander gerückt werden. *Bessel* sagt freilich in seiner Gradmessung, dass auf den Böcken die Messstangen genügend festgelegen haben, aber weder *Bessel* noch diejenigen Geodäten, welche den Basisapparat benutzten, scheinen untersucht zu haben, um wieviel durch das Einschieben der unter einem sehr spitzen Winkel angefertigten Glaskeile die Stangen, da man beim Einschieben doch eine gewisse Kraft anwenden muss, um die Ueberzeugung zu haben, dass zwischen der Glasfläche und den Stahlschneiden eine wirkliche Berührung stattfindet, auseinandergerückt werden. Das Einschieben der Glaskeile wird ferner von verschiedenen Beobachtern mit verschiedener, wenn auch für jeden Einzelnen mit ziemlich constanter Kraftanwendung ausgeführt und die darüber im Garten der Sternwarte angestellten Beobachtungen haben ergeben, dass zwischen den Herren Professor *Nagel* und Dr. *Helmert*, welche die Glaskeile bei der Messung der Sächsischen Basis bei Grossenhain eingeschoben haben, ebenso zwischen den Herren Dr. *Albrecht* und Dr. *Börgen*, welche dasselbe Geschäft bei der Messung am Napoleonstein hatten, eine constante Differenz von 0.002 Par. Linien stattfindet

und dass durch das Einschieben der Glaskeile das Intervall zwischen 0.004 und 0.008 Par. Linien vergrössert wird. Wenn nun diese Grösse im Mittel auch nur $\frac{1}{300000}$ der ganzen Basislänge beträgt, so ist dieser Fehler doch als ein constanter anzusehen, der die zufälligen Fehler, die bei der Grossenhainer Basis aus der doppelten Messung kleiner als $\frac{1}{1000000}$ ist, nicht unwesentlich übertrifft, und die Anforderung, welche daher die Jetztzeit an einen neuen Basisapparat stellt, ist besonders die Vermeidung des mechanischen Contacts, sowie die festere Aufstellung der Messstangen.

Ich bin daher auf den Gedanken gekommen, die zu messenden Grössen nicht von den oberhalb der Erde und auf Böcken ruhenden Messstangen abhängig sein zu lassen, sondern unmittelbar auf den Erdboden Fixpunkte zu legen, ich möchte daher in den Erdboden in Intervallen von 2 zu 2 oder von 4 zu 4 Meter resp. in noch grössern Intervallen je nach der Länge des Messapparats eiserne Nägel einschlagen, die an der Oberfläche mit einem Punkte oder einem Kreuze versehen sind. Das Intervall dieser Punkte wird von zwei Beobachtern womöglich gleichzeitig mit einem Messapparat, der an seinen Enden Mikroskope trägt gemessen und unmittelbar auf eine unter dem Messapparat befindliche Messstange übertragen. Es versteht sich von selbst, dass die Mikroskope einander genau parallel gestellt werden können, ferner senkrecht zu dem Messapparat zu stehen haben, dass sie mit Mikrometerschrauben, um kleine Differenzen in der Entfernung der eisernen Fixpunkte messen zu können, versehen sein müssen. Ebenso trägt der Messapparat Niveaus zur Bestimmung der Neigung und eine Vorrichtung um ihn genau in die Linie der Basis bringen zu können. Ausserdem befindet sich der Messapparat mit der Messstange auf einem leicht transportablen Wagen, der durch eine obere und seitliche Bedachung sowohl gegen die Sonnenstrahlen, als auch gegen Wind geschützt ist. Die vorläufigen Versuche mit diesem Apparat haben ein äusserst genaues Resultat gegeben und behalte ich mir vor, eine genaue Zeichnung, sowie die erhaltenen Resultate und ihre Uebereinstimmung unter einander und mit den, welche durch den *Bessel*'schen Apparat erhalten wurden, später zu geben.

Kehren wir zu der Basismessung am Napoleonstein zurück, so stehen die beiden Pfeiler (der östliche ist 18.0 Meter nördlich und 6.2 Meter östlich von der Mitte des Napoleonsteins) soweit

auseinander, dass die vier Messstangen 36mal hinter einander aufgestellt werden konnten. Zu Anfang und zu Ende wurde ein Massstab auf die Mitte des Pfeilers gelegt und mit einem kleinen Universal-Instrumente, welches senkrecht zur Richtung der Basis gestellt war, von dem Endpunkt der Messstange auf den Massstab heraufgelothet der Art, dass zwei Centimeterstriche des Massstabes und der Endpunkt der Messstange eingestellt wurden. Ist der Winkel zwischen den beiden Centimeterstrichen $= a$, der Winkel zwischen dem dem Mittelpunkt des Pfeilers zunächst liegenden Centimeterstrich und dem Ende der Stange $= b$, so entspricht bei den kleinen Winkeln das Ende der Messstange ausser den ganzen Centimetern noch $\frac{b}{a}$ Centimeter. Auf diese Weise wurde gefunden bei Anfang der Messung vom Mittelpunkt des Ostpfeilers bis zum Anfang der ersten Messstange:

0.341002 Meter bei 0° Temperatur = 151.165 Linien,

am Ende der Messung vom Endpunkt der letzten Stange bis zum Mittelpunkt des Westpfeilers:

0.377844 Meter bei 0° Temperatur = 167.497 Linien.

Die Rückmessung geschah in umgekehrter Richtung also vom Westpfeiler nach dem Ostpfeiler und es fand sich vom Mittelpunkt des Westpfeilers bis zum Anfang der ersten Messstange:

0.287333 Meter bei 0° Temperatur = 127.374 Linien,

am Ende von der letzten Messstange bis zum Mittelpunkt des Ostpfeilers:

0.350169 Meter bei 0° Temperatur = 155.2285 Linien.

Wegen der vorgerückten Jahreszeit konnten die 36 Lagen nicht in einem Tage gemessen werden. Es wurden am 10. October die Lagen 1 bis 24, am 11. October die Lagen 25 bis 36 und von der Rückmessung die Lagen 1 bis 12, sowie am 14. October die Lagen 13 bis 36 gemessen.

Der Endpunkt der Tagesarbeit wurde durch einen einen halben Meter in den Erdboden eingeschlagenen eisernen Nagel, auf welchem ein Mikrometer mit einer Spitze befestigt war, niedergelegt, jedoch geschah die Ablothung wiederum durch Winkelmessung mit dem Universal-Instrument. Der Nagel blieb während der ganzen Zeit der Messung fest im Erdboden stecken und durch denselben ist noch eine Controlle für die Hin- und Rückmessung gegeben.

Bei der ersten Messung fand sich das Intervall zwischen Messstab und Nagel

$$+ 0.013867 \text{ Meter} = + 6.147 \text{ Linien},$$

zwischen Nagel und Messstab

$$- 0.014119 \text{ Meter} = - 6.259 \text{ Linien}.$$

Bei der Rückmessung wurde gefunden das Intervall zwischen Messstange und Nagel

$$+ 0.058687 \text{ Meter} = + 26.016 \text{ Linien};$$

zwischen Nagel und Messstange

$$0.00000 \text{ Meter} = 0.000 \text{ Linien}.$$

Die letzte von der vorletzten so abweichende Zahl rührt von einer Verrückung der Stange her.

Die vier Messstangen sind nicht von gleicher Länge, sie wurden sowohl vor der Messung als nach derselben unter einander verglichen und Ende October ihre Ausdehnung und die absolute Länge der Messstange I durch Vergleichung mit einer Doppeltoise in Berlin ermittelt. Die Details dieser Vergleichungen sollen in der Publikation über die Basismessung bei Grossenhain gegeben werden, hier wird es genügen, wenn ich anführe, dass die Längen der Messstangen, nach der *Bessel*'schen Bezeichnung, betragen:

$$\begin{aligned} \text{Messstange } l_1 &= 1728.^L7968 - 0.52037a \\ \text{,, } \quad l_2 &= 1729.\ 4821 - 0.53590b \\ \text{,, } \quad l_3 &= 1729.\ 0182 - 0.55273c \\ \text{,, } \quad l_4 &= 1729.\ 0837 - 0.56034d, \end{aligned}$$

wo a, b, c, d die mit den Glaskeilen gemessenen Intervalle der Metallthermometer bedeuten.

Die mittlere Länge einer Messstange ist daher bei $a, b, c, d = 0$

$$L = 1729.^L0952$$

und die Correctionen für die einzelnen Messstangen sind, wenn man sie mit x_1, x_2, x_3, x_4 bezeichnet:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\ 0.^L2984 \\ x_2 &= +\ 0.\ 3869 \\ x_3 &= -\ 0.\ 0770 \\ x_4 &= -\ 0.\ 0115, \end{aligned}$$

doch kommen selbige, da zwischen den Fixpunkten ganze Lagen liegen, nicht weiter in Betracht.

Die Intervalle zwischen den Messstangen sind direkt mit einem Glaskeil gemessen und sämmtlich addirt.

Die Neigung der Messstangen gegen die Horizontale ist mit Niveaus ermittelt und nennt man S den Stand der Niveauschraube bei horizontaler Lage, s die jedesmalige Ablesung, q die ermittelte Höhe einer Schraubenumdrehung, so ist nach der »Gradmessung in Ostpreussen« von *Bessel* und *Baeyer* S. 35

$$\text{die Reduction} = -\frac{l+n}{l}\cdot\frac{(s-S)^2}{2\,l}\cdot q^2$$

$$\text{und die Erhöhung} = -\frac{l+n}{l}\cdot(s-S)\,q$$

wobei n das Intervall bezeichnet. Für die vier Messstangen hat sich gefunden aus Beobachtungen am 9. und 15. October 1872:

Niveau	I.	II.	III.	IV.
S =	11.^{p}912	11.^{p}938	10.^{p}653	11.^{p}765
	11. 949	12. 038	10. 657	11. 658
S im Mittel =	11. 93	11. 99	10. 65	11. 71

Die Grösse q wurde ermittelt durch eine Reihe von Beobachtungen 1872 Juli 27, August 1, 2, 24, 27, September 4 und 5 und es hat sich gefunden in Pariser Linien

für Niveau	I.	II.	III.	IV.
q =	7.^{L}7590	7.^{L}5875	7.^{L}7605	7.^{L}9272

Im Mittel findet sich zur Berechnung der Reduction für die vier Messstangen

$$l+n = 1729.^L53$$
$$1730.\ 14$$
$$1729.\ 69$$
$$1729.\ 74$$
$$l = 1727.^L95$$
$$1728.\ 55$$
$$1728.\ 10$$
$$1728.\ 12$$

und damit ist

$$\text{log. neg. Reduction} = 8.24146 + 2\log(s_1-S_1)$$
$$8.22189 + 2\log(s_2-S_2)$$
$$8.24158 + 2\log(s_3-S_3)$$
$$8.26005 + 2\log(s_4-S_4)$$
$$\text{log. neg. Erhöhung} = 0.89021 + \log(s_1-S_1)$$
$$0.88050 + \log(s_2-S_2)$$
$$0.89029 + \log(s_3-S_3)$$
$$0.89953 + \log(s_4-S_4)$$

Die Zusammenstellung der Resultate ergibt danach:

Erste Messung.

	Pfeiler Ost bis Nagel	Nagel bis Pfeiler West
	24 Lagen	12 Lagen
Massstab zu Anfang	+ 151.^{L}165	— 6.^{L}259
Reduction . . .	— 45. 333 — 45.316	— 18. 834 — 18.841
Metallthermometer	— 86. 787 — 86.789	— 44. 829 — 44.844
Zwischenräume .	+ 149. 740 + 149.940	+ 79. 716 + 79.866
Massstab zu Ende .	+ 6. 147	+ 167. 497
Summe	24 Lagen + 174.^{L}932 24 ,, + 175. 147	12 Lagen + 177.^{L}291 12 ,, + 177. 419

Zweite Messung.

	Pfeiler West bis Nagel	Nagel bis Pfeiler Ost
	12 Lagen	24 Lagen
Massstab zu Anfang	+ 127.^{L}374	— 0,000
Reduction . . .	— 19. 199 — 19.178	— 46,036 — 45.997
Metallthermometer	— 39. 282 — 39.309	— 93,016 — 93.044
Zwischenräume .	+ 82. 584 + 82.701	+ 158,809 + 158.993
Massstab zu Ende .	+ 26. 016	+ 155.228
Summe	12 Lagen + 177.493 12 ,, + 177.604	24 Lagen + 174.985 24 ,, + 175.480

Es hat also nach der ersten Messung:

Beobachter *Albrecht* 36 Lagen + 352.223 Linien = 288 Toisen 509.93 Lin.
,, *Börgen* 36 ,, + 352.566 ,, = 288 ,, 510.27 ,,

nach der zweiten Messung:

Beobachter *Albrecht* 36 Lagen + 352.478 Linien = 288 Toisen 510.19 Lin.
,, *Börgen* 36 ,, + 352.784 ,, = 288 ,, 510.49 ,,

Die Uebereinstimmung der beiden Ablesungen ist eine vollständig genügende; sie wird aber noch besser, wenn man berücksichtigt, dass die Einschiebung der Glaskeile von den beiden Beobachtern nicht mit gleicher Kraft erfolgte, sondern Herr Dr. *Börgen* etwas stärker einschob. Aus mehrfachen Versuchen hat sich ergeben, dass durch das Einschieben der Glaskeile die Messstangen etwas zurückwichen und zwar jede Messstange

bei Dr. *Albrecht* für jedesmaliges Einschieben 0.^{L}004
,, Dr. *Börgen* ,, ,, ,, 0. 006,

sodass, wenn man diese Grössen berücksichtigt, noch von der Länge der Basis für 142maliges Einschieben der Keile abzuziehen ist:

für Dr. *Albrecht* 0.^{L}568
,, Dr. *Börgen* 0. 852

Es ist daher das Resultat der doppelten Basismessung:
Länge der Basis = 288 Toisen 5 09.51 Linien = 562,4718 Met.

Der mittlere Fehler der einmaligen Messung der Basis wird:

aus *Albrecht's* Ablesungen $\sqrt{\frac{144}{4}\left(\frac{(0.053)^2}{96}+\frac{(0.202)^2}{48}\right)} = \pm 0.^L178$

aus *Börgen's* Ablesungen $\sqrt{\frac{144}{4}\left(\frac{(0.033)^2}{96}+\frac{(0.185)^2}{48}\right)} = \pm 0.^L161$

also der des vereinigten Resultats der zweimaligen Messung

$$\pm\, 0.085 \text{ Linien} = \pm\frac{1}{2900000}$$

der Länge.

Die Höhendifferenz findet sich aus der Basis 11.274 Meter,
durch zweimaliges direktes Nivellement 11.374 „

also auch eine genügende Uebereinstimmung, da das Nivellement, weil es bis an die Pfeiler geht und an dem untern eine Vertiefung von etwa 0,1 Meter vorhanden ist, um so viel grösser sein muss.

Die Winkelmessungen.

Die Winkelmessungen wurden von Herrn Dr. *Albrecht* ausgeführt auf dem Ostpfeiler am 15. October und am 7. November, auf dem Westpfeiler am 2. und 4. November und der Horizontalkreis jedesmal um 60° gedreht.

Die Einstellungsobjekte waren auf dem Ostpfeiler: der Westpfeiler, der südöstliche Gradmessungspfeiler auf der Gallerie der Pleissenburg, die Windfahne der grossen Kuppel der neuen Sternwarte und ein Pfeiler auf der Plateform der kleinen Kuppel; auf dem Westpfeiler wurde eingestellt: der südöstliche Gradmessungspfeiler auf der Gallerie der Pleissenburg, die Windfahne auf der grossen Kuppel der Sternwarte, der Pfeiler auf der Plateform der kleinen Kuppel und der Ostpfeiler. Die gemessenen Richtungen, welche schon durch Anbringung der Runcorrection verbessert, sind die umstehenden:

Beobachtungen auf dem Ostpfeiler.

1872 October 15 und November 7.

Stand.	Lage.	Westpfeiler.	Pleissenburg.	Sternwarte. Windfahne.	Sternwarte. Pfeiler.
I.	*F. l.*	0° 0′ 0″	39° 30′ 50″,91	53° 11′ 38″,03	53° 21′ 37″,38
	r.	0	32 58,30	13 37,25	23 38,03
	r.	0	33 1,95	38,83	38,78
	l.	0	30 51,34	11 37,87	21 35,37
II.	*l.*	60 0 0	99 30 51,38	113 11 37,43	113 21 37,53
	r.	0	33 3,97	13 40,35	23 40,08
	r.	0	3,43	42,13	39,55
	l.	0	30 52,06	11 38,76	21 37,32
III.	*l.*	120 0 0	159 30 49,77	173 11 34,72	173 21 33,99
	r.	0	33 1,25	13 34,38 } 35,07 }	23 34,58
	r.	0	1,64	37,55	37,43
	l.	0	30 49,69	11 35,08	21 36,12 } 33,67 }

Art der Signalisirung. Auf dem Westpfeiler ein Signalbrett, genau centrisch. Auf der Pleissenburg ebenfalls ein Signalbrett, genau centrisch auf dem südöstlichen Triangulationspfeiler. Auf der Sternwarte die Windfahne der grossen Kuppel, centrisch über dem Hauptpfeiler. Auf dem südwestlichen Pfeiler der Plateform der kleinen Kuppel der Sternwarte ebenfalls ein Signalbrett genau centrisch aufgestellt.

Resultate:

Basisendpunkt Ost.

Basisendpunkt West	=	0°	0′	0,″00
{ Pleissenburg	=	39	31	56, 29
{ Sternwarte Wetterfahne	=	53	12	37, 73
{ ,, Pfeiler	=	53	22	37, 08

Beobachtungen auf dem Westpfeiler.

1872 November 2 und 4.

Stand.	Lage.	Pleissen-burg.	Sternwarte. Windfahne.	Sternwarte. Pfeiler.	Ostpfeiler.
I.	F. l.	0° 0′ 0″	18° 37′ 27,″85	18° 52′ 31,″44	133° 45′ 36,″34
	r.	0	17,05	21,91	43 28,08
	r.	0	17,58	21,90	26,02
	l.	0	29,21	33,84	45 41,01
II.	l.	60 0 0	78 37 31,42	78 52 33,69	193 45 42,26
	r.	0	18,13	24,48	43 29,39
	r.	0	19,49	23,03	31,92
	l.	0	29,65	33,34	45 40,35
III.	l.	120 0 0	138 37 29,99	138 52 33,80	253 45 35,30
	r.	0	19,19	22,69	43 28,44
	r.	0	20,69	24,77	28,51
	l.	0	32,85	35,85	45 41,19

Art der Signalisirung. Pleissenburg und Sternwarte wie bei den Messungen auf dem Ostpfeiler. Auf dem Ostpfeiler ein Signalbrett, genau centrisch aufgestellt.

Resultate:

Basisendpunkt West.

Pleissenburg Signal =	0°	0′	0,″00
Sternwarte Windfahne =	18	37	24, 42
„ Pfeiler =	18	52	28, 39
Basisendpunkt Ost =	133	44	34, 07

Ausserdem wurden October 17, December 10 und 11 eine Anzahl Thürme von beiden Pfeilern aus eingestellt und zwar von der katholischen Kirche, der Thomaskirche, der Neukirche, der Nikolaikirche, dann der Pfeiler auf der Plateform der kleinen Kuppel der Sternwarte, der Thurm des Johannishospitals, der der Kirche in Thonberg, der der Kirche in Wachau. Der Horizontalkreis wurde nur um 90° gedreht, sodass zwei Stände erhalten sind. Da zwischen October und November die Beobachtungspfeiler muthwilligerweise zerstört worden waren, mussten sie neu aufgemauert werden und ist deshalb auf dem Ostpfeiler eine kleine Correction wegen Centrirung erforderlich gewesen. Die erhaltenen Beobachtungen sind:

Beobachtungen auf dem Ostpfeiler.

1872 October 17 und December 10.

Stand.	Lage.	Kath. Kirche	Thomaskirche.	Neukirche.
Stand I.	F. l.	0° 0′ 0,″00	6° 21′ 44,″33	7° 47′ 56,″65
	r.	0, 00	46, 90	59, 43
— II.	l.	90 0 0, 00	96 21 40, 14	97 47 51, 71
	r.	0, 00	41, 68	56, 86
Stand.	**Lage.**	**Nikolaikirche.**	**Sternwarte Pfeiler.**	**Johanniskirche.**
Stand I.	F. l.	12° 8′ 9,″54	16° 26′ 49,″87	17° 46′ 17,″31
	r.	9, 92	42, 69	14, 59
— II.	l.	102 8 4, 94	106 26 49, 06	107 46 16, 73
	r.	6, 57	42, 10	13, 84
Stand.	**Lage.**	**Johannishospital.**	**Kirche Thonberg.**	**Kirche Wachau.**
Stand I.	F. l.	22° 24′ 6,″44	32° 42′ 26,″44	206° 13′ 28,″30
	r.	23 57, 81	41 52, 63	32, 61
— II.	l.	112 24 8, 23	122 42 28, 08	296 13 18, 91
	r.	23 56, 15	41 52, 93	31, 15

Art der Signalisirung. Für sämmtliche Kirchen die Spitzen der Thürme, ebenso für das Johannishospital. Für den Pfeiler auf der Plateform der kleinen Kuppel der Sternwarte das Signalbrett.

Da die Beobachtungen am 10. December auf dem zum Theil neu gemauerten Pfeiler gemacht wurden, dessen Mittelpunkt nicht genau mit dem des alten Pfeilers übereinstimmte, bedurften die Winkel von diesem Tage der Correction wegen der Centrirung. Die Entfernung der beiden Mittelpunkte war 0.^{M}0333 und zwar lag der neue Mittelpunkt von dem alten in der Richtung 15° nach West von Süd gezählt. Mit den Winkeln:

Neues Centrum — Altes Centrum —			
Katholische Kirche	= 118° 39′,	Entfernung 3202	Meter,
Thomaskirche	= 125° 1′,	„ 3312	„
Neukirche	= 126° 27′,	„ 3656	„
Nikolaikirche	= 130° 47′,	„ 3225	„
Pfeiler Sternwarte	= 135° 6′,	„ 2216	„
Johanniskirche	= 136° 25′,	„ 2752	„

Johannishospital	= 141° 3′,	Entfernung	2113	Meter.
Kirche Thonberg	= 151° 21′,	,,	1391	,,
Kirche Wachau	= 324° 52′,	,,	4866	,,

finden sich December 10 die Correctionen für die Centrirung

für	Katholische Kirche	= — 1.″66
,,	Thomaskirche	= — 1. 52
,,	Neukirche	= — 1. 36
,,	Nikolaikirche	= — 1. 46
,,	Pfeiler Sternwarte	= — 1. 94
,,	Johanniskirche	= — 1. 56
,,	Johannishospital	= — 1. 84
,,	Kirche Thonberg	= — 2. 22
,,	Kirche Wachau	= + 0. 86

und damit folgende

Resultate:

Basisendpunkt Ost.

		Correction wegen Centrirung		
Kathol. Kirche	0° 0′ 0,″00	— 0,″83	=	— 0° 0′ 0,″83
Thomaskirche	6 21 43, 26	— 0, 76	=	6 21 42, 50
Neukirche	7 47 56, 16	— 0, 68	=	7 47 55, 48
Nikolaikirche	12° 8′ 7,″74	— 0,″73	=	12° 8′ 7,″01
Sternwarte Pfeiler	16 26 45, 93	— 0, 97	=	16 26 44, 96
Johanniskirche	17 46 15, 62	— 0, 78	=	17 46 14, 84
Johannishospital	22 24 2, 16	— 0, 92	=	22 24 1, 24
Kirche Thonberg	32 42 10, 02	— 1, 11	=	32 42 8, 91
Kirche Wachau	206 13 27, 74	+ 0, 43	=	206 13 28, 17

Die Beobachtungen auf dem Westpfeiler
1872 December 10 und 11 ergeben:

Stand.	Lage.	Kath. Kirche.	Thomaskirche.	Neukirche.
Stand I.	F. l.	0° 0′ 0,″00	6° 59′ 30,″93	7° 57′ 18,″66
	r.	0, 00	29, 50	23, 45
— II.	l.	90 0 0, 00	96 59 27, 94	97 57 13, 28
	r.	0, 00	31, 48	21, 48
Stand.	**Lage.**	**Nikolaikirche.**	**Johanniskirche.**	**Sternwarte Pfeiler.**
Stand I.	F. l.	13° 38′ 50,″27	21° 18′ 55,″00	22° 8′ 38,″78
	r.	49, 17	48, 55	25, 39
— II.	l.	103 38 46, 03	111 18 48, 86	112 8 34, 23
	r.	50, 40	47, 97	26, 62
Stand.	**Lage.**	**Johannishospital.**	**Kirche Thonberg.**	**Kirche Wachau.**
Stand I.	F. l.	29° 34′ 54,″54	48° 55′ 46,″63	194° 14′ 41,″80
	r.	40, 01	11, 99	49, 32
— II.	l.	119 34 48, 09	138 55 38, 01	284 14 53, 94
	r.	35, 72	7, 28	40, 54

Art der Signalisirung. Ganz wie auf dem Ostpfeiler; das Instrument stand genau centrisch.

Resultate:

Basisendpunkt West.

Katholische Kirche	0°	0′	0,″00
Thomaskirche	6	59	29, 96
Neukirche	7	57	19, 22
Nikolaikirche	13	38	48, 97
Johanniskirche	21	18	50, 09
Sternwarte Pfeiler	22°	8′	31,″25
Johannishospital	29	34	44, 59
Kirche Thonberg	48	55	25, 98
Kirche Wachau	194	14	46, 40

Meine Absicht, auch auf dem Pfeiler der Sternwarte und auf dem südöstlichen Pfeiler der Gallerie der Pleissenburg Winkelmessungen anzustellen, konnte noch nicht ausgeführt werden,

doch sollen diese Beobachtungen nachgeholt werden, sobald die Witterung, es gestattet. Die Winkel von der Pleissenburg aus sind bereits soweit geprüft, dass höchstens ganz unwesentliche Verbesserungen eintreten werden.

Bildet man aus den oben gegebenen Richtungen nun die Winkel im Dreiecke und rechnet die Seiten, so finden sich die letztern oder die Entfernungen:

vom Ostpfeiler bis zur	Pleissenburg (Südostpfeiler	= 3470,112 Meter
,, ,, ,, ,,	Sternwarte Windfahne	= 2517,711 ,,
,, ,, ,, ,,	Sternwarte Pfeiler	= 2504,953 ,,
,, ,, ,, ,,	Katholische Kirche	= 3633,661 ,,
,, ,, ,, ,,	Thomaskirche	= 3698,457 ,,
,, ,, ,, ,,	Neukirche	= 4034,466 ,,
,, ,, ,, ,,	Nikolaikirche	= 3565,888 ,,
,, ,, ,, ,,	Johanniskirche	= 3038,673 ,,
,, ,, ,, ,,	Johannishospital	= 2343,570 ,,
,, ,, ,, ,,	Kirche Thonberg	= 1482,745 ,,
,, ,, ,, ,,	Kirche Wachau	= 4586,131 ,,

Um Alles auf die Pleissenburg beziehen und diese als Anfangspunkt der rechtwinkligen Coordinaten nehmen zu können, ergaben sich die Entfernungen von

Pleissenburg (Südostpfeiler)	— Kath. Kirche	= 229,644 Meter
,, ,,	— Thomaskirche	= 327,734 ,,
,, ,,	— Neukirche	= 658,506 ,,
,, ,,	— Nikolaikirche	= 592,465 ,,
,, ,,	— Johanniskirche	= 959,678 ,,
,, ,,	— Sternwarte (Windfahne)	= 1184,326 ,,
,, ,,	— Sternwarte (Südwestpfeiler, kl. Kuppel)	= 1198,582 ,,
,, ,,	— Johannishospital	= 1493,515 ,,
,, ,,	— Kirche Thonberg	= 2310,284 ,,
,, ,,	— Kirche Wachau	= 7888,965 ,,
,, ,,	— Napoleonstein	= 3478,880 ,,

Das auf dem Südostpfeiler der Pleissenburg gemessene Azimuth der Richtung nach der Sternwarte Windfahne ist nach Beobachtungen von Süd nach Ost anzunehmen zu

$74^{0}\ 14'\ 29,''21$

Das Centrum der Pleissenburg (Mitte eines hölzernen Sternes im Fussboden) ist von dem Südostpfeiler entfernt

8,1156 Meter

in der Richtung 135° 2,'2 Azimuth von Süd durch West gezählt und man erhält damit die Coordinaten

	x in der Richtung des Meridians nach Süden positiv.	y senkrecht auf den Meridian nach Westen positiv.
Pleissenburg, Centrum	0.000 Met.	0.000 Met.
„ Südostpfeiler	+ 5.735 „	− 5.742 „
Katholische Kirche	+ 5.598 „	+ 223.902 „
Thomaskirche	− 321.326 „	− 26.788 „
Neukirche	− 642.055 „	+ 112.572 „
Nikolaikirche	− 438.452 „	− 397.804 „
Johanniskirche	− 161.146 „	− 950.798 „
Sternwarte, Windfahne	+ 327.379 „	− 1145.555 „
„ südwestl. Pfeil. der kl. Kuppel	+ 334.714 „	− 1158.292 „
Johannishospital	+ 363.722 „	− 1455.963 „
Kirche Thonberg	+ 1060.337 „	− 2061.279 „
Kirche Wachau	+ 6796.672 „	− 4020.865 „
Napoleonstein	+ 2517.315 „	− 2412.840 „

Für das Centrum der Sternwarte, welches unter der Windfahne liegt, nehme ich an die westliche Länge von Berlin 4ᵐ 0ˢ.895, die Breite 51° 20′ 6.″30 und damit ist die Länge und Breite der obigen Punkte:

	Westliche Länge von Berlin.	Breite.
Pleissenburg, Centrum	4ᵐ 4ˢ,841	51° 20′ 16.″89
Katholische Kirche	4 5,612	51 20 16. 71
Thomaskirche	4 4,748	51 20 27. 29
Neukirche	4 5,228	51 20 37. 67
Nikolaikirche	4 3,470	51 20 31. 08
Johanniskirche	4 1,566	51 20 22. 11
Sternwarte, südwestl. Pfeiler der kleinen Kuppel	4 0,851	51 20 6. 06
Johannishospital	3 59,826	51 20 5. 12
Kirche Thonberg	3 57,741	51 19 42. 56
Kirche Wachau	3 51,001	51 16 36. 94
Napoleonstein	3 56,532	51 18 55. 43

Ausserdem ergeben sich die Entfernungen

Katholische Kirche — Thomaskirche	411,99	Met.
,, ,, — Neukirche	657,15	,,
,, ,, — Nikolaikirche	764,03	,,
,, ,, — Johanniskirche	1186,48	,,
,, ,, — Sternwarte-Centrum	1406,75	,,
Thomaskirche — Neukirche	349,70	,,
,, — Nikolaikirche	389,06	,,
,, — Johanniskirche	937,79	,,
,, — Sternwarte-Centrum	1293,23	,,
Neukirche — Nikolaikirche	549,49	,,
,, — Johanniskirche	1167,06	,,
,, — Sternwarte-Centrum	1588,30	,,
Nikolaikirche — Johanniskirche	618,63	,,
,, — Sternwarte-Centrum	1070,34	,,
Johanniskirche — Sternwarte-Centrum	525,91	,,
Sternwarte-Centrum — Johannishospital	312,53	,,
,, ,, — Kirche Thonberg	1172,94	,,
,, ,, — Kirche Wachau	7079,58	,,
,, ,, — Napoleonstein	2530,18	,,

C. Bruhns, *Ueber die von Herrn Dr. L. R. Schulze abgeleiteten Elemente des Cometen I. 1830.*

Herr Dr. *Schulze* hat auf meine Veranlassung diesen Cometen einer genaueren Bahnbestimmung als bisher geschehen war, unterworfen. Der Comet, zuerst am 17. März 1830 auf einem im indischen Ocean fahrenden Schiffe erblickt, wurde auch am Cap gesehen und einigemal vor dem Perihel genau beobachtet; nach dem Perihel am 20. April von *Gambart* in Marseille entdeckt ist er in Europa bis 17. August verfolgt.

Die 316 nach dem Perihel vorhandenen Beobachtungen hat Herr *Schulze* theilweise neu reducirt, besonders die Oerter der Vergleichsterne neu berechnet, die individuellen Fehler der einzelnen Beobachter und der Instrumente ermittelt und schliesslich sieben Normalörter gebildet, für die Zeiten derselben die Störungen berechnet und angebracht und nach der Methode der kleinsten Quadrate die wahrscheinlichsten Elemente abgeleitet.

Bei den gefundenen parabolischen Elementen

$$T = 1830 \text{ April } 9.328705 \text{ Mittl. Berl. Zeit}$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi = 212^{0}11'\ 9''.14 \\ \Omega = 206\ 21\ 28.46 \\ i = 21\ 16\ 34.37 \end{array}\right\} \text{Mittl. Aequin. } 1830.0$$

$$\lg q = 9.9644471$$

ist die Summe der Quadrate der übrig bleibenden Fehler bei den sieben Normalörtern 23.48,

dagegen bei den wahrscheinlichsten elliptischen Elementen

$$\begin{array}{l} T = 1830 \text{ April } 9.328187 \\ \pi = 212^{0}11'\ 7''.21 \\ \Omega = 206\ 21\ 27.01 \\ i = 21\ 16\ 33.82 \\ \lg q = 9.9644467 \\ e = 0.9999712 \end{array}$$

ist die Summe der Fehlerquadrate 23.26, woraus folgt, dass die Beobachtungen keine elliptische Bahn verrathen. Die Arbeit wird in einem als Anhang zu diesen Berichten gegebenen Extraheft veröffentlicht werden.

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

ELEMENTE

DES

ERSTEN COMETEN VOM JAHRE 1830

MIT BERÜCKSICHTIGUNG

VON 319 BEOBACHTUNGEN

VON

DR. L. R. SCHULZE.

I. Vorläufige Elemente und Ephemeride.

Zu denjenigen Cometen, deren Positionen während eines ziemlich grossen Zeitraumes durch zahlreiche Beobachtungen festgestellt sind, deren Bahn mit möglichster Berücksichtigung aller Beobachtungen aber bisher noch nicht ermittelt ist, gehört der erste Comet vom Jahre 1830. Denselben erblickte zuerst am 17. März auf einer Reise im indischen Ocean der Schiffsleutnant *Wickham*, welcher auch seine Stellung durch Messung des Bogenabstandes von einigen Hauptsternen annähernd bestimmte. Ehe jedoch diese Beobachtungen in Europa bekannt wurden, hatte bereits *Gambart* in Marseille am 20. April denselben Himmelskörper aufgefunden, welcher nun auf mehreren Sternwarten in fast ununterbrochener Folge bis Mitte August beobachtet wurde. Das auf diese Weise angesammelte Material wurde aber damals nur theilweise zur Bestimmung der Bahn des Cometen benutzt, indem nur *Mayer* in Wien und *Haedenkampf* und *Mayer* in Königsberg genauere Elemente berechneten, wozu jeder nur die auf seiner Sternwarte angestellten Beobachtungen benutzte. Dass beide Bestimmungen trotz ihrer Einseitigkeit schon sehr genaue Resultate geben, liegt daran, dass, wie sich gezeigt hat, die Wiener und ganz besonders die Königsberger Beobachtungen von vorzüglicher Güte sind. Gleichwohl schien mir eine Bahnbestimmung mit möglichster Berücksichtigung aller Beobachtungen, *) der ich mich auf Vorschlag des Herrn Professor *Bruhns* unterzog, eine nicht ganz unnütze Arbeit zu sein, und theile ich im Nachfolgenden die Resultate meiner Untersuchung mit.

*) Während des Druckes lernte ich noch drei gute Beobachtungen kennen, welche vor dem Periheldurchgange am Cap angestellt waren: ich habe dieselben in einem Nachtrage berücksichtigt.

Indem es mir zunächst darauf ankam, eine Ephemeride zur Vergleichung der einzelnen Beobachtungen zu gewinnen, ging ich von einem Elementensystem aus, welches die Mitte hält zwischen den Elementen von *Mayer* in Wien und den parabolischen Elementen von *Haedenkampf* und *Mayer* in Königsberg. *Mayer* in Wien findet

$$
\begin{aligned}
T &= \text{April } 9{,}313218 \text{ m. Zt. Wien.}\\
\pi &= 212^{\circ}10'22''{,}0 \\
\Omega &= 206.20.23{,}6 \quad \text{m. Aeq. } 1830{,}0\\
i &= 21.16.44{,}6\\
\lg q &= 9{,}9644112;
\end{aligned}
$$

Haedenkampf und *Mayer* dagegen

$$
\begin{aligned}
T &= \text{April } 9{,}307119 \text{ m. Zt. Paris.}\\
\pi &= 212^{\circ}11'44''{,}13 \\
\Omega &= 206.21.52{,}34 \quad \text{scheinb. Aeq. April 9}\\
i &= 21.16.27{,}99\\
\lg q &= 9{,}9644697.
\end{aligned}
$$

Die Bewegung ist, wie ich hier ein für alle Mal bemerken will, eine directe. Der Vollständigkeit wegen füge ich die elliptischen Elemente ein, welche *Haedenkampf* und *Mayer* liefern, obgleich ich nie Veranlassung hatte, sie zu benutzen. Dieselben sind ebenfalls auf das scheinbare Aequinoctium vom 9. April und Pariser Zeit bezogen und lauten:

$$
\begin{aligned}
T &= \text{April } 9{,}308391\\
\pi &= 212^{\circ}11'22''{,}11\\
\Omega &= 206.21.34{,}99\\
i &= 21.16.\ 5{,}23\\
\lg q &= 9{,}9644737\\
\lg e &= 9{,}9997343.
\end{aligned}
$$

Hieraus bildete ich die Elemente:

$$
\begin{aligned}
T &= \text{April } 9{,}32137 \text{ m. Zt. Berlin.}\\
\pi &= 212^{\circ}10'58''{,}5 \\
\Omega &= 206.21.\ 3{,}5 \quad \text{m. Aeq. } 1830{,}0 \qquad \text{(I.)}\\
i &= 21.16.36{,}3\\
\lg q &= 9{,}9644400,
\end{aligned}
$$

und rechnete hiermit folgende Ephemeride, in welcher die Positionen für 12^h m. Zt. Berlin gelten, von vier zu vier Tagen und interpolirte die Positionen für die zwischenliegenden Tage. Zu den Rectascensionen und Declinationen fügte ich noch die Co-

lumnen mit der Ueberschrift a, b, c und d, welche die Correctionen für beliebige Zeiten geben, so dass, wenn t die nächste in der Tafel enthaltene Zeit, Δt den Unterschied in Bruchtheilen eines Tages bedeutet,

$$\text{AR.}(t+\Delta t) = \text{AR.}(t) + a.\Delta t + b.\Delta t^2\,.$$
$$\text{Decl.}(t+\Delta t) = \text{Decl.}(t) + c.\Delta t + d.\Delta t^2\,.$$

zu setzen ist.

Ephemeride nach Elementen (I.).

Datum	AR.	a	b	Decl.	c	d	$\log \frac{1}{\Delta}$
April 21,5	21ʰ10ᵐ 7ˢ,40	+25ˢ,50	+0ˢ,33	+ 9°21′ 4″,9	+54′11″,7	−1′32″,4	0,46060
22,5	10. 33,21	+26,09	+0,27	10.13.46,4	+51.13,5	−1.25,5	0,44797
23,5	10. 59,54	+26,56	+0,16	11. 3.36,5	+48.28,7	−1.18,2	0.43573
24,5	11. 26,24	+26,82	+0,09	11.50.48,6	+45.57,3	−1.12,0	0,42387
25,5	11. 53,13	+26,93	+0,03	12.35.35,7	+43.38,2	−1. 6,2	0,41237
26,5	12. 20,07	+26,90	−0,04	13.18. 9,2	+41.30,3	−1. 1,5	0,40122
27,5	12. 46,90	+26,75	−0,10	13.58.39,4	+39.31,0	−0.56,3	0,39041
28,5	13. 13,49	+26,39	−0,18	14.37.15,3	+37.41,9	− 52,8	0,37993
29,5	13. 39,68	+25,99	−0,29	15.14. 5,6	+35.59,6	− 48,9	0,36978
30,5	14. 5,37	+25,37	−0,33	15.49.17,3	+34.24,7	− 45,7	0,35993
Mai 1,5	14. 30,40	+24,66	−0,37	16.22.57,3	+32.56,0	− 42,5	0,35038
2,5	14. 54,68	+23,88	−0,43	16.55.11,6	+31.33,4	− 40,0	0,34112
3,5	15. 18,11	+22,97	−0,50	17.26. 5,8	+30.15,7	− 37,4	0,33214
4,5	15. 40,57	+21,98	−0,54	17.55.44,8	+29. 2,8	− 34,9	0,32343
5,5	16. 1,95	+20,82	−0,59	18.24.13,3	+27.54,9	− 33,2	0 31496
6,5	16. 22,16	+19,58	−0,63	18.51.35,6	+26.50,3	− 31,3	0,30674
7,5	16. 41,10	+18,29	−0,70	19.17.55,2	+25.49,3	− 29,2	0,29879
8,5	16. 58,68	+16,86	−0,74	19.43.15,7	+24.52,2	− 27,6	0,29106
9,5	17. 14,79	+15,34	−0,77	20. 7.40,5	+23.57,9	− 26,6	0,28355
10,5	17. 29,35	+13,77	−0,82	20.31.12,3	+23. 6,0	− 25,3	0,27626
11,5	17. 42,29	+12,09	−0,86	20.53.53,3	+22.16,4	− 24,2	0,26917
12,5	17. 53,52	+10,35	−0,89	21.15.45,8	+21.28,8	− 23,8	0,26228
13,5	18. 2,97	+ 8,54	−0,92	21.36.51,8	+20.43,5	− 22,3	0,25559
14,5	18. 10,57	+ 6,66	−0,97	21.57.13,2	+19.59,7	− 21,8	0,24909
15,5	18. 16,25	+ 4,69	−1,00	22.16.51,4	+19.16,4	− 20,4	0,24277
16,5	18. 19,94	+ 2,68	−1,03	22.35.47,8	+18 36,3	− 20,2	0,23662
17,5	18. 21,58	+ 0,60	−1,07	22.54. 4,4	+17.56,8	− 19,6	0,23064
18,5	18. 21,11	− 1,56	−1,08	23.11.41,1	+17.17,8	− 19,2	0,22482
19,5	18. 18,48	− 3,69	−1,12	23.28.39,8	+16.39,7	− 18,6	0,21935
20,5	18. 13,66	− 5,95	−1,13	23.45. 1,0	+16. 2,9	− 18,5	0,21363
21,5	18. 6,58	− 8,22	−1,13	24. 0.45,5	+15.26,2	− 18,0	0,20825
22,5	17. 57,23	−10,48	−1,14	24.15.58,8	+14.50,5	− 17,8	0,20301

Datum	ÅR.	*a*	*b*	Decl.	*c*	*d*	$\log \frac{1}{\Delta}$
Mai 23,5	21ʰ17ᵐ45ˢ,60	−12ˢ,78	−1ˢ,16	+24°30′26″,6	+14′15″,2	−17″,4	0,19789
24,5	17. 31,66	−15,11	−1,16	24.44.24,4	+13.40,5	−17,2	0,19291
25,5	17. 15,39	−17,43	−1,17	24.57.47,7	+13. 6,2	−17,1	0,18803
26,5	16. 56,79	−19,77	−1,17	25.10.36,8	+12.32,1	−16,9	0,18329
27,5	16. 35,85	−22,10	−1,18	25.22.52,0	+11.58,9	−16,8	0,17861
28,5	16. 12,57	−24,56	−1,17	25.34.33,6	+11.24,8	−16,6	0,17406
29,5	15. 56,94	−26,80	−1,17	25.45.41,8	+10.51,8	−16,6	0,16961
30,5	15. 18,97	−29,14	−1,16	25.56.17,0	+10.18,6	−16,5	0,16525
31,5	14. 48,67	−31,47	−1,15	26. 6.19,1	+ 9.45,6	−16,4	0,16098
Juni 1,5	14. 16,05	−33,79	−1,14	26.15.48,3	+ 9.12,7	−16,2	0,15679
2,5	13. 41,12	−36,08	−1,13	26.24.44,8	+ 8.40,3	−16,2	0,15268
3,5	13. 3,91	−38,34	−1,13	26.33. 8,8	+ 8. 7,8	−16,3	0,14865
4,5	12. 24,44	−40,60	−1,12	26.41. 0,2	+ 7.34,9	−16,3	0,14469
5,5	11. 42,72	−42,86	−1,10	26.48.18,9	+ 7. 2,6	−16,3	0,14080
6,5	10. 58,76	−44,05	−1,09	26.55. 5,0	+ 6.29,5	−16,3	0,13698
7,5	10. 12,61	−47,25	−1,07	27. 1.18,3	+ 5.57,1	−16,3	0,13321
8,5	9. 24,28	−49,41	−1,05	27. 6.59,1	+ 5.22,4	−16,4	0,12950
9,5	8. 33,81	−51,53	−1,03	27.12. 7,1	+ 4.51,6	−16,5	0,12584
10,5	7. 41,24	−53,60	−1,02	27.16.42,6	+ 4.18,5	−16,6	0,12222
11,5	6. 46,61	−55,65	−1,00	27.20.43,8	+ 3.44,8	−16,7	0,11865
12,5	5. 49,95	−57,66	−0,97	27.24.11,9	+ 3.11,4	−16,7	0,11513
13,5	4. 51,32	−59,60	−0,95	27.27. 6,5	+ 2.37,8	−16,8	0,11168
14,5	3. 50,78	−61,48	−0,93	27.29.27,5	+ 2. 4,2	−16,8	0,10820
15,5	2. 48,39	−63,28	−0,91	27.31.14,8	+ 1.30,4	−16,9	0,10478
16,5	1. 44,21	−65,06	−0,87	27.32.28,2	+ 0.46,4	−17,0	0,10138
17,5	21. 0. 38,29	−66,77	−0,83	27.33. 7,4	+ 0.21,8	−17,0	0,09800
18,5	20. 59. 30,71	−68,37	−0,80	27.33.12,1	− 0.12,4	−17,3	0,09465
19,5	58. 21,55	−69,94	−0,75	27.32.42,5	− 0.46,9	−17,3	0,09131
20,5	57. 10,88	−71,39	−0,71	27.31.38,3	− 1.21,5	−17,3	0,08798
21,5	55. 58,80	−72,76	−0,66	27.29.59,5	− 1.56,2	−17,2	0,08467
22,5	54. 45,40	−74,03	−0,61	27.27.46,1	− 2.30,5	−17,2	0,08136
23,5	53. 30,78	−75,20	−0,57	27.24.58,2	− 3. 5,4	−17,2	0,07806
24,5	52. 15,04	−76,28	−0,51	27.21.35,7	− 3.39,5	−17,2	0,07475
25,5	50. 58,27	−77,25	−0,46	27.17.39,0	− 4.13,8	−17,1	0,07144
26,5	49. 40,58	−78,11	−0,41	27.13. 8,1	− 4.47,0	−16,9	0,06813
27,5	48. 22,07	−78,90	−0,35	27. 8. 3,3	− 5.30,6	−16,8	0,06481
28,5	47. 2,83	−79,56	−0,31	27. 2.25,0	− 5.54,9	−16,8	0,06148
29,5	45. 42,97	−80,15	−0,26	26.56.13,4	− 6.28,3	−16,6	0,05814
30,5	44. 22,58	−80,61	−0,22	26.49.28,8	− 7. 0,7	−16,4	0,05479
Juli 1,5	43. 1,76	−81,01	0,17	26.42.11,8	− 7.33,3	−16,0	0,05142
2,5	41. 40,60	−81,80	−0,11	26.34.22,6	− 8. 5,0	−15,8	0,04804
3,5	40. 19,21	−81,46	−0,06	26.26. 1,9	− 8.36,4	−15,5	0,04464
4,5	38. 57,70	−81,55	−0,01	26.17.10,4	− 9. 7,1	−15,3	0,04121
5,5	37. 36,16	−81,51	+0,02	26. 7.47,8	− 9.37,4	−15,0	0,03776

Datum	AR.	a	b	Decl.	c	d	$\log \frac{1}{\Delta}$
Juli 6,5	20h36m14s69	−81s42	+0s09	+25°57′55″5	−10′ 7″1	−14″7	0,03429
7,5	34. 53,37	−81,21	+0,14	25.47.33,8	−10.36,1	−14,5	0,03079
8,5	33. 32,31	−80,89	+0,17	25.36.43,3	−11. 4,9	−14,1	0,02727
9,5	32. 11,59	−80,54	+0,20	25.25.24,6	−11.32,5	−13,8	0,02371
10,5	30. 51,27	−80,03	+0,26	25.13.38,6	−11.59,3	−13,5	0,02012
11,5	29. 31,45	−79,53	+0,29	25. 1.25,9	−12.25,9	−13,2	0,01650
12,5	28. 12,23	−78,90	+0,34	24.48.47,0	−12.51,8	−12,6	0,01284
13,5	26. 53,69	−78,17	+0,39	24.35.42,7	−13.16,7	−12,1	0,00915
14,5	25. 35,92	−77,65	+0.42	24.22.14,0	−13.40,6	−11,8	0,00543
15,5	24. 19,00	−76,48	+0,46	24. 8.21,7	−14. 3,6	−11,3	0,00467
16,5	23. 3,00	−75,51	+0,50	23.54. 6,5	−14.25,8	−10,8	9,99788
17,5	21. 48,00	−74,47	+0,52	23.39.29,1	−14.48,1	−10,4	9,99405
18,5	20. 34,07	−73,39	+0,59	23.24.31,0	−15. 7,8	−10,1	9,99018
19,5	19. 21,28	−72,17	+0,61	23. 9.13,1	−15.27,7	− 9,8	9,98628
20,5	18. 9,73	−70,93	+0,66	22.53.35,8	−15.46,8	− 8,9	9,98234
21,5	16. 59,47	−69,57	+0,68	22.37.40,3	−16. 4,2	− 8,3	9,97836
22,5	15. 50,57	−68,21	+0,71	22.21.28,0	−16.20,3	− 8,0	9,97434
23,5	14. 43,08	−66,75	+0,75	22. 4.59,9	−16.35,5	− 7,3	9,97029
24,5	13. 37,08	−65,22	+0,76	21.48.16,7	−16.50,9	− 6,8	9,96620
25,5	12. 32,61	−63,68	+0,78	21.31.19,3	−17. 3,6	− 6,4	9,96206
26,5	11. 29,70	−61,91	+0,81	21.14. 9,4	−17.16,2	− 5,7	9,95789
27,5	10. 28,40	−60,48	+0,83	20.56.47,7	−17.27,0	− 5,3	9,95369
28,5	9. 28,75	−58,82	+0,86	20.39.15,5	−17.37,1	− 5,0	9,94945
29,5	8. 30,79	−57,09	+0,86	20.21.33,6	−17.46,7	− 4,2	9,94517
30,5	7. 34,56	−55,37	+0,87	20. 3.43,0	−17.54,3	− 3,8	9,94086
31,5	6. 40,06	−53,63	+0,88	19.45.45,0	−18. 1,4	− 3,4	9,93652
Aug. 1,5	5. 47,31	−51,86	+0,88	19.27.40,2	−18. 7,9	− 3,0	9,93214
2,5	4. 56,33	−50,40	+0,89	19. 9.29,5	−18.12,9	− 2,6	9,92774
3,5	4. 7,12	−48,31	+0,89	18.51.14,2	−18.17,6	− 1,8	9,92330
4,5	3. 19,70	−46,52	+0,90	18.32.54,9	−18.20,8	− 1,5	9,91883
5,5	2. 34,08	−44,72	+0,91	18.14.32,7	−18.23,4	− 1,1	9,91433
6,5	1. 50,28	−42,87	+0,92	17.56. 8,3	−18.25,1	− 0,8	9,90981
7,5	1. 8,32	−41,05	+0,93	17.37.42,5	−18.26,5	− 0,3	9,90526
8,5	20. 0. 28,20	−39,20	+0,93	17.19.16,1	−18.26,1	+ 0,1	9,90068
9,5	19.59. 49,93	−37,34	+0,92	17. 0.50,2	−18.25,6	+ 0,5	9,89608
10,5	59. 13,50	−35,53	+0,92	16.42.25,2	−18.24,3	+ 0,8	9,89146
11,5	58. 38,89	−33,69	+0,91	16.24. 1,8	−18.22,4	+ 1,2	9,88682
12,5	58. 6,11	−31,88	+0,91	16. 5.40,7	−18.19,7	+ 1,5	9,88215
13,5	57. 35,14	−30,08	+0,91	15.47.22,7	−18.16,4	+ 1,8	9,87747
14,5	57. 5,94	−28,27	+0,91	15.29. 8,1	−18.12,5	+ 2,1	9,87277
15,5	56. 38,64	−26,46	+0,91	15.10.57,8	−18. 8,0	+ 2,4	9,86805
16,5	56. 13,06	−24,64	+0,91	14.52.52,4	−18. 2,8	+ 2,7	9,86331
17,5	55. 49,33	−22,83	+0,91	+14.34.52,6	−17.56,8	+ 3,0	9,85855

II. Zusammenstellung der Vergleichsterne.

Da bei den meisten Beobachtungen die Vergleichungen mit benachbarten Fixsternen angegeben waren, so musste meine nächste Aufgabe sein, diese Vergleichsterne von neuem aufzusuchen, soweit ihr Stand nicht durch eigens zu diesem Zweck angestellte Beobachtungen bestimmt war, wie dies besonders auf den Sternwarten in Königsberg und Wien geschah (cf. A. N. VIII, 439 und IX, 165). Daher brachte ich für jede Beobachtung an den Cometenort, wie ihn vorstehende Ephemeride ergab, die beobachteten Differenzen in Rectascension und Declination mit umgekehrtem Vorzeichen an, ordnete die gefundenen Werthe ungefähr nach der Rectascension, und suchte die nicht besonders bestimmten in den Catalogen von *Bessel-Weisse* (BW.), *Baily-Lalande* (Ll.) oder *Piazzi* (P.) auf. Hierbei gab ich dem erstgenannten Cataloge den Vorzug, da die Beobachtungen, die zu seiner Anfertigung dienten, der Zeit nach der Erscheinung des Cometen am nächsten liegen, mithin die Eigenbewegung der Fixsterne den geringsten Einfluss hat. Alle Sterne reducirte ich auf das mittlere Aequinoctium 1830,0, brachte an die *Bessel*'schen und *Lalande*'schen die *Wolfers*'schen Correctionen an, und erhielt mit Hinweglassung der Sterne, die ich entweder nicht auffinden konnte oder bereits unter anderer Nummer aufgeführt hatte, oder welche nur für Wiener Beobachtungen benutzt wurden, folgendes Verzeichniss, in welchem sich nur die in Königsberg bestimmten (K.) auf das scheinbare Aequinoctium des beigesetzten Tages, alle andern, auch die in Wien beobachteten (W.), auf das mittlere Aequinoctium 1830,0 beziehen.

Vergleichsterne.

No.	AR.	Declination	
1.	$19^h 55^m 43^s,30$	$+15^0 33' 33'',0$	BW. XIX. 1868. 69.
2.	19. 56. 28,59	16.37. 0,9	Ibid. 1900.
3.	19. 56. 33,72	17.15.41,8	Ll. 38376.
5.	20. 0. 48,60	19.43.50,0	P. XIX. 422.
6.	20. 2. 26,31	20.24.51,1	BW. XX. 100.
7.	20. 8. 51,23	21. 5. 0,2	P. XX. 18 Sagittae.
8.	20. 7. 22,62	20. 2.58,4	W.

No.	AR.	Declination	
12.	20h 8m 5s,00	+22° 7′41″,2	BW. XX. 339.
13.	20. 8. 8,46	22.59.42,1	P. XX. 22 Vulp.
14.	20. 9. 31,26	24. 9.11,3	BW. XX. 387.
16.	20 10. 54,27	21.27.51,3	Ibid. 441.
17.	20.11. 7,10	20.59.39,2	W.
18.	20.11. 24,53	22.24.45,4	W.
19.	20.11. 26,98	20.20.14,1	W.
21.	20.14. 7,81	22.18.48,8	Ll. 391621.
28.	20.19. 58,45	23.14. 3,3	W.
32.	20.24. 14,28	24. 9.11,0	W.
33.	20.26. 26,89	23.37.28,1	BW. XX. 944.
37.	20.38. 25,71	24.53.42,4	Ibid. 1019.
38.	20.28. 50,98	25.17.50,3	W.
39.	20.29. 49,78	25.52.30,0	BW. XX. 1051.
42.	20.31. 7,63	23.31.23,4	Ibid. 1105.
43.	20.31. 19,80	24.11.11,4	Ll. 39890.
44.	20.37. 31,26	24.40. 8,3	Ibid. 40099.
45.	20.42. 49,58	26.44.54,0	W.
46.	20.44. 15,60	27.37. 3,0	BW. XX. 1476.
47.	20.44. 52,61	26.27.50,0	Ibid. 1485.
48.	20.47. 18,86	27.24.53,6	W.
50.	20.48. 3,89	27. 1.38,1	K. Juni 27.
53.	20.53. 2,38	27.25.17,3	K. Juni 24.
54.	20.54. 24,33	27.26.21,6	W.
55.	20.55. 6,30	27. 8.28,6	W.
56.	20.55. 33,64	27.39.16,5	W.
57.	20.57. 18,79	27.38. 7,6	K. Juni 19.
58.	20.58. 59,44	26.14.48,9	BW. XX. 1856.
59.	21. 2. 11,26	27.39. 8,0	K. Juni 16.
60.	21. 3. 41,30	27.38.31,7	K. Juni 14.
61.	21. 4. 3,47	26.51.43,0	W.
63.	21. 5. 38,78	27.27.35,2	Ll. 41211.
64.	21. 7. 14,18	27.27.17,2	K. Juni 11.
65.	21. 8. 3,30	19. 0.43,4	BW. XXI. 207. 208.
66.	21. 8. 16,00	27.18.27,8	K. Juni 8.
71.	21.12. 21,64	16. 5.29,4	Ll. 41466. 467.
72.	21.12. 23,52	26.47.20,0	K. Juni 5.
74.	21.12. 30,50	18.30.18,0	W.
76.	21.13. 7,98	25.32. 2,1	BW. XXI. 332.
78.	21.13. 34,45	16.27.29,3	Ll. 41519.
82.	21.14. 13,48	19. 4.51,9	W.
87.	21.14. 58,37	17.20.24,9	Ll. 41571. 572.
88.	21.15. 52,38	25.44.53,0	K. Mai 28.
90.	21.16. 19,36	23.32.51,6	W.

No.	AR.	Declination	
92.	21h16m32s50	+24°35′ 8″,3	W.
93.	21. 16. 31,61	23. 0. 2,9	W.
94.	21. 16. 45,66	23.48. 8,2	W.
95.	21. 17. 1,29	25.26.45,9	W.
96.	21. 16. 56,38	24.26.59,1	K. Mai 24.
98.	21. 16. 55,22	19.43.36,9	K. Mai 8.
99.	21. 17. 14,85	17.44. 8,4	BW. XXI. 441.
100.	21. 17. 18,54	25.54.12,8	W.
101.	21. 17. 23,04	23.41.48,8	W.
102.	21. 17. 31,41	26.41.21,7	W.
103.	21. 17. 38,49	26.24.59,3	W.
104.	21. 17. 39,94	23.45.43,1	K. Mai 20.
105.	21. 17. 53,96	26.25.48,2	W.
106.	21. 18. 32,95	18.38.34,7	W.
108.	21. 18. 51,01	22.57.21,4	K. Mai 17.
109.	21. 18. 53,41	22.13. 0,7	K. Mai 15.
110.	21. 18. 59,16	23.33.37,9	W.
111.	21. 19. 6,37	21.25.50,1	K. Mai 12.
113.	21. 19. 49,04	23.35.48,0	W.
114.	21. 20. 1,23	20.59.57,6	BW. XXI. 503.
116.	21. 20. 10,65	26.52.20,9	Ibid. 507.
117.	21. 20. 23,18	23.52.39,4	Ibid. 513.
119.	21. 21. 6,20	23.55.57,7	Ibid. 528.
120.	21. 21. 13,79	21.26.25,2	W.
123.	21. 22. 14,90	22.53.49,4	W.
128.	21. 24. 8,33	23. 5.58,5	P. XXI. 174.
132.	21. 27. 45,70	23.41.57,5	Ll. 42063.
133.	21. 29. 48,16	18.33.25,9	W.
135.	21. 36. 58,84	24.52. 1,7	BW. XXI. 940.
136.	21. 38. 15,43	22.10. 8,5	Ibid. 966.
137.	21. 38. 15,25	24.48.13,5	Ibid. 967.
138.	21. 38. 40,55	24.46.47,2	Ibid. 981. 982
140.	21. 7. 59,42	27.26.42,2	Ibid. 205.
141.	21. 9. 50,99	26.59.36,8	K. Juni 7.
δEquul.	21. 6. 11,97	9.19.27,5	Baily.

Hierzu kommen noch die Vergleichsterne für die Altonaer Beobachtungen, welche ich in der Bezeichnungsweise, wie sie bei den Beobachtungen angewendet ist, besonders zusammenstelle, da die Altonaer Beobachtungen überhaupt eine gesonderte Behandlung verlangten. Die nicht mit aufgeführten Sterne fanden sich entweder in *Argelander's* Durchmusterungen als

noch nicht bestimmt, oder konnten weggelassen werden, weil die Vergleichungen zu wenig Uebereinstimmung zeigten. Bei den Sternen, welche auch an anderen Orten als Vergleichsterne benutzt waren, habe ich auf die Sterne des vorstehenden Cataloges verwiesen

Vergleichsterne für Altonaer Beobachtungen.

	AR.	Declination	
a.	$21^h 13^m 3^s{,}60$	$+15^0\ 6'\ 47''{,}1$	Ll. 41501.
b.	21. 14. 56,57	15.16.52,6	Ibid. 41568.
c.	21. 19. 6,19	15.23.44,1	Ibid. 41734.
d.	21. 15. 7,78	15.46.24,6	Ibid. 41576.
e.	= 71.		
f.	= 78.		
g.	21. 14. 1,95	16.29.31,4	Ll. 41538.
δ.	21. 16. 3,25	15.38.26,5	BW. XXI. 394.
h.	21. 10. 0,52	16.55.11,3	P. XXI. 67.
i.	21. 10. 29,23	17. 0.40,1	Ibid. 69.
k.	21. 11. 16,18	17. 6.50,2	Ibid. 77.
l.	= 87.		
m.	21. 10. 37,44	17.16.47,6	P. XXI. 73.
ϑ.	21. 12. 53,54	18. 7.32,2	BW. XXI. 327.
o.	21. 17. 29,88	17.55.47,0	Ibid. 450.
p.	= 106.		
n.	21. 17. 14,89	17.44. 0,8	Ll. 41669.
q.	= 82.		
r.	= 106.		
κ.	21. 19. 8,89	21.43.36,5	BW. XXI. 480.
λ.	21. 19. 5,40	21.25.54,3	Ibid. 479.
s.	= 114.		
t.	= 120.		
μ.	= 109.		
u.	21. 13. 41,85	22.10.16,6	BW. XXI. 347.
v.	= 123.		
w.	21. 24. 43,60	22.38.50,4	P. XXI. 178.
a'.	= 94.		
z	= 104.		
y.	= 90.		
ξ.	= 101.		
Juli 1. *d.*	= 45.		
8. *α.*	20. 33. 24,85	25.28.50,8	BW. XX. 1175.
11. 26 Vulp.	= 38.		
14. *e.*	20. 21. 4,36	24.30.44,6	BW. XX. 775. 776.
15. 25 Vulp.	20. 14. 44,94	23.54.33,5	P. XX. 108.

	AR.	Declination	
x.	= 32.		
Juli 26. α.	$20^h 11^m 23^s{,}55$	+21°10′13″,9	Meridian-Beob.
β.	20. 13. 20,39	21. 0.59,1	BW. XX. 518.
Juli 27. α.	20. 11. 10,06	20.59.57,4	M.-B.
Juli 28. α.	20. 9. 8.72	20.53.29,0	M.-B.
β.	20. 9. 17,30	20.43.38,4	M.-B.
Juli 29. α.	20. 9. 56,60	20.26. 1,4	Arg. B. B. VI. B.
β.	= 19.		
Juli 30. α.	20. 7. 25,58	20. 3.19,9	M.-B.
β.	20. 8. 50,78	20. 2.17,1	M.-B.

III. Vergleichung der Beobachtungen mit der Ephemeride.

Die früheste Beobachtung nach dem Periheldurchgange, welche den Cometenort mit einiger Sicherheit ergiebt, ist die von *Gambart* in Marseille April 21 $15^h 50^m 28^s$ angestellte Vergleichung mit δ Equulei. Dieselbe fand ich im VIII. Bande der A. N. p. 251 und in den Eff. di Milano 1831. App. p. 25, doch zeigte sich ein Widerspruch in beiden Citaten, indem es in den A. N. heisst: la comète suivait l'étoile δ du petit cheval de $4^m 1^s{,}4$, in den Eff. di Mil. dagegen: la cometa precedeva la stella δ del Cavallino di $4^m 1^s{,}4$. Die Vergleichung mit der Ephemeride zeigte erstere Lesart als die richtige, und es war also an die Position des Vergleichsterns für den 21. April, nämlich

$$\text{AR.} = 21^h 6^m 12^s{,}37,\ \text{Decl.} = 9°19'26''{,}5,$$

anzubringen

$$+\ 4^m 1^s{,}4 \text{ und } +\ 10'54''{,}0,$$

sodass sich der Cometenort

$$\text{AR.} = 21^h 10^m 13^s{,}77,\ \text{Decl.} = 9°30'20''{,}5$$

ergab, während nach der Ephemeride mit Rücksicht auf Aberration und Parallaxe

$$\text{AR.} = 21^h 10^m 12^s{,}76,\ \text{Decl.} = 9°30'15''{,}1.$$

Mithin war der Fehler im Sinne Ephemeride-Beobachtung:

Marseille April 21. $\Delta\alpha = -\ 1^s{,}01,\ \Delta\delta -\ 5''{,}4,$

in Zeitsecunden für Rectascension und in Bogensecunden für Declination, wie immer im Folgenden.

Die weiteren Beobachtungen stelle ich nach den Beobachtungsorten zusammen und beginne mit denjenigen, für welche die Vergleichsterne entweder nicht angegeben, oder besonders beobachtet waren, sodass eine neue Reduction überflüssig war.

Göttingen. (*Harding*. A. N. VIII. 253.)

		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
April	26.	+ 0ˢ22	+ 1″2
	27.	+ 0,45	+ 31,3
	28.	− 0,16	+ 11,3
	29.	− 0,47	+ 2,7
	30.	+ 0,23	− 21,1

Bremen. (*Olbers*. A. N. VIII. 255. 285.)

April	28.	− 0ˢ95	+ 22″5
	29.	− 0,65	− 4,2
	30.	− 0,42	− 7,4
Mai	2.	+ 1,88	− 14,9
	3.	+ 0,55	− 11,1
	4.	− 0,15	+ 13,6
	5.	+ 1,44	+ 40,5
	12.	− 0,87	+ 8,5
	13.	− 1,12	− 32,9
	15.	− 2,36	− 2,9
	16.	− 1,65	− 9,7
	19.	+ 0,87	− 32,2
	20.	− 0,39	− 23,4
	23.	− 0,36	− 36,0
	24.	+ 0,95	
	28.	+ 0,45	− 31,6
Juni	1.	− 1,17	− 50,4
	4.	+ 1,37	− 38,3
	10.	− 0,38	− 50,6
	11.	− 0,14	− 23,4
	14.	− 0,83	+ 10,3

Juni	16.	— 0^{s}11	+ 21$''$8
	19.	+ 0,75	+ 11,4
	20.	+ 3,18	+ 3,8

Königsberg. (*Bessel.* A. N. VIII, 420 sqq. IX, 165 sqq.)

Mai	8.	+ 0^{s}38	— 2$''$6
	12.	+ 0,46	— 1,4
	15.	+ 0,34	— 3,1
	16.	+ 0,42	— 4,8
	17.	+ 0,41	— 4,5
	18.	+ 0,46	— 5,0
	20.	+ 0,32	— 5,4
	24.	+ 0,41	— 7,6
	28.	+ 0,41	— 7,8
	29.	+ 0,63	— 7,5
Juni	5.	+ 0,70	— 6,6
	7.	+ 0,63	— 7,7
	8.	+ 0,73	— 5,6
	11.	+ 0,48	— 7,7
	14.	+ 0,54	— 5,8
	15.	+ 0,51	— 4,7
	16.	+ 0,49	— 6,4
	19.	+ 0,55	— 6,3
	24.	+ 0,63	— 6,9
	27.	+ 0,82	— 4,8
	28.	+ 0,96	— 4,3

Wien. (*Mayer.* A. N. VIII, 439.)

Mai	5.	+ 01^{s}2	+ 1$''$3
	6.	— 0,10	+ 0,4
	7.	+ 0,71	— 5,9
	9.	+ 0,42	+ 3,1
	12.	+ 0,22	— 2,2
	17.	+ 0,01	— 13,8
	18.	+ 0,24	— 7,7
	19.	+ 0,44	— 5,8
	20.	+ 0,25	+ 1,5
	23.	+ 0,07	— 21,4
	24.	+ 0,25	— 15,3
	25.	+ 0,03	+ 0,4

Mai 30.	+ 0ˢ26	— 13″5
Juni 1.	+ 0,38	— 13,5
3.	+ 0,35	— 7,9
4.	+ 0,20	— 12,8
5.	+ 0,50	— 11,1
7.	+ 0,79	— 15,7
19.	+ 0,11	+ 2,2
23.	— 0,60	— 10,8
24.	— 0,38	— 21,4
25.	+ 0,35	— 24,6
26.	+ 0,75	— 13,2
27.	+ 0,16	— 13,0
29.	+ 0,31	— 10,3
Juli 10.	+ 0,44	— 9,5
11.	— 0,91	— 24,7
13.	+ 0,09	— 10,1
14.	+ 0,49	— 2,9
15.	+ 0,18	— 5,0
16.	+ 1,39	+ 9,2
18.	+ 0,51	— 2,5
19.	+ 0,32	— 4,1
22.	+ 0,51	— 9,5
23.	+ 0,39	— 3,4
25.	+ 0,78	+ 4,5
26.	+ 0,49	— 5,1
27.	+ 0,59	+ 1,0
29.	+ 0,39	— 13,5
30.	+ 0,54	— 12,2

Padua. (*Santini.* A. N. IX, 285.)

April 30.	+ 0ˢ06	— 6″0
Mai 1.	+ 0,49	— 7,0
3.	+ 0,19	— 8,1
5.	— 1,62	— 8,5
8.	+ 1,61	— 19,8
10.	+ 0,25	— 14,3
12.	+ 0,71	— 16,4
18.	— 0,12	— 4,0
19.	+ 0,60	— 16,4
20.	— 0,11	— 2,9

Mai 21.	— 0ˢ03	— 20″6
22.	— 1,14	+ 7,6
23.	— 1,13	— 10,6
24.	— 0,85	— 18,9
25.	+ 0,33	— 2,0
26.	— 0,52	— 46,9
28.	+ 0,63	— 7,5
29.	+ 1,18	— 25,0
30.	+ 0,56	+ 3,6
Juni 1.	+ 0,76	— 12,9
2.	+ 0,41	— 4,9
3.	+ 0,50	— 6,2
5.	— 1,88	— 32,5
6.	— 0,42	— 31,3
11.	+ 0,30	+ 4,8
12.	— 0,58	— 6,9
13.	+ 0,12	— 2,5
19.	— 0,56	+ 15,4
21.	— 0,15	+ 12,0
23.	— 1,36	+ 1,9
24.	— 0,41	+ 10,4
25.	+ 0,23	— 23,5
26.	+ 0,91	+ 12,4
28.	+ 0,97	— 10,3
29.	— 0,76	+ 19,5
30.	+ 0,19	— 15,1

Kensington. (*Monthly Not.* I, p. 180.)

Mai 1.	+ 1ˢ21	+ 19″8
2.	+ 2,46	+ 10,5
3.	+ 1,22	+ 22,4
11.	— 0,24	— 76,7
13.	+ 2,22	+ 8,9

Bei den nun folgenden Beobachtungen gebe ich die Nummer des Vergleichsterns aus dem Verzeichnisse in II., sowie seine Position für den Beobachtungstag, ferner die Vergleichung des Cometen mit dem Sterne und den daraus hergeleiteten Cometenort, und endlich die Abweichungen des letzteren von der Ephemeride.

Prag. (*David.* A. N. VIII, 285.)

Datum	No.	AR. St.	Decl. St.	Comet-St. AR.	Comet-St. Decl.	AR. Com.	Decl. Com.	$\triangle\alpha$	$\triangle\delta$
Mai 17.	123.	$21^h22^m16^s02$	22°53′47″,6	$-\ 3^m54^s61$	+ 31″,1	$21^h18^m21^s41$	22°54′18″,7	$+1^s02$	− 8″,2
20.	94.	21. 16. 46,91	23.48. 6,7	+ 1. 26,20	− 2′24,0	21. 18. 13,11	23.45.42,7	+1,24	−57,3
	90.	21. 16. 20,61	23.32.50,2	+ 1. 52,47	+12.57,1	13,08	47,3	+1,27	−52,6
23.	92.	21. 16. 33,85	24.35. 7,1	+ 1. 12,04	− 5. 8,0	21. 17. 45,89	24.29.59,1	+0,45	+11,3
24.	92.	33,90	7,2	+ 57,85	+ 8.29,2	21. 17. 31,75	24,43.36,4	+0,74	+28,1
28.	95.	21. 17. 2,80	25.26,45,8	− 50,13	+ 6. 6,3	21. 16. 12,67	25.32.52,1	+0,85	+61,2
30.	95.	2,86	45,9	− 1. 42,67	+29.26,3	21. 15. 20,19	25.56.12,2	+0,70	−31,7
Juni 1.	102.	21. 17. 33,05	26.41.21,8	− 3. 14,65	−26.34,5	21. 14. 18,40	26.14.47,3	−0,41	+24,0
3.	102.	33,11	22,2	− 4. 26,90	− 8.51,8	21. 13. 6,21	26.32.30,4	−0,27	+12,2
9.	102.	33,29	23,6	− 8. 56,60	+30.43,0	21. 8. 36,69	27.12. 6,6	+0,85	−24,8
12.	116.	21. 20. 12,61	26.52.23,4	−14. 19,51	+31.42,0	21. 5. 53,10	27.24. 5,4	+0,25	− 9,8
14.	48.	20. 47. 20,99	27.24.57,5	+16. 32,17	+ 3.24,6	21. 3. 53,16	27.28.22,1	+1,49	+52,1
15.	48.	21,02	57,8	+15. 29,98	+ 6. 2,0	21. 2. 51,00	27.30.59,8	+0,64	+ 4,9
18.	48.	21,10	58,5	+12. 11,77	+ 7.33,3	20 59. 32,87	27.32.31,8	+2,08	+34,9
20.	48.	21,15	59,1	+ 9. 54,11	+ 6.15,2	20. 57. 15,26	27.31.14,3	+0,72	+23,2
23.	48.	21,21	59,9	+ 6. 12,36	0. 0,0	20. 53. 33,71	27.24.59,9	+2,16	+ 4,1
26.	46.	20. 44. 18,03	27.37.10,2	+ 5. 25,07	−24. 7,2	20. 49. 43,10	27.13. 3,0	+0,98	+11,8
28.	48.	20. 47. 21,33	27.25. 1,2	− 0. 15,53	−23.31,0	20. 47, 5,80	27. 1.30,2	+1,53	+68,2

Mannheim. (*Nicolai.* A. N. VIII. 317.)

Datum	No.	AR. St.	Decl. St.	Comet-St.		AR. Com.	Decl. Com.	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
				AR.	Decl.				
Mai 18.	123.	$21^{h}22^{m}16^{s}06$	22°53′47″8	− $3^{m}54^{s}78$	+ 18′49″5	$21^{h}18^{m}21^{s}31$	23°12′37″6	+0^{s}30	+ 5″7
19.	90.	21.16. 20,58	23.32.50,1	+ 1. 58,12	− 3.43,1	21.18. 18,70	23.29 7,0	+0,29	+ 0,6
20.	132.	21.27. 46,90	23.41.55,9	− 9. 32,62	+ 3.24,4	21.18. 14,28	23.45.20,3	−0,08	− 9,5
22.	92.	21.16. 33,83	24.35. 7,0	+ 1. 23,89	− 18.57,3	21.17. 57,72	24.16. 9,7	−0,03	− 9,4
23.	92.	33,85	7,1	+ 1. 12,65	− 4.56,0	21.17. 46,50	24.30.11,1	−0,02	−10,0
27.	95.	21.17. 2,78	25.26.45,4	− 26,01	− 4. 3,1	21.16. 36,77	25.22.42,3	−0,19	− 2,7
31.	58.	20.59. 1,13	26.14.49,5	+15. 47,77	− 8.39,2	21.14. 48,90	26. 6.10,3	+1,15	−13,8
Juni 1.	58.	1,16	49,8	+15. 14,53	+ 1.11,1	21.14. 15,69	26.16. 0,9	+0,61	−14,6
2.	116.	21.20. 12,32	26.52.21,3	− 6. 30,48	− 27.47,1	21.13. 41,84	26.24.34,2	+0,45	− 5,4
5.	116.	12,41	21,9	− 8. 28,45	− 4. 8,8	21.11. 43,96	26.48.13,1	+0,24	−10,4
9.	116.	12,53	22,8	−11. 38,91	+ 19.53,6	21. 8. 33,62	27.12.16,4	+0,28	−13,3
10.	66.	21. 8. 15,64	27.18.33,6	− 32,50	− 2.10,4	21. 7. 43,14	27.16.23,2	+1,38	− 1,4
13.	63.	21. 5. 40,81	27.27.38,5	− 47,35	− 39,4	21. 4. 53,46	27.26.59,1	−0,17	− 2,9
	48.	20.47. 20,72	27.24.57,5	+17. 30,00	+ 1.53,9	50,72	54,4	−0,15	+12,0
22.	54.	20.54. 26,64	27.26.27,4	+ 23,19	+ 1.31,3	20.54. 49,83	27.27.58,7	+0,35	− 9,7
24.	48.	20.47. 21,24	27.25. 0,2	+ 4. 57,71	− 3.17,9	20.52. 18,95	27.21.42,3	0,00	− 2,0
25.	48.	21,26	0,4	+ 3. 42,25	− 7. 2,8	20.51. 3,51	27.17.58,1	+1,58	− 7,3
Juli 10.	38.	20.28. 53,66	25.18. 2,1	+ 2. 2,79	− 3.47,4	20.30. 56,45	25.14.14,7	−0,20	− 4,8
11.	37.	20.28. 38,40	24.53.54,5	+ 56,53	+ 7.57,9	20.29. 34,93	25. 1.52,4	+0,78	+ 9,0
13.	44.	20.37. 33,77	24.40.20,6	−10. 37,12	− 4. 5,5	20.26. 56,65	24.36.15,1	+0,69	− 2,1
15.	14.	20. 9. 34,00	24. 9.24,9	+14. 46,56	− 43,5	20.24. 20,56	24. 8.41,4	+0,16	− 6,5
17.	33.	20.26. 29,64	23.37.42,0	− 4. 39,23	+ 2.16,0	20.21. 50,41	23.29.58,3	+1,01	+ 5,0
18.	42.	20.31. 10,42	23.31.37,4	−10. 33,11	− 6.43,7	20.20. 37,31	23.24.53,7	+0,17	+13,4
20.	13.	20. 8. 11,25	22.59.57,2	+ 9. 59,76	− 6. 2,8	20.18. 8,22	22.53.39,3	+3,51	+17,5

Juli 22.	18.	$20^{h}14^{m}27^{s}.33$	$22^{0}25'$ 0″.9	+ $4^{m}27^{s}.13$	— 2′40″.1	$20^{h}15^{m}54^{s}.46$	$22^{0}22'20''.8$	+0^{s}.59	+ 4″.7
23.	12.	20. 8. 7,80	22. 7.57,1	+ 6. 39,51	— 2. 9,7	20.14. 47,31	22. 5.47,4	—0,36	+ 3,7
25.	16.	20.10. 57,05	21.28. 7,6	+ 1. 40,17	+ 3.59,2*)	20.12. 37,22	21.32. 6,8	—0,66	+ 9,6
27.	17.	20.11. 9,92	20.59.56,0	— 39,58	— 2.40,8	20.10. 30,34	20.57.15,2	+0,71	+12,7

Nimes. (*Valz.* A. N. VIII, 339.)

Mai 4.	82.	21.14. 14,23	19. 4.49,5	+ 1. 22,67	—1^{0} 4.55,0	21.15. 36,90	17.59.54,5	+7,85	+19,3
	106.	21.18. 33,68	18.38.32,4	— 2. 54,53	— 38.43,0	39,15	49,4	+5,60	+24,4
18.	123.	21.22. 46,06	22.53.47,8	— 3. 54,40	+ 19. 6,0	21.18. 21,66	23.12.53,8	+0,26	+ 5,4
	129.	21.24. 9,48	23. 5.56,8	— 5. 47,20	+ 7.10,0	22,28	13. 6,8	—0,36	+ 7,6
25.	92.	21.16. 33,92	24.35. 7,7	+ 40,00	+ 23.30,0	21.17. 13,92	24.58.37,7	+1,16	—14,2
	95.	21.17. 2,71	25.26.45,0	+ 11,00	— 28.50,0	13,71	57.55,0	+1,37	+28,5
29.	76.	21.18. 9,53	25.32. 2,0	+ 2. 33,00	+ 14.58,0	21.15. 42,53	25.47. 0,0	+1,01	+ 5,9
	95.	21.17. 2,84	25.26.45,7	— 1. 19,40	+ 20.53,0	43,44	38,7	+0,10	—32,8
Juni 10.	64.	21. 7. 14,19	27.27.17,1	+ 27,07	— 11.40,0	21. 7. 41,26	27.15.37,1	+3,03	+47,2
	66.	21. 8. 16,05	27.18.28,2	— 33,33	— 2.42,0	42,72	46,2	+1,57	+38,2
22.	54.	20.54. 26,64	27.26.27,4	+ 20,00	+ 30,0	20.54. 46,64	27.26.57,4	+2,23	+49,7
	55.	20.55. 8,61	27. 8.34,4	— 23,00	+ 18.28,0	45,61	27. 2,4	+3,26	+44,7
25.	48.	20.47. 21,26	27.25. 0,4	+ 3. 34,00	— 8.40,0	20.50. 55,26	27.16.20,4	+2,08	+70,6
	55.	20.55. 8,68	27. 8.35,2	— 4. 12,60	+ 8.35,0	56,08	17.10,2	+1,26	+20,8

*) Für die Beobachtung: Mannheim, Juli 25. war die Vergleichung in Declination = —3′59″.2 angegeben, was vermuthlich ein Druckfehler ist, da nur das positive Zeichen genügende Uebereinstimmung giebt.

Speier. (*Schwerd.* A. N. VIII, 299.)

Datum	No.	AR. St.	Decl. St.	Comet-St. AR.	Comet-St. Decl.	AR. Com.	Decl. Com.	$\triangle\alpha$	$\triangle\delta$
Mai 4.	99.	$21^h17^m15^s,58$	$17^\circ44'\ 6'',4$	$-1^m30^s,80$	$+15'47'',0$	$21^h15^m44^s,78$	$17^\circ59'53'',4$	$-0^s,13$	$+20'',1$
5.	74.	21.12. 31,29	18.30.15,9	+ 3. 33,80	− 2.25,0	21.16. 5,09	18.27.50,9	+ 0,35	+ 2,2
	106.	21.18. 33,71		− 2. 28,47		5,24		+ 0,20	
6.	65.	21. 8. 4,14	19. 0.41,1	+ 8. 21,00	− 5.46,0	21.16. 25,14	18.54.55,1	+ 0,20	+ 0,1
	80.	21.14. 14,29		+ 2. 10,60		24,89		+ 0,45	
17.	123.	21.22. 16,03	22.53.47,7	− 3. 53,87	+ 1 37,0	21.18. 22,16	22.55.24,7	+ 0,06	− 4,8
20.	104.	21.17. 39,94	23.45.43,1	+ 33,80	− 16,0	21.18. 13,74	23.45.27,1	+ 0,35	− 1,5
	94.	21.16. 46,92	23.48 6,4	+ 1. 26,80	− 2.43,0	13,72	23,4	+ 0,42	− 5,6
27.	95.	21.17. 2,78	25.26.45,4	− 26,45	− 4. 4,0	21.16. 36,33	25.22.41,4	+ 0,34	+ 0,6

Mailand. (*Carlini.* Eff. di Mil. 1831. App. p. 21.)

Datum	No.	AR. St.	Decl. St.	Comet-St. AR.	Comet-St. Decl.	AR. Com.	Decl. Com.	$\triangle\alpha$	$\triangle\delta$
Mai 1.	134.	21.36. 28,50	16.34.28,4	−21. 53,80	− 6.36,5	21.14. 34,70	16.27.51,9	+ 0,01	+ 0,5
3.	134	28,56	28,7	−21. 6,69	+ 56. 9,0	21.15. 21,87	17.30.37,7	+ 0,48	−17,6
5.	133.	21.29. 48,86	18.33.23,6	−13. 42,86	− 4.55,0	21.16. 6,00	18.28.28,6	− 0,30	+ 0,9
6.	133.	48,89	23,7	−13. 24,26	+ 22.21,0	21.16. 24,63	18.55.44,7	+ 1,22	− 1,1
11.	136.	21.38. 16,28	22.10. 6,3	−20. 31,94	−1°12.59,0	21.17. 44,34	20.57. 7,3	+ 0,29	+ 3,4
19.	135.	21.36. 59,45	24.51.59,3	−18. 40,15	−1.20.54,0	21.18. 19,30	23.31. 5,3	− 0,96	− 7,4
20.	135.	59,48	59,4	−18. 45,34	−1. 4.40,0	21.18. 14,14	23.47.19,4	− 0,88	−13,8
22.	135.	59,55	59,8	−19. 2,16	− 33.55,0	21.17. 57,39	24.18. 4,8	− 1,28	−11,6
26.	135.	59,68	52. 0,6	−20. 4,46	+ 20.23,0	21.16. 55,22	25.12.23,6	− 0,84	− 7,8
29.	58.	20.59. 1,07	26.14 49,0	+16. 42,18	− 27.43,0	21.15. 43,25	25.47. 6,0	+ 0,44	− 3,1
31.	58.	1,18	49,5	+15. 44,22	− 7.14,0	21.14. 45,35	26. 7.35,5	− 0,65	− 2,5
Juni 21.	48.	20.47. 21,17	27.24.59,4	+ 8. 37,92	+ 5. 0,0	20.55. 59,09	27.29.59,4	+ 0,29	− 4,0

Juni 23.	48.	20h47m21s,21	27°24′59″,9	+ 6m 9s,20	− 19″,0	20h53m30s,41	27°24′40″,9	− 1s,18	+ 8″,9
24.	48.	21,24	25. 0,2	+ 4. 52,70	− 3′22,0	20.52. 13,94	27.21.38,2	− 0,08	−10.6
25.	48.	21,26	0,4	+ 3. 28,98	− 7.35,0	20.50. 50,24	27.17.25,4	+ 0,59	−14,4
28.	46.	20.44. 18,08	27.37.10,7	+ 2. 45,70	− 34,52,0	20.47. 3,78	27. 2.18,7	− 0,03	+ 0,1
29.	47.	20.44. 55,09	26.27.58,1	+ 52,45	+ 28.31,0	20.45. 47,54	26.56.29,1	− 1,89	− 7,6

Florenz. (*Tanzini*. A. N. IX, 149.)

April 30.	71.	21.12. 22,41	16. 5.27,3	+ 1. 45,60	− 14.30,7	21.14. 8,01	15.50.56,6	− 0,31	− 1,6
	78.	21.13. 35,08	16.27.27,1	+ 33,00	− 36.46,3	8,08	40,8	− 0,19	+29,3
Mai 1.	78.	35,11	27,3	− 58,05	− 3. 6,1	21.14. 33,16	16.24.21,2	− 0,43	+14,7
2.	78.	35,14	27,4	+ 1. 21,90	+ 28.30,4	21.14. 57,04	16.55.57,8	− 0,59	+ 6,3
3.	87.	21.14. 59,08	17.20.22,9	+ 19,95	+ 5.41,8	21.15. 19,03	17.26. 4,7	+ 0,39	+18,8
5.	82.	21.14. 14,26	19. 4.49,6	+ 2. 2,30	− 39.38,0	21.16. 16,56	18.25.11,6	−12,76	+12,6
6.	82.	14,30	49,8	+ 2. 8,90	− 12.42,7	21.16. 23,20	18.52. 7,1	+ 0,20	+45,7
10.	111.	21.20. 2,37	20.59.56,2	− 2. 32,10	− 28.37,5	21.17. 30,27	20.31.18,7	+ 0,13	+ 6,4
18.	123.	21.22. 16,06	22.53.47,8	− 3. 54,05	+ 17.15,5	21.18. 22,01	23.11. 3,1	− 0,12	+18,7
19.	90.	21.16. 20,58	23.32.50,1	+ 1. 58,40	− 5.51,0	21.18. 18,98	23.26.59,1	+ 0,40	+43,3
	123.	21.22. 16,09	22.53.48,0	− 3. 56,20	+ 34.11,0	19,89	27.59,0	− 0,56	− 3,2
20.	90.	21.16. 20,61	23.32.50,3	+ 1. 54,30	+ 11.24,5	21.18. 14,91	23.44.14,8	− 0,79	− 7,9
21.	90.	20,65	50,5	+ 1. 48,65	+ 26.51,0	21.18. 9,30	23.59.41,5	− 1,60	+ 9,2
22.	92.	21.16. 33,83	24.35. 7,0	+ 1. 24,20	− 20.43,5	21.17. 58,03	24.14.23,5	+ 0,37	+42,5
23.	92.	33,85	7,4	+ 1. 11,80	− 5.36,0	21.17. 45,65	24.29.31,1	+ 1,26	+ 5,8
24.	92.	33,88	7,4	+ 58,45	+ 8.40,5	21.17. 32,33	24.43.47,9	+ 0,76	−12,4
25.	92.	33,92	7,6	+ 43,30	+ 21.52,0	21.17. 17,22	24.56.59,6	− 0,13	− 6,6
26.	92.	33,95	7,8	+ 25,60	+ 34.56,0	21.16. 59,55	25.10. 3,8	− 1,12	−12,3
	95.	21.17. 2,75	25.26.45,3	− 6,50	− 17.27,0	56.25	9.18,3	+ 2,04	+38,4
28.	95.	2,81	45,5	− 48,60	+ 7. 8,5	21.16. 14,21	25.33.54,0	+ 0,39	− 6,6
29.	95.	2,84	45,7	− 1. 12,05	+ 18.20,5	21.15. 50,79	25.45. 6,2	− 1,56	− 7,7

Datum	No.	AR. St.	Decl. St.	Comet-St. AR.	Comet-St. Decl.	AR. Com.	Decl. Com.	$\triangle a$	$\triangle \delta$
Mai 30.	95.	$21^h17^m\ 2^s,87$	$26^0 41'45'',8$	$-1^m41^s,45$	+28'34'',5	$21^h15^m21^s,42$	$25^0 55'20'',3$	$-0^s,07$	+ 12'',1
31.	102.	33,03	21,7	−2. 42,80	−35.43,5	21.14. 50,23	26. 5.38,2	+0,75	+ 2,6
Juni 1.	102.	33,06	21,9	−3. 15,55	−26.25,5	21.14. 17,51	26.14.56,4	+1,12	+ 12,7
2.	102.	33,09	22,2	−3. 49,05	−17.16,0	21.18. 44,04	26.24. 6,2	+0,01	− 2,0
10.	102.	33,34	24,1	−9. 49,10	+35. 6,0	21. 7. 44,24	27.16.30,1	+0,42	− 7,6
11.	61.	21. 4. 5,49	26.51.46,1	+2. 44,25	+28.43,0	21. 6. 49,74	27.20.29,1	+0,81	− 5,1
12.	61.	5,51	46,3	+1. 48,70	+32. 3,5	21. 5. 54,21	27.23.49,8	+0,49	+ 1,8
14.	61.	5,56	46,7	− 10,20	+37.34,0	21. 3. 55,36	27.29.20,7	+0,60	− 8,8
19.	61.	5,67	47,8	−5. 38,40	+41.12,0	20.58. 27,27	27.32.59,8	−0,03	− 19,6
22.	56.	20.55. 36,11	27.39.26,2	− 44,70	−11.21,5	20.54. 51,41	27.28. 4,7	+0,38	− 12,2
23.	48.	20.47. 21,21	27.24.59,9	+6. 12,30	+ 29,0	20.53. 33,51	27.25.28,9	+1,98	− 25,1
24.	48.	21,24	25. 0,2	+5. 0,30	− 3.12,0	20.52. 21,54	27.21.48,2	−0,56	− 2,0
25.	48.	21,26	0,4	+3. 43,75	− 6.58,5	20.51. 5,01	27.18. 1,9	+0,59	− 5,9
26.	48.	21,28	0,7	+2. 25,45	−12.16,0	20.49. 46,73	27.12.44,7	+2,29	+ 46,9
28.	48.	21,33	1,2	− 12,70	−22.23,0	20.47. 8,63	27. 2.38,2	+0,23	+ 6,9
29.	48.	20.47. 21,35	27.22. 1,4	−1. 32,10	−28.33,5	20.45. 49,25	26.56.27,9	+0,01	+ 9,2
30.	47.	20.44. 55,09	26.27.58,1	− 24,05	+22. 7,0	20.44. 31,04	26.50. 5,1	−1,53	− 7,3
Juli 1.	47.	55,10	58,2	−1. 44,60	+14.46,5	20.43. 10,50	26.42.44,7	−1,79	− 1,2
2.	47.	55,10	58,2	−3. 9,00	+ 6.26,5	20.41. 46,10	26.34.24,7	+1,18	+ 30,7
3.	47.	55,11	58,2	−4. 29,50	− 1.24,0	20.40. 25,61	26.26.34,2	+0,47	+ 4,1
10.	39.	20.29. 52,47	25.52.41,7	+1. 6,50	−38. 5,5	20.30. 58,97	25.14.36,2	+0,88	+ 21,4
11.	38.	20.28. 53,68	25.18. 2,3	+ 43,95	−16.13,0	20.29. 37,63	25. 1.49,3	+2,30	+ 48,1
12.	38.	53,69	2,5	− 35,25	−28.29,0	20.28. 18,44	24.49.33,5	+2,46	+ 30,3
13.	43.	20.31. 22,51	24.11.24,0	−4. 22,70	+26. 4,5	20.26. 59,81	24.37.28,5	+2,25	− 28,7

Juli 15.						20h24m28s35	24° 8′47″,5	−0s82	+ 60″2
16.						20.23. 9,70	23.55.16,5	+2,04	+ 22,0
17.	28.	20h20m 1s22	23°14′17″4	+1m54s65	+26′55″5	20 21. 55,87	23.41.12,9	−0,11	− 18,6
18.	28.	1,23	17,6	+ 11,30	+11.52,0	20.20. 42,53	23.26. 9,6	+0,46	+ 3,9
19.	28.	1,24	17,9	− 32,80	− 4.20,5	20.19. 28,44	23. 9.57,4	+0,76	+ 49,5
20.	28.	1,24	18,1	−1. 44,90	−18.54,0	20.18. 16,34	22.55.24,1	+1,70	− 5,7
21.	28.	1,25	18,4	−2. 52,15	−35. 9,5	20.17. 9,10	22.39. 8,9	−1,49	+ 15,8
22.	21.	20.14. 10,60	22.19. 4,3	+1. 48,60	+ 4.12,0	20.15. 59,20	22.23.16,3	−0,43	+ 1,3
23.	21.	10,61	4,5	+ 39,85	−12.21,0	20.14. 50,46	22. 6.43,5	+0,51	+ 5,8
24.	21.	10,61	4,8	− 28,10	−29.18,5	20.13. 42,51	21.49.46,3	+2,05	+ 18,2
25.	7.	20. 8. 54,03	21. 5.16,6	+3. 44,65	+27.51,0	20.12. 38,68	21.33. 7,6	+1,51	+ 5,3
26.	7.	54,03	16,9	+2. 39,30	+11. 4,0	20.11. 33,33	21.16.20,9	+3,17	− 25,4
30.	6.	20. 2. 29,12	20.25. 8,8	+5. 0,40	−22.21,5	20. 7. 29,52	20. 2.47,3	+3,45	+ 22,8
31.	5.	20. 0. 51,41	19.44. 7,9	+5. 47,90	+ 0.16,5	20. 6. 39,31	19.44.24,4	−3,79	− 10,2
Aug. 1.	5.	51,41	8,2	+4. 52,35	−18.23,0	20. 5. 43,76	19.25.45,2	−2,04	− 0,6
8.	3.	19.56. 36,52	17.16. 1,3	+3. 54,45	+ 5.13,5	20. 0. 30,97	17.21.14,8	+1,65	− 1,3
9.	3.	36,51	1,4	+3. 15,80	−14.12,5	19.59. 52,31	17. 1.48,9	+0,93	+ 33,3
10.	2.	19.56. 31,39	16.37.20,7	+2. 48,70	+ 7. 8,0	19.59. 20,09	16.44.28,7	−3,59	− 6,7
11.	2.	31,39	20,9	+2. 12,50	− 8.48,5	19.58. 43,89	16.28.32,4	−0,80	−141,3
12.	2.	31,39	21,0	+1. 37,15	−29. 9,5	19.58. 8,54	16. 8.11,5	+1,35	− 28,0
13.	1.	19.55. 46,07	15.33.53,2	+1. 53,90	+15.43,0	19. 57. 39,97	15.49.36,2	−0,97	− 1,3
14.	1.	46,08	53,4	+1. 21,50	− 2.56,5	19.57. 7,58	15.30.56,9	+1,90	+ 18,8
15.	1.	46,08	53,6	+ 53,70	−19.44,5	19.56. 39,78	15.14. 9,1	+2,34	− 55,8
16.	1.	46,08	53,7	+ 28,30	−38. 9,5	19.56. 14,38	14.55.44,2	+1,72	− 46,1

Bei den Florentiner Beobachtungen sind nicht die Vergleichungen, sondern die Positionen des Cometen und der Vergleichsterne gegeben, sodass ich die Differenzen durch Subtraction dieser Positionen bilden

und dann an den neu reducirten Sternort anbringen musste. Den Vergleichstern für die Beobachtungen von Juli 15. und 16. habe ich nicht gefunden, habe daher den Cometenort angenommen. wie ihn *Tanzini* giebt. Die Declination des Vergleichsternes für Juli 31. und August 1. ist wahrscheinlich verschrieben: sie lautet nämlich 19°14′6″, während der von mir benutzte Stern den Cometenort ganz gut darstellt, wie auch die Beobachtung vom Mai 10. wohl fälschlich auf Mai 11. datirt war. Die letzte Beobachtung von August 17. habe ich weggelassen, da sie zu bedeutend von der Ephemeride abweicht.

Kremsmünster. (*Koller*. A. N. IX, 291.)

Datum	No.	AR. St.	Decl. St.	Comet-St. AR.	Comet-St. Decl.	AR. Com.	Decl. Com.	Δα	Δδ
Mai 18.	123.	21h22m16s06	22°53′47″8	− 3m58s20	+19′ 4″5	21h18m17s86	23°16′52″3	+3s66	−230″1
	129.	21.24. 9,48	23 5.56,8	− 5. 50,23	+ 6.14,3	19,25	12.11,1	+2,27	+ 51,1
19.	123.	21.22. 16,09	22.53.48,0	− 4. 0,50	+34.15,5	21.18. 15,59	23.28. 3,5	+3,40	+ 65,5
	132.	21.27. 46,87	23.41.55,7	− 9. 28,87	−13.29,5	18,00	26,2	+0,98	+ 42,8
23.	135.	21.36. 59,58	24.52. 0,0	−19. 13,91	−21.30,0	21.17. 45,67	24.30.30,0	−0,18	+ 34,6
	137.	21.38. 16,49	24.48.11,8	−20. 31,96	−17.22,3	44,53	49,5	+0,96	+ 15,1
	138.	21.38. 41,79	24.46.45,5	−20. 57,74	−14. 0,1	44,05	32.45,4	+1,44	−100,8
Juni 1.	116.	21.20. 12,29	26.52.21,1	− 5. 58,10	−36,15,1	21.14. 14,19	26.16. 6,0	+1,64	− 12,4
2.	116.	12,32	21,3	− 6. 34,50	−27. 4,1	21.13. 37,82	26.25.17,2	+2,55	− 20,9
3.	116.	12,35	21,5	− 7. 13,00	−18,50,5	21.12. 59,35	26.33.31,5	+4,53	− 21,9
17.	48.	20.47. 20,88	27.24.58,5	+13. 12,00	+ 7,39,5	21. 0. 32,88	27.32.38,0	+5,97	+ 24,5
	116.	21.20. 12,77	26.52.24,5	−19. 40,50	+39.40,5	32,27	5,0	+6,58	+ 57,5
23.	48.	20.47. 21,21	27.24.59,9	+ 6. 9,00	− 0.45,5	20.53. 30,21	27.24.14,4	+4,44	+ 47,2
26.	48.	21,28	25. 0,7	+ 2. 19,80	−12.21,6	20.49. 41,08	27.12.39,7	+2,82	+ 35,0
27.	48.	21,31	0,9	+ 0. 57,10	−17.34,4	20.48. 18,41	27. 7.26,5	+3,39	+ 30,6
28.	48.	21,33	1,2	− 0. 18,80	−23.33,4	20.47. 2,53	27. 1.27,8	−1,95	+ 42,5

Cracau. (*Weisse.* A. N. VIII, 490.)

Auch bei den in Cracau angestellten Beobachtungen sind die Positionen des Cometen und der Vergleichsterne aufgezeichnet; es sind jedoch die Beobachtungstage gruppenweise zusammengefasst und die gemeinsamen Vergleichsterne hinzugefügt, ohne dass gesagt ist, ob der Comet an jedem Tage einer Gruppe mit jedem einzelnen Sterne verglichen ist. Daher glaubte ich am richtigsten zu verfahren, wenn ich jede Position des Cometen mit jedem der zur Gruppe zugehörigen Sterne verglich und die gefundene Differenz an den Ort des neu reducirten Sternes anbrachte, und nun erst die Abweichung von der Ephemeride bestimmte. Damit erhielt ich folgende Resultate:

Datum	No.	AR. St.	Decl. St	Comet-St. AR.	Comet-St. Decl.	AR. Com.	Decl. Com.	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
Mai 11.	111.	21ʰ20ᵐ 2ˢ37	20°59′56″2	−2ᵐ17ˢ72	− 5′ 5″3	21ʰ17ᵐ44ˢ65	20°54′50″9	−0ˢ81	+ 40″0
12.	111.	21.19. 6,15	21.25.52,7	−1. 11,42	− 9 10,3	21.17. 54,73	21.16.42,4	−0,80	−106,4
	120.	21.21. 14,76	21.26.23,1	−3. 20,00	− 9.43,8	54,76	39,3	−0,83	−102,9
18.	93.	21.16. 32,76	23. 0. 1,4	+1. 50,71	+13. 4,3	21.18. 23,47	23.13. 5,7	−1,78	− 71,7
	123.	21.22. 16,06	22.53.47,8	−3. 52,39	+19.17,5	23,67	5,3	−1,98	− 71,3
	129.	21.24. 9,48	23. 5.56,8	−5. 45,52	+ 7.10,7	23,96	7,5	−2,27	− 73,5
19.	90.	21.16. 20,58	23.32,50,1	+2. 1,75	− 4.21,9	21.18. 22,33	23.28.28,2	−3,12	− 20,8
	129.	21.24. 9,48	23. 5.56,8	−5. 46,92	+22.29,3	22,56	26,1	−3,35	− 18,7
20.	90.			+1. 55,02	+12.30,2	21.18. 15,60	23.45.20,3	−1,24	− 39,3
	94.	21.16. 16,92	23.48. 6,4	+1. 29,12	− 2.48,0	16,04	18,4	−1,68	− 37,4
	101.	21.17. 24,32	23.41.47,6	+ 51,28	+ 3.31,7	15,60	19,3	−1,24	− 38,3
	104.	21.17. 39,92	23.45.42,7	+ 35,26	− 26,5	15,18	16,2	−0,82	− 35,2

Datum	No.	AR. St.	Decl. St.	Comet-St. AR.	Comet-St. Decl.	AR. Com.	Decl. Com.	Δα	Δδ
Mai 20.	110.	21h19m 0s,44	23°33′36″,7	− 45s,10	+11′42″,2	21h18m15s,34	23°45′18″,9	−0s,98	− 37″,9
	113.	21.19. 50,31	23.35.46,8	−1m34,78	+ 9.32,2	15,53	19,0	−1,17	− 38,0
	117.	21.20. 24,45	23.52.38,1	−2. 8,76	− 7.18,4	15,69	19,7	−1,33	− 38,7
	119.	21.21. 7,47	23.55.56,4	−2. 51,83	−10.37,0	15,64	19,4	−1,28	− 38,4
Mai 21.	90.			+1. 49,46	+28.33,4	21.18. 10,04	24° 1′23,5	−2,47	− 86,9
	94.			+1. 23,55	+13.15,1	10,47	21,5	−2,90	− 84,9
	101.			+ 45,71	+19.34,8	10,03	22,4	−2,46	− 85,8
	104.			+ 29,69	+15.36,7	9,61	19,4	−2,04	− 87,2
	110.			− 50,65	+27.45,4	9,79	22,1	−2,22	− 85,5
	113.			−1. 40,35	+25.35,3	9,96	22,1	−2,39	− 85,5
	117.			−2. 14,33	+ 8.44,7	10,12	22,8	−2,55	− 86,2
	119.			−2. 57,40	+ 5.26,1	10,07	22,5	−2,50	− 85,9
24.	92.	21.16. 33,88	24.35. 7,9	+1. 0,29	+ 8.42,2	21.17. 34,17	24.43.49,6	−1,34	+ 4,5
25.	92.			+ 45,17	+23. 6,4	21.17. 19,05	24.58.13,8	−2,63	− 54,1
28.	95.	21.17. 2,81	25.16.45,5	− 47,50	+ 7.10,2	21.16. 15,31	25.33.55,7	−2,10	+ 32,8
29.	95.			−1. 6,07	+48.59,2	21.15. 56,74	25.45.44,7	−8,04	− 40,1
30.	100.	21.17. 20,12	25.54.12,8	−1. 57,87	+ 2.25,3	21.15. 22,25	25.56.38,1	−2,12	− 51,5
Juni 1.	103.	21.17. 40,14	26.24.59,6	−3. 21,87	−12. 7,4	21.14. 18,27	26.12.52,2	−0,87	+155,4
	105.	21.17. 55,61	26.25.48,5	−3. 37,46	−12.54,2	18,15	54,3	−0,75	+153,3
2.	103.			−3. 56,82	− 0,5	21.13. 43,32	26.24.59,1	−0,60	− 36,8
	105.			−4. 12,40	− 47,4	43,21	25. 1,1	−0,49	− 38,8
4.	72.	21.12. 23,39	26.47.21,3	+ 3,23	− 6.23,7	21.12. 26,62	26.40.57,6	−1,38	− 7,9
12.	64.	21. 7. 14,03	27.27.14,4	−1. 22,13	− 1.31,7	21. 5. 51,90	27.25.42,7	−1,05	− 98,0

Altona. (*Petersen*, *von Nehus*. A. N. VIII, 365.)

Für die Altonaer Beobachtungen finden sich an der oben angeführten Stelle nur die Eintritte und Austritte des Cometen und der Vergleichsterne am Ringmikrometer notirt und es musste also meine Aufgabe sein, aus diesen Angaben die Differenzen der Rectascension und Declination selbst in bekannter Weise herzuleiten. Die Maasse der Ringe waren gegeben, nur fand ich, dass für das Instrument, welches im Juli angewendet wurde, die gegebenen Maasse unmöglich die Radien, wie angegeben, sondern die Durchmesser der Peripherien des Ringes bedeuten, unter welcher Annahme die Beobachtungen recht gut unter einander stimmen. Die Beobachtungen corrigirte ich wegen der Refraction unter Anwendung der Formeln aus *Brünnow*, Sphärische Astronomie, p. 593, die darin vorkommende Grösse k aber entnahm ich den Tafeln, die *Bessel* im III. Bande der Astr. Nachr. mitgetheilt hat. Für die Tage, für welche Temperatur und Barometerstand notirt waren, berücksichtigte ich diese beiden Grössen in folgender Weise. Die Refraction R wird berechnet aus drei Summanden, von denen der erste R_h nur von der Höhe des Sternes, der zweite R_t von R_h und der Temperatur t, und der dritte R_b von $R_h + R_t$ und dem Barometerstande b abhängt, mithin ist ihr Differential

$$dR = dR_h + \frac{\partial R_t}{\partial R_h} . dR_h + \frac{\partial R_t}{\partial t} . dt + \frac{\partial R_b}{\partial R_h} . dR_h + \frac{\partial R_b}{\partial R_t} . dR_t + \frac{\partial R_b}{db} . db.$$

Die Differentialquotienten in diesem Ausdrucke lassen sich durch Interpolation aus Refractionstafeln leicht finden; es zeigt sich aber, dass nur die nach dR_h genommenen von Einfluss sind, und ich habe deshalb nur gesetzt

$$dR = dR_h \left(1 + \frac{\partial R_t}{\partial R_h} + \frac{\partial R_b}{\partial R_h}\right).$$

Mit der in Klammer gestellten Grösse habe ich also das von *Bessel* gegebene k multiplicirt, um es nach Temperatur und Barometerstand zu corrigiren. Die Beobachtungen selbst gebe ich nun in derselben Anordnung, wie bei den anderen Sternwarten; die gar zu stark abweichenden lasse ich ganz fort, und denen, bei welchen die Vergleichung nur an e i n e m Rande des Ringes stattgefunden hat, gebe ich das Gewicht $= \frac{1}{2}$; für alle übrigen ist das Gewicht $= 1$ gesetzt.

Datum	Sternzeit	St.	AR. St.	Decl. St.	Comet-St. AR.	Comet-St. Decl.	AR. Com.	Decl. Com.	Δα	Δδ	G.
April 29.	$16^h19^m20^s$	*a.*	21^h13^m $4^s{,}19$	15^0 6′45″,2	+ $35^s{,}88$	+10′11″,4	$21^h13^m40^s{,}07$	$15^0$16′56″,6	+$1^s{,}14$	+17″,7	
30.	16.34.53.	*d.*	21.15. 8,39	15.46.22,6	− 59,63	+ 6 12,2	21.14. 8,76	15.52.16,2	−0,25	−18.6	
	17. 6.20.	*δ.*	21.16. 3,86	15.38.24,5	−1^m54,65	+15. 2,5	9,21	53.27,0	−0,15	−25,8	
	17.34.38.	*δ.*			−1. 54,64	+16. 2,6	9.22	54.27,1	+0,34	−45,4	
	17.42. 3.	*e.*	21.12. 22,41	16. 5.27,3	+1. 47,27	−11.52,4	9,68	53.33,9	+0,01	+18,4	
	17.42.40.	*f.*	21.13. 35,08	16.27.27,1	+ 37,07	−33.15,5	12,15	54.11,6	−2,45	−18,4	
	17.42.53.	*g.*	21.14. 2,61	16.29.29,4	+ 10,08	−35 55,5	12,69	53.33,9	−2,99	+19,6	
Mai 1.	16.37.42.	*e.*	21.12. 22,44	16. 5.27,5	+2. 10,80	+19 57,7	21.14. 33,24	16.25.25,2	+0,13	+21,7	
	17.36.13.	*e.*			+2. 10,84		34,37		+1,09		
	16.38.18.	*f.*	21.13. 35,11	16.27.27,4	+ 58,31	− 2. 0,4	33,42	27,0	−0,04	+20,7	
	16.48.12.	*f.*			+ 58,31	− 2.15,3	33,42	12,1	+0,13	+49,3	
	16.55. 4.	*f.*			+ 58,30	− 1. 1,0	33,41	26.26,4	+0,26	−15,6	
	17. 2.31.	*f.*			+ 58,31	− 1.39,3	33,42	21,0	+0,38	+32,9	
	17.36.50.	*f.*			+ 58,30	− 58,3	34,38	27. 8,1	+0.97	+39,0	
3.	16. 0.48.	*l.*	21.14. 59,08	17.20.22,9	+ 20,29	+ 7.28,3	21.15. 19,37	17.27.51,2	+0,88	− 6,4	
	16. 6.48.	*l.*			+ 20,44	+ 8.21,4	19,32	28.44,3	+1,03	+ 0,0	½
	16.12.58.	*l.*			+ 20,44		19,32		+1,12		
	16.23.15.	*l.*			+ 21,45	+ 8.22,0	20,53	44,9	+0,08	−31,9	
	16.36. 9.	*l.*			+ 21,05		20,13		+0,69		
	16.49.45.	*l.*			+ 21,47	+ 8.31,7	20,55	54,6	+0,48	− 8,1	
	17.17.52.	*l.*			+ 22,59	+ 9. 1,7	21,67	29.24,6	−0,19	− 2,9	
	17.28.22.	*l.*			+ 21,48	+ 8.27.6	20,56	28.50,5	+1,01	+38,1	½
	16.21. 5.	*m.*	21.10. 38,15	17.16.45,6	+4. 42,93	+11.33,9	21,08	19,5	−0,50	− 9,0	
	16.33.59.	*m.*			+4. 41,78		19,93		+0,86		
	16.47.35.	*m.*			+4. 42,43		20.58		+0,42		

Mai 3.	16h21m24s.	k.	21h11m16s,84	17° 6'48",2	+4m 3s,34		21h15m20s,18		+0s,40		
	16.34. 18.	k.			+4. 3,12	+21'18",2	19,96	17°28' 6",4	+0.83	+20",7	
	16.47. 54.	k.			+4. 3,89		20,73		+0,27		
	16.33. 55.	i.	21. 10. 29,94	17. 0.38,1	+4. 49,72	+27.31,2	19,66	9,3	+1,13	+18,2	
	16.47. 31.	i.			+4. 50,50	+28. 8,0	20,44	46,1	+0,56	− 2,4	
4.	16. 7. 6.	l.	21. 14. 59,11	17.20.23,1	+ 42,35	+36.56,9	41,46	17.57.20,0	+1,02	−14,4	
	16.15. 59.	l.			+ 43,26	+37.52,2	42,37	58.15,3	+0,24	−59,0	
	16.24. 28.	ϑ.	21. 12. 54,29	18. 7.30,1	+2. 18,77		43,06		−0,32		
	16.58. 3.	ϑ.			+2. 48,64		42,93		+0,32		
	17. 8. 50.	ϑ.			+2. 48,52		42,81		+0,60		
	17.51. 1.	ϑ.			+2. 50,27	− 8.26,0	44,56	59. 4,1	−0,50	+ 7.3	
	16.26. 46.	o.	21. 17. 30,59	17.55.47,0	−1. 47,26	+ 2. 2,2	43,33	57.49,2	−0,55	−19,9	
	17. 0. 19.	o.			−1. 47,26		43,33		+0,04		
	17.11. 18.	o.			−1. 47,88		42,71		+0,74		
	16.35. 34.	p.	21. 18. 33,68	18.38.32,4	−2. 50,06	−40.36,7	43,62	57.55,7	−0,71	−15,8	
	16.41. 30.	p.			−2. 50,82	−40.35,4	42,86	57,0	+0,14	− 9,9	
	17.23. 58.	p.			−2. 49,39	−40.37,7	44,29	54,7	−0,65	+43,7	½
	17.31. 42.	p.			−2. 49,28	−39.27,5	44,40	59. 4,9	−0,64	−17,2	
	17.42. 11.	p.			−2. 49,53	−39.10,1	44,15	22,3	−0,12	−22,0	
	17. 0. 12.	n'.	21. 17. 15,60	17 44. 0,8	−1. 31,78		43,82		−0,55		
	17.11. 0.	n.			−1. 32,28		43,32		+0,23		
	17.53. 12.	n.			−1. 31,50	+15.20,0	44,07	20,8	+0,03	− 5,9	
6.	15.20. 39.	q.	21. 14. 14,30	19. 4.49,8	+2. 9,75	−11.50,3	21. 16. 24,05	18.52. 4,7	−0,68	−54,8	½
	15.26 36.	q.			+2. 9,16		23,46		−0,01		
	15.37. 17.	q.			+2. 9,66		23,96		−0,37		
	15.46. 50.	q.			+2. 9,66		23,96		−0,32		
	16.14. 56.	q.			+2. 9,45	−11.51,5	23,75	58,3	+0,35	+ 6,9	
	16.21. 52.	q.			+2. 9,69		23.99		+0,20		
	16.49. 54.	q.				−10.56,5		53,3		− 9,1	

Datum	Sternzeit	St.	AR. St.	Decl. St.	Comet-St. AR.	Comet-St. Decl.	AR. Com.	Decl. Com.	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	G.
Mai 6.	$16^h57^m20^s$	*q.*			$+2^m\ 9^s91$		$21^h16^m24^s21$		$+0^s64$		
	17.10. 32.	*q.*			+2. 10,78		25,08		−0,22		
	17.18. 46.	*q.*			+2. 11,03		25,33		−0,36		
	17.27. 55.	*q.*			+2. 10,03		24,33		+0,76		
	17.36. 17.	*q.*			+2. 10,02		25,32		−0,12		
	15.28. 46.	*r.*	$21^h18^m33^s74$	18°38′32″,7	−2. 9,80	+13′55″,1	23,94	18°52′27″,8	−0,46	−14″,0	
	15.39. 26.	*r.*			−2. 10,16		23,58		+0,04		
	15.48. 59.	*r.*			−2. 9,65		24,09		−0,42		
	16. 6. 24.	*r.*			−2. 10,14		23,60		+0,38		
	16.59. 29.	*r.*			−2. 10,15		23,59		+1,12		
7.	17. 0 57.	*q.*	21.14. 14,32	19. 4.50,0	+2. 29,25		21.16. 43,57		+0,05		
	16.28. 52.	*r.*	21.18. 33,77	18.38.32,7		+41.29,9		19.20. 2,6		−20,4	½
	16.33. 53.	*r.*			−1. 50,93	+41.39,2	42,86	11,9	+0,47	−24,4	½
	17. 5. 54.	*r.*			−1. 50,63	+42.20,8	43,14	53,5	+0,59	−31,6	½
	17.12. 28.	*r.*			−1. 50,14	+41.44,0	43,63	16,7	+0,19	+12,2	
13.	16.15. 30.	*x.*	21.19. 9,90	21.43.34,5	−1. 7,23		21.18. 2,65		+1,30		
	16.45. 39.	*x.*			−1. 6,48	− 5.54,7	3,42	21.37.39,8	+0,70	+19,2	
	16.54. 5.	*x.*			−1. 6,98	− 5.42,6	2,92	51,9	+1,25	+16,4	
	17. 0. 19.	*x*			−1. 5,48	− 5.31,9	4,42	38. 2,6	−0,21	+ 9,0	
	16.15. 28.	*λ.*	21.19. 6,07	21.25.52,3	−1. 2,81		3,26		+0,68		
	16.23. 13.	*λ.*			−1. 1,56	+12.13,0	4,51	5,3	−0,52	−25,6	
	16.30. 33.	*λ.*			−1. 3,05	+11.38,8	3,02	37.31,1	+1,01	+14,9	
	16.38. 0.	*λ.*			−1. 2.80	+12.22,0	3,27	38.14,3	+0,81	−21,9	
	16.45. 36.	*λ.*			−1. 3,17		2,90		+1,22		

Mai 13.	16h54m 2s.	λ.			−1m 2s66		21h18m 3s44		+0s76		
	17. 0. 17.	λ.			−1. 2,29		3,78		+0,43		
	16. 16. 32.	t.	21h21m14s79	21°26′23″2	−3. 11,06		3,73		+0,22		
	16. 24. 18.	t.			−3. 10,56	+12′ 4″1	4,23	21°38′27″3	−0,23	−46″7	½
	16. 39. 4.	t.			−3. 11,04	+11.21,6	3,75	37.44,8	+0,33	+ 8,5	
	16. 46. 41.	t.			−3. 10,53		4,26		−0,13		
	17. 1. 22.	t.			−3. 11,28		3,51		+0,72		
	16. 38. 28.	s.	21. 20. 2,23	20.59.55,6	−1. 58,66	+38.36,5	3,57	38.32,1	+0,51	−38,3	½
	16. 46. 4.	s.			−1. 57,66		4,57		−0,44		
15.	15. 33. 15.	μ.	21. 18. 53,10	22. 13. 5,8	− 36,78	+ 3.48,5	21. 18. 16,32	22.16.54,3	+0,59	− 5,7	
	15. 44. 16.	μ.			− 37,41	+ 3.54,3	15,69	17. 0,1	+1,25	− 2,7	
	15. 58. 42.	μ.			− 36,78		16,32		+0,67		
	16. 10. 14.	μ.			− 37,03		16,07		+0,96		
	16. 23. 35.	μ.			− 37,03		16,07		+1,00		
	16. 42. 28.	μ.			− 36,67	+ 4.42,4	16,43	17.48,2	+0,70	− 4,2	
	15. 41. 41.	u.	21. 13. 42,96	22.10.14,9	+4. 33,20	+ 6.40,4	16,16	16.55,3	+0,77	0,0	
	15. 56. 7.	u.			+4. 33,20		16,16		+0,82		
	16. 7. 39.	u.			+4. 33,33		16,29		+0,73		
	16. 21. 1.	u.			+4. 33,33		16,29		+0,77		
	16. 39. 53.	u.			+4. 33,72	+ 7.31,7	16,68	17.46,6	+0,44	− 4,7	
	17. 2. 2.	v.	21. 22. 16,06	22.53.47,8		−35.25,7		18.22,1		−22,4	
20.	15. 50. 17.	a′.	21. 16. 46,92	23. 48. 6,4	+1. 26,77	− 3.16,8	21. 18. 13,69	23.44.49,6	+0,52	+ 6,6	
	15. 57. 16.	a′.			+1. 27,02		13,94		+0,24		
	16. 14. 50.	a′.			+1. 27,01	− 2.50,5	13,93	45.15,9	+0,17	− 3,3	
	16. 21. 35.	a′.			+1. 26,63	− 2.36,4	13,55	30,0	+0,53	−12,9	
	16. 28. 5.	a′.			+1. 26,89	− 2.34,1	13,81	32,3	+0,24	−10,8	
	16. 35. 41.	a′.			+1. 27,39	− 2.21,9	14,31	44,5	−0,29	−18,0	

Datum	Sternzeit	St.	AR. St.	Decl St.	Comet-St.		AR. Com.	Decl. Com.	$\triangle\alpha$	$\triangle\delta$	G.
					AR.	Decl.					
Mai 20.	16h43m11s	a'.			+1m26s,51		21h18m13s,43		+0s,56		
	16. 50. 25.	a'.			+1. 26,63	— 2'12",5	13,55	23°45'53",9	+0,41	—17",6	
	16. 57. 53.	a'.			+1. 27,64	— 2. 20,1	14,56	46,3	—0,64	— 5,0	
	17. 5. 45.	a'.			+1. 26,64	— 2. 14,2	13,56	52,2	+0,33	— 5,6	
	17. 11. 2.	a'.			+1. 26,51		13,43		+0,44		
	15. 50. 44.	z.	21h17m39s,92	23°45'42",7	+ 33,89	— 57,5	13,81	44. 45,2	+0,40	+11,3	
	15. 57. 42.	z.			+ 34,25		14,17		+0,01		
	16. 15. 17.	z.			+ 33,63	— 35,2	13,55	45. 7,5	+0,55	+ 5,4	
	16. 22. 1.	z.			+ 33,50	— 13,2	13,32	29,5	+0,75	—12,2	
	16. 28. 32.	z.			+ 34,30	— 12,8	14,22	29,9	—0,17	— 8,2	
	16. 36. 7.	z.			+ 34,25	— 10,5	14,17	22,2	—0,15	+ 4,6	
	16. 43. 37.	z.			+ 33,75		13,67		+0,31		
	16. 50. 51.	z.			+ 34,25	+ 3,2	14,17	45,9	—0,22	— 9,3	
	16. 58. 10.	z.			+ 34,63	— 0,9	14,55	32,8	—0,63	+ 8,7	
	17. 6. 12.	z.			+ 33,50	+ 3,3	13,42	46,0	+0,47	+ 0,9	
	17. 11. 28.	z.			+ 33,50		13,42		+0,45		
	15. 57. 3.	y.	21. 16. 20,61		+1. 52,94		13,55		+0,41		
	15. 57. 34.	ξ.	21. 17. 24,30	23. 41. 47,4	+ 49,11		13,41		+0,76		
	16. 9. 6.	ξ.			+ 48,48	+ 3. 16,2	12,78	3,6	+1,35	+ 5,2	½
	16. 36. 0.	ξ.			+ 48,99	+ 3. 49,0	13,29	36,4	+0,73	— 9,7	
	16. 43. 37.	ξ.			+ 48,50		12,80		+1,19		
	16. 50. 43.	ξ.			+ 49,49	+ 3. 53,4	13,79	40,8	+0,16	— 4,3	
	Mittl. Zeit										
Juli 1.	10. 55. 16.		20. 42. 52,07	26. 45. 2,2	+ 14,50	— 2. 54,3	20. 43. 6,57	26 42. 7,9	—1,22	+16,7	

8.	11. 5. 22.		20. 33. 25,51	25.29. 1,9	+ 6,74	+ 8.42,1	20. 33. 32,25	25.37.44,0	+3,02	−42,4	
	11. 9. 36.				+ 8,37	+ 8.34,0	33,88	35,9	+1,15	−36,4	
	11.13. 16.				+ 7,24	+ 8. 5,8	32,75	7,7	+2,07	−10,0	
	11.17. 13.				+ 7,24	+ 8.57,5	32,75	59,4	+1,86	−63,5	
	11.22. 8.				+ 6,24		31,75		+2,58		
11.	11. 8. 54.		20.28. 53,68	25.18. 2,3	+ 39,89	−16.29,9	20. 29. 33,57	25. 1.32,4	+0,57	+12,1	
	11.15. 56.				+ 38,51	−16.16,5	32,19	45,8	+1,55	− 4,9	½
	11.22. 26.				+ 39,76	−16.28,3	33,44	34,0	−0,06	+ 3,7	
	11.31. 38.				+ 40,51	−16. 0,1	34,19	2. 2,2	−1,32	−29,1	½
	11.35. 20.				+ 39,31	−16.50,4	32,99	1.11,9	−0,33	+19,3	
	11.41. 44.				+ 39,86	−16.33,1	33,54	29,2	−1,23	− 1,2	
	11.49. 19.				+ 37,75	−16.39,4	31,43	22,9	+0,46	+ 1,4	½
	11.52. 56.				+ 37,01	−16.41,2	30,69	21,1	+1,00	+ 1,4	½
	11.57. 37.					−16.35,7		26,6		− 6,5	½
14.	11.36. 28.		20.21. 7,10	24.30.57,7	+4. 30,50		20. 25. 37,60		−0,61		
	11.49. 12.				+4. 29,15	− 9. 7,2	36,25	24.21.50,5	+0,05	+26,4	
	12.11. 37.				+4. 26,68	− 9.24,4	33,78	33,3	+1,33	+30,9	
	12.23. 16.				+4. 27,05	− 9.17,3	34,15	40,4	+0,32	+17,1	
	Meridian-Beobachtung						32,16	48,0	+0,44	−13,4	
15.	11.24. 21.		20. 14. 47,70	23.54.46,8	+9. 31,49	+13.39,2	20. 24. 19,19	24. 8.26,0	+1,31	+ 6,7	½
	11.50. 45.				+9. 31,25	+14. 7,5	18,95	54,3	+0,15	−36,7	
	11.29. 5.	*x*.	20. 24. 17,04	24. 9.24,3	+ 2,88	− 1. 7,7	19,92	16,6	+0,33	+13,4	
	11.55. 29.	*x*.			+ 3,38	− 31,8	20,42	52,5	−1,57	−38,0	
	12. 8. 4.	*x*.			+ 1,50	− 59,6	18,54	24,7	−0,36	−17,6	½
	12.14. 13.	*x*.			+ 1,12	− 1. 9,7	18,16	14,6	−0,80	−11,1	
	12.19. 21.	*x*.			− 1,00		16,04		+1,54		

Datum	Sternzeit	St.	AR. St.	Decl. St.	Comet-St.		AR. Com.	Decl. Com.	△α	△δ	G.
					AR.	Decl.					
Juli 26.	19h49m 7s.	α.	20h11m23s,55	21°10′13″,9	+ 7s,00	+ 3′56″,3	20h11m30s,55	21°14′10″,2	+ 0s,49	+18″,0	
	20.29. 59.	α.			+ 5,00	+ 3.11,8	28,55	13.25,7	+0,74	+33,1	
	21.31. 27.	α.			+ 3,00		26,55		0,00		
	20.35. 5.	β.	20.13. 23,12	21. 1.15,4	−1m55,00	+12.58,2	28,12	14.13,6	+0,96	−16,3	
	20.44. 56.	γ.	20.12. 18,90		− 50,00		28,90		−0,25		
	20.59. 17.	γ.			− 51,12		27,78		+0,25		
27.	19.33. 24.		20.11. 10,06	20.59.57,4	− 40,25	− 2.12,1	20.10. 29,81	20.57.45,3	+0,36	−31,0	
	20.20. 21.				− 41,12		28,94		−0,74		
	20.23. 58.				− 41,75		28,31		−0,26		
	20.28. 32.				− 41,63	− 3.16,3	28,43	56.41,1	−0,57	− 6,8	
	20.32. 1.				− 41,63		28,43		−0,72		
	21.23. 46.					− 3.48,4		56. 9,0		−14,7	½
28.	19.22. 31.	α.	20. 9. 8,72	20.53.29,0	+ 23,00	−13.41,5	20. 9. 31,72	20.39.47,5	−0,98	− 1,5	
	19.29. 16.	α.			+ 22,25	−13.44,5	30,97	44,5	−0,51	− 3,4	½
	19.35. 32.	α.			+ 21,50		30,22		−0,01		½
	19.48. 15.	α.			+ 22,00	−13.57,4	30,72	31,6	−1,03	− 4,4	
	19.43. 19.	β.	20. 9. 17,30		+ 14,00		31,30		−1,41		½
	20.26. 39.	β.			+ 12,55		29,85		−1,70		½
	20.41. 56.	β.			+ 11,00		28,30		−0,80		½
29.	20.28. 9.	α.	20. 9. 56,60	20.26. 1,4	−1. 24,75		20. 8. 31,85		−1,32		½
	20.33. 9.	α.			−1. 25,50	− 4.56,4	31,40	20.21. 5,0	−0,76	+17,6	½
	20.43. 26.	α.			−1. 26,83	− 4.49,1	29,77	12,3	+0,16	+ 2,6	
	21. 5. 13.	α.			−1. 26,25	− 5.22,8	30,35	20.38,6	−1,28	+20,4	½
	21.21. 23.	α.			−1. 28,00	− 5.16,8	28,60	44,6	−0,17	+ 2,3	
	21.38. 57.	α.			−1. 27,38		29,22		−1,48		

Juli 29.	20. 54. 45.	β.	20. 11. 29,89	20. 20. 57,2	−3. 0,05		29,84		−0,33		
	21. 56. 7.	β.			−3. 2,50		27,39		−0,33		
	22. 9. 20.	β.			−3. 3,13	−40,1	26,76	17,1	−0,17	−5,6	
	22. 19. 51.	β.			−3. 3,13	−33,1	26,76	24,1	−0,64	−20,4	
Juli 30.	20. 57. 41.	α.	20. 7. 25,58	20. 3. 19,9	+ 9,13	−9,8	$20^h\ 7^m 34^s,71$	20. 3. 10,1	−1,40	+6,6	
	21. 3. 32.	α.			+ 8,25	−2,4	33,83	47,5	−0,75	−5,1	½
	21. 9. 36.	α.			+ 7,50	−18,8	33,08	1,1	−0,24	+6,8	½
	21. 16. 7.	α.			+ 7,50		33,08		−0,48		½
	21. 34. 21.	α.			+ 5,25	−47,0	30,73	2. 32,9	+1,47	+16,6	½
	21. 37. 16.	α.			+ 6,00	−56,1	31,58	23,8	+0,21	+23,5	½
	21. 43. 16.	α.			+ 7,00		32,58		−1,02		½
	31. 53. 0.	α.			+ 6,25	−39,8	31,83	40,1	−0,65	−4,5	½
	21. 56. 31.	α.			+ 6,00	−8,2	31,58	3. 11,7	−0,52	−38,7	½
	22. 1. 18.	α.			+ 7,00	−39,6	32,58	2. 40,3	−1,71	−19,9	½
	22. 8. 26.	α.			+ 4,50	−8,5	30,08	3. 41,4	+0,52	−47,3	½
	22. 12. 32.	α.			+ 3,25	−21,6	28,83	2. 58,8	+1,61	−37,3	½
	21. 20. 21.	β.	20. 8. 50,78	20. 2. 17,1	$-1^m 17,5$	+34,5	33,28	2. 51,6	−0,84	+8,3	½
	21. 25. 33.	β.			−1. 17,5	+47,8	33,28	3. 4,9	−1,64	−8,9	
	21. 57. 13.	β.			−1. 19,00	+55,9	31,78	3. 13,0	−0,76	−40,6	½
	22. 2. 0.	β.				+39,9		2. 57,0		−27,6	½
	22. 13. 15.	β.			−1. 21,50	+40,2	29,28	2. 57,3	+1,43	−36,8	½

Die Beobachtungen, welche sich auf mittlere Zeit beziehen, sind durch *von Nehus*, alle anderen durch *Petersen* ausgeführt.

Die Vergleichung der Cap-Beobachtungen s. Nachtrag.

IV. Bestimmung der persönlichen Fehler und der Gewichte.

Die vorstehenden Fehler, nach der Zeit geordnet, brachte ich in eine Tabelle, welche ich im Folgenden mittheile, zugleich um zu zeigen, in welcher Weise ich die Beobachtungen zu Normalörtern später vereinigt habe. Waren an einem Tage auf derselben Sternwarte mehrere Beobachtungen ausgeführt, so nahm ich aus denselben das Mittel, liess aber bei den Rectascensionen alle die Beobachtungen weg, welche um mehr als 4 Zeitsecunden, und bei den Declinationen die, welche um mehr als 100 Bogensecunden vom ungefähren Mittel abwichen. Somit erhielt ich folgende Uebersicht der

Abweichungen der Beobachtungen von der Ephemeride.

I. Normalort		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
April 21.	Marseille	-1^s01	$-5''0$
26.	Göttingen	+0,22	+ 1,2
27.	Göttingen	+0,45	+31,3
28.	Göttingen	−0,46	+11,3
	Bremen	−0,95	+22,5
29.	Göttingen	−0,47	+ 2,7
	Bremen	−0,65	− 4,2
	Altona	+1,14	+17,7
30.	Göttingen	+0,23	−21,1
	Bremen	−0,42	− 7,4
	Florenz	−0,25	+13,9
	Padua	+0,06	− 6,0
	Altona	−0,91	−11,7
Mai 1.	Mailand	+0,01	+ 0,5
	Florenz	−0,43	+14,7
	Padua	+0,49	− 7,0
	Kensington	+1,21	+19,8
	Altona	+0,42	+24,7
2.	Bremen	+1,88	−14,9
	Florenz	−0,59	+ 6,3
	Kensington	+2,46	+10,5
3.	Bremen	+0,55	−11,1
	Mailand	+0,48	−17,6
	Florenz	+0,39	+18,8
	Padua	+0,19	− 8,1
	Kensington	+1,22	+22,4
	Altona	+0,54	− 0,3
Mai 4.	Bremen	-0^s15	$+13''6$
	Nimes		+21,9
	Speier	−0,13	+20,1
	Altona	−0,04	−11,7
5.	Bremen	+1,44	+40,5
	Speier	+0,28	+ 2,2
	Mailand	−0,30	+ 0,9
	Wien	+0,12	+ 1,3
	Florenz		+12,6
	Padua	−1,62	− 8,5
6.	Speier	+0,33	+ 0,1
	Mailand	+1,22	− 1,1
	Wien	−0,10	+ 0,4
	Florenz	+0,20	+45,7
	Altona	+0,04	−12,4
II. Normalort.			
7.	Wien	+0,71	− 5,9
	Altona	+0,30	−10,5
8.	Königsberg	+0,38	− 2,6
	Padua	+1,61	−19,8
9.	Wien	+0,42	+ 3,1
10.	Padua	+0,25	−14,3
	Florenz	+0,13	+ 6,4
11.	Mailand	+0,29	+ 3,4
	Cracau	−0,81	+40,0
	Kensington	−0,24	−76,7

II Normalort		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
Mai 12.	Bremen	−0^{s}87	+ 8″5
	Königsberg	+0,46	−11,4
	Wien	+0,22	− 2,2
	Padua	+0,71	−16,4
	Cracau	−0,82	
13.	Bremen	−1,12	−32,9
	Kensington	+2,22	+ 8,9
	Altona	+0,47	− 6,7
15.	Bremen	−2,36	− 2,9
	Königsberg	+0,34	+ 7,9
	Altona	+0,79	− 6,6
16.	Bremen	−1,65	− 9,7
	Königsberg	+0,42	− 4,8
17.	Königsberg	+0,41	− 4,5
	Speier	+0,06	− 4,8
	Prag	+1,02	− 8,2
	Wien	+0,01	−13,8
18.	Mannheim	+0,30	+ 5,7
	Nimes	−0,05	+ 6,5
	Königsberg	+0,46	− 5,0
	Wien	+0,24	− 7,7
	Florenz	−0,42	+18,7
	Kremsm.	+2,96	+51,1
	Padua	−0,12	− 4,0
	Cracau	−2,01	−72,2
19.	Bremen	+0,87	−32,2
	Mannheim	+0,29	+ 0,6
	Mailand	−0,96	− 7,4
	Wien	+0,44	− 5,8
	Florenz	−0,08	+20,1
	Kremsm.	+2,19	+54,1
	Padua	+0,60	−16,4
	Cracau	−3,23	−19,8
20.	Bremen	−0,39	−23,4
	Prag	+1,25	−55,0
	Mannheim	−0,08	− 9,5
	Speier	+0,38	− 3,5
	Mailand	−0,88	−13,3
	Königsberg	+0,32	− 5,4
	Wien	+0,25	+ 1,5
	Florenz	−0,79	− 7,9
	Padua	−0,11	− 2,9
	Cracau	−1,22	−37,9
	Altona	+0,27	− 3,7

III. Normalort		$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$
III. Normalort.			
Mai 21.	Florenz	−1^{s}60	+ 9″2
	Padua	−0,03	−20,6
	Cracau	−2,44	−86,0
22.	Mannheim	−0,03	− 9,4
	Mailand	−1,28	−11,6
	Florenz	+0,37	+42,5
	Padua	−1,14	+ 7,6
23.	Bremen	−0,36	−36,0
	Prag	+0,45	+11,2
	Mannheim	−0,02	−10,0
	Wien	+0,07	−21,4
	Florenz	+1,26	+ 5,8
	Kremsm.	+0,74	−17,0
	Padua	−1,13	−10,6
24.	Bremen	+0,59	
	Prag	+2,14	+27,0
	Königsberg	+0,41	− 7,6
	Wien	+0,25	−15,3
	Florenz	+0,76	−12,4
	Padua	−0,85	−18,9
	Cracau	−1,34	+ 4,5
25.	Nimes	+1,26	+ 7,2
	Wien	+0,03	+ 0,4
	Florenz	−0,43	− 6,6
	Padua	+0,33	− 2,0
	Cracau	−2,63	−54,1
26.	Mailand	−0,84	− 7,8
	Florenz	+0,46	+13,1
	Padua	−0,52	−46,9
27.	Mannheim	−0,19	− 2,7
	Speier	+0,34	+ 0,6
28.	Bremen	+0,45	−31,6
	Prag	+0,85	+61,2
	Königsberg	+0,41	− 7,8
	Florenz	+0,39	− 6,6
	Padua	+0,63	− 7,5
	Cracau	−2,10	+32,8
29.	Nimes	+0,56	−13,5
	Mailand	+0,44	− 8,1
	Königsberg	+0,63	− 7,5
	Florenz	−1,56	− 7,7
	Padua	+1,18	−25,0
	Cracau		−40,1
30.	Prag	+0,70	−31,7
	Wien	+0,26	−13,5
	Florenz	−0,07	+12,1
	Padua	+0,56	+ 3,6
	Cracau	−2,12	−51,5

	III. Normalort	Δα	Δδ
Mai 31.	Mannheim	+11ˢ.5	−13″.8
	Mailand	−0,65	− 2,5
	Florenz	+0,75	+ 2,6
	IV. Normalort.		
Juni 1.	Bremen	−1,17	−50,4
	Prag	−0,41	+24,0
	Mannheim	+0,61	−14,6
	Wien	+0,38	−13,5
	Florenz	+1,12	+12,7
	Kremsm.	+1,67	−12,4
	Padua	+0,76	−12,9
	Cracau	−0,81	
2.	Mannheim	+0,45	− 5,4
	Florenz	+0,01	− 2,0
	Kremsm.	+2,55	−20,9
	Padua	+0,41	− 4,9
	Cracau	−0,55	−37,8
3.	Prag	−0,27	+12,2
	Wien	+0,35	− 7,9
	Kremsm.		−21,9
	Padua	+0,50	− 6,2
4.	Bremen	+1,84	−38,3
	Wien	+0,20	−12,8
	Cracau	−1,33	− 7,9
5.	Mannheim	+0,24	−10,4
	Königsberg	+0,70	− 6,6
	Wien	+0,50	−11,1
	Padua	−1,88	−32,5
6.	Padua	−0,42	−31,3
7.	Königsberg	−0,37	− 7,7
	Wien	+0,79	−15,7
8.	Königsberg	+0,73	− 5,6
9.	Prag	+0,85	−24,8
	Mannheim	+0,28	−13,3
10.	Bremen	−0,88	−50,6
	Mannheim	+1,38	− 1,4
	Nimes	+2,30	+42,8
	Florenz	+0,42	− 7,6
11.	Bremen	−0,14	−23,4
	Königsberg	+0,48	− 7,7
	Florenz	+0,81	− 5,1
	Padua	+0,30	+ 4,8
12.	Prag	+0,25	− 9,8
	Florenz	+0,49	+ 1,8
	Padua	−0,58	− 6,9
	Cracau	−1,05	
13.	Mannheim	−0,16	+ 4,5
	Padua	+0,12	− 2,5

	IV. Normalort	Δα	Δδ
Juni 14.	Bremen	−0ˢ.83	+10″.3
	Prag	+1,49	+52,1
	Königsberg	+0,54	− 5,8
	Florenz	+0,60	− 8,8
15.	Prag	+0,64	+ 4,9
	Königsberg	+0,51	− 4,7
16.	Bremen	−0,11	+21,8
	Königsberg	+0,49	− 6,4
17.	Kremsm.		+41,0
18.	Prag	+2,08	+34,9
	V. Normalort.		
19.	Bremen	+0,75	+11,4
	Florenz	−0,03	−19,6
	Königsberg	+0,55	− 6,3
	Wien	+0,11	+ 2,2
	Padua	−0,56	+15,4
20.	Bremen	+3,18	+ 3,8
	Prag	+0,72	+23,2
21.	Mailand	+0,29	− 4,0
	Padua	−0,15	+12,0
22.	Mannheim	+0,85	− 9,7
	Nimes	+2,74	+47,2
	Florenz	+0,33	−12,2
23.	Prag	+2,16	+ 4,1
	Mailand	−1,18	+ 8,9
	Wien	−0,60	−10,8
	Florenz	+1,98	−25,1
	Kremsm.		+47,2
	Padua	−1,36	+ 1,9
24.	Mannheim	0,00	− 2,0
	Mailand	−0,08	−10,6
	Königsberg	+0,63	− 6,9
	Wien	−0,38	−21,4
	Florenz	−0,56	− 2,0
	Padua	−0,41	+10,4
25.	Mannheim	+1,58	− 7,3
	Nimes	+1,67	+45,7
	Mailand	+0,59	−14,7
	Wien	+0,85	−24,6
	Florenz	+0,59	− 5,9
	Padua	+0,28	−23,5
26.	Prag	+0,98	+11,8
	Wien	+0,75	−13,2
	Florenz	+2,29	+46,9
	Kremsm.	+2,82	+35,0
	Padua	+0,91	+12,4

V. Normalort		Δα	Δδ
Juni 27.	Königsberg	+0^{s}82	− 4″8
	Wien	+0,16	+13,0
	Kremsm.	+3,39	+30,6
28.	Prag	+1,53	+68,2
	Mailand	−0,03	+ 0,1
	Königsberg	+0,96	− 4,3
	Florenz	+0,23	+ 6,9
	Padua	+0,97	−10,3
	Kremsm.	−1,95	+42,5
29.	Mailand	−1,89	− 7,6
	Wien	+0,31	−10,3
	Florenz	+0,01	+ 9,2
	Padua	−0,76	+19,5
30.	Florenz	−1,53	− 7,3
	Padua	+0,19	−15,1
Juli 1.	Florenz	−1,79	− 1,2
	Altona	−1,22	+16,7
2.	Florenz	+1,18	+30,7
3.	Florenz	+0,47	+ 4,1
	VI. Normalort.		
8.	Altona	+2,14	−38,1
10.	Mannheim	−0,20	− 4,8
	Wien	+0,44	− 9,5
	Florenz	+0,88	+21,4
11.	Mannheim	+0,78	+ 9,0
	Wien	−0,91	−24,7
	Florenz	+2,30	+48,1
	Altona	−0,03	− 2,3
12.	Florenz	+2,46	+30,3
13.	Mannheim	+0,69	+ 2,1
	Wien	+0,09	−10,1
	Florenz	+2,25	−28,7
14.	Wien	+0,49	− 2,9
	Altona	+0,36	+ 2,7
15.	Mannheim	+0,16	− 6,5
	Wien	+0,18	− 5,0
	Florenz	−0,82	+60,2
	Altona	+0,10	−15,6
16.	Wien	+1,39	+ 9,2
	Florenz	+2,04	+22,0
17.	Mannheim	+1,01	+ 5,0
	Florenz	−0,11	−18,6
18.	Mannheim	+0,17	+13,4
	Wien	+0,51	− 2,5
	Florenz	+0,46	+ 3,9

VI. Normalort		Δα	Δδ
Juli 19.	Wien	+0^{s}32	− 4″1
	Florenz	+0,76	+49,5
20.	Mannheim	+3,51	+17,5
	Florenz	+1,70	− 5,7
21.	Florenz	−1,49	+15,8
22.	Mannheim	+0,51	+ 4,7
	Wien	+0,51	− 9,5
	Florenz	−0,43	+ 1,3
23.	Mannheim	−0,86	+ 3,7
	Wien	+0,39	+ 3,4
	Florenz	+0,51	+ 5,8
24.	Florenz	+2,05	+18,2
25.	Mannheim	−0,66	+ 9,6
	Wien	+0,78	+ 4,5
	Florenz	+1,51	+ 5,3
26.	Wien	+0,49	− 5,1
	Florenz	+3,17	−24,5
	Altona	+0,36	+10,9
27.	Mannheim	+0,71	+12,7
	Wien	+0,59	+ 1,0
	Altona	−0,39	−18,3
28.	Altona	−0,94	− 3,0
29.	Wien	+0,39	−13,5
	Altona	−0,55	+16,7
30.	Wien	+0,54	−12,2
	Florenz	+3,45	+22,8
	Altona	−0,40	−11,6
31.	Florenz	−3,79	−10,2
Aug. 1.	Florenz	−2,04	− 0,6

VII. Normalort.

		Δα	Δδ
8.	Florenz	+1,65	− 1,3
9.	Florenz	+0,93	+33,3
10.	Florenz	−3,59	− 6,7
11.	Florenz	−0,80	
12.	Florenz	+1,35	−28,0
13.	Florenz	−0,97	+ 1,3
14.	Florenz	+1,90	+18,8
15.	Florenz	+2,34	−55,8
16.	Florenz	+1,72	−46,5

Um den Gang vorstehender Fehler mit grösster Wahrscheinlichkeit ermitteln zu können, suchte ich zunächst die Fehler der Beobachtungen, die zu einem Normalorte vereinigt waren, sowohl in Rectascension, als auch in Declination durch Ausdrücke von der Form

$$a + bt + ct^2$$

darzustellen. Da jedoch die so gefundenen Werthe von einem Normalorte zum andern zu grosse Sprünge zeigten, so theilte ich die Beobachtungen der sechs ersten Normalörter in je zwei Gruppen und suchte für jede Gruppe die parabolischen Ausdrücke, welche die Beobachtungen möglichst genau darstellen. Hierauf suchte ich die Differenz der durch die Formeln berechneten und der wirklich beobachteten Fehler, bildete den mittleren Fehler, setzte das Gewicht der Formeln für Rectascension $= 100$: Quadrat des mittleren Fehlers, für Declination aber $= 15^2 . 100$: Quadrat des mittleren Fehlers, und rundete endlich die gefundenen Gewichte ab, indem ich sie durch 35 dividirte. Dadurch erhielt ich folgende Uebersicht:

	$\Delta\alpha$	m_α^2	G_α	$\Delta\delta$	m_δ^2	G_δ
April 30.	$-0^s{,}050 + 0{,}352t + 0{,}120t^2$	0,5935	168=5	$+ 3''{,}09 - 1{,}43t + 0{,}54t^2$	223,05	101=3
Mai 5.	$-0{,}075 + 0{,}184 + 0{,}248$	0,4140	242=7	$+ 9{,}81 - 1{,}32 - 2{,}61$	313,13	72=2
12.	$+0{,}022 - 0{,}127 + 0{,}001$	0,9230	108=3	$- 6{,}80 + 0{,}45 + 0{,}05$	485,29	46=1
19.	$+0{,}041 - 0{,}146 + 0{,}012$	1,1950	84=2	$- 1{,}82 - 7{,}27 - 5{,}31$	591,73	38=1
24.	$+0{,}217 - 0{,}011 - 0{,}175$	1,0190	98=3	$- 4{,}21 - 1{,}68 - 2{,}52$	634,91	35=1
29.	$+0{,}057 - 0{,}048 + 0{,}044$	0,8263	121=3	$- 10{,}95 - 4{,}98 + 2{,}97$	560,08	40=1
Juni 3.	$+0{,}177 - 0{,}089 + 0{,}008$	0,9795	102=3	$- 13{,}79 - 1{,}83 + 0{,}31$	280,84	80=2
12.	$+0{,}126 - 0{,}063 + 0{,}053$	0,5840	187=5	$- 3{,}69 + 3{,}48 + 0{,}47$	387,24	58=2
23.	$+0{,}138 - 0{,}009 + 0{,}005$	1,2573	80=2	$+ 3{,}54 - 3{,}58 - 0{,}96$	392,92	57=2
28.	$+0{,}092 - 0{,}612 + 0{,}135$	1,2900	77=2	$+ 8{,}39 - 3{,}32 + 0{,}84$	509,61	44=1
Juli 14.	$+0{,}562 - 0{,}051 + 0{,}011$	0,8532	117=3	$+ 5{,}23 + 1{,}61 - 0{,}17$	558,82	40=1
26.	$+0{,}591 - 0{,}168 - 0{,}023$	2,3547	42=1	$+ 0{,}52 - 0{,}82 + 0{,}04$	149,13	154=4
Aug. 11.	$-0{,}573 - 0{,}034 + 0{,}145$	3,2139	31=1	$+ 4{,}00 - 4{,}37 - 1{,}16$	727,69	31=1

Indem ich nun das erste Glied von $\Delta\alpha$ und $\Delta\delta$ als Fehler für die beigesetzten Tage ansah, berechnete ich nach der Me-

thode der kleinsten Quadrate parabolische Ausdrücke, die bis zur 4. Potenz der Zeit reichen und sich mit Berücksichtigung der Gewichte möglichst genau an obige Werthe anschliessen, und erhielt für Juni 3 und $\tau = \frac{t}{40}$:

$$\Delta\alpha = +0^s\!.1004 + 0^s\!.1301\,\tau + 0^s\!.4113\,\tau^2 + 0^s\!.3106\,\tau^3 - 0^s\!.4133\,\tau^4$$

$$\Delta\delta = -5''\!.224 + 3''\!.588\,\tau + 11''\!.766\,\tau^2 - 9''\!.086\,\tau^3 + 1''\!.302\,\tau^4.$$

Hieraus ergab sich folgende Fehlerephemeride:

	Δα	Δδ		Δα	Δδ		Δα	Δδ
April 24.	−0ˢ34	+13″3	Juni 3.	+0ˢ10	−5″2	Juli 13.	+0ˢ54	+2″4
28.	−0,18	+ 8,5	7.	+0,12	−4,8	17.	+0,55	+2,6
Mai 2.	−0,07	+ 4,6	11.	+0,15	−4,1	21.	+0,53	+3,0
6.	+0,01	+ 1,5	15.	+0,18	−3,3	25.	+0,47	+3,1
10.	+0,05	− 1,0	19.	+0,23	−2,4	29.	+0,35	+2,9
14.	+0,07	− 2,9	23.	+0,28	−1,5	Aug. 2.	+0,18	+2,6
18.	+0,08	− 4,2	27.	+0,34	−0,6	6.	−0,07	+2,0
22.	+0,09	− 5,0	Juli 1.	+0,40	+0,2	10.	−0,42	+1,4
26.	+0,09	− 5,4	5.	+0,46	+1,1	14.	−0,86	+0,0
30.	+0,09	− 5,5	9.	+0,51	+1,8	16.	−1,13	−0,6

Diese Tabelle benutzte ich nun zur Bestimmung der persönlichen Fehler und Gewichte. Für jeden einzelnen Beobachtungsort verglich ich jeden beobachteten Fehler mit dem Fehler, wie ihn vorstehende Tabelle ergibt, nahm aus den gefundenen Differenzen das arithmetische Mittel und sah dasselbe als den persönlichen Fehler an, d. h. als die Grösse, um welche im Mittel die fraglichen Beobachtungen von solchen Beobachtungen abweichen, die ein so zu sagen normaler Beobachter anstellen würde. Nach Abzug der so gefundenen persönlichen Fehler blieben nun noch die eigentlichen Fehler der einzelnen Beobachtungen übrig, aus welchen ich in bekannter Weise die mittleren Fehler und Gewichte ableitete. Rectascension und Declination wurden hierbei immer getrennt behandelt; um aber beide vergleichen zu können, wurde der mittlere Fehler in Rectascension, der zunächst in Zeitsecunden ausgedrückt war, durch Multiplication mit 15 in Bogensecunden verwandelt. Bezeichnet also $f\alpha$ und $f\delta$ die Differenz der Fehler eines Beobachtungsortes, wenn sie abgezogen sind von den Fehlern nach der Ephemeride,

n_α und n_δ die Zahl der Beobachtungen, so sind die persönlichen Fehler

$$p_\alpha = \frac{[f_\alpha]}{n_\alpha}, \quad p_\delta = \frac{[f_\delta]}{n_\delta},$$

ferner die mittleren Fehler

$$m_\alpha^2 = \frac{[(f_\alpha - p_\alpha)^2]}{n_\alpha - 1}, \quad m_\delta^2 = \frac{[(f_\delta - p_\delta)^2]}{n_\delta - 1},$$

wobei die eckigen Klammern in bekannter Weise als Summenzeichen zu nehmen sind. Endlich sind die Gewichte jeder einzelnen Beobachtung

$$G_\alpha = \frac{n_\alpha}{(n_\alpha + 1) \cdot m_\alpha^2}; \quad G_\delta = \frac{n_\delta}{(n_\delta + 1)\, m_\delta^2}.$$

Letztere multiplicirte ich zunächst mit 1000, um aber abzurunden, dividirte ich sie schliesslich wieder durch 6.

Es würde zwecklos sein, wollte ich für alle Beobachtungsorte diese Rechnung hier mittheilen; ich begnüge mich also, für irgend einen Beobachtungsort, z. B. Göttingen, die Rechnung ausführlich hinzuschreiben. Wir fanden:

April	Observ.		Ephem.		Differenz		$f-p$		$(f-p)^2$	
	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	$f\alpha$	$f\delta$				
26.	+0,22	+ 1,2	−0,25	+10,8	−0,47	+ 9,6	−0,23	+ 6,1	0,0529	37,21
27.	+0,45	+31,3	−0,22	+ 9,6	−0,67	−21,7	−0,43	−25,2	1849	635,04
28.	−0,16	+11,3	−0,18	+ 8,5	−0,02	− 2,8	+0,22	− 6,3	484	39,69
29.	−0,47	+ 2,7	−0,15	+ 7,5	+0,32	+ 4,8	+0,56	+ 1,3	3136	1,69
30.	+0,23	−21,1	−0,12	+ 6,5	−0,35	+27,6	−0,11	+24,1	121	580,81
					−1,19;	+17,5			0,6119;	1294,44

$$p_\alpha = -1,19:5 = -0,24; \quad m_\alpha = \sqrt{0,6119:4} = \pm 0,39;$$

$$G_\alpha = \frac{5.1000}{6.m_\alpha^2.152} = 21,2; \quad G'_\alpha = 1$$

$$p_\delta = +17,5:5 = +3,5; \quad m_\delta = \sqrt{1294,44:4} = \pm 18,0;$$

$$G_\delta = \frac{5.1000}{6 . m_\delta^2} = 2,6; \quad G'_\delta = \tfrac{1}{2}.$$

Da Marseille nur die eine Beobachtung von April 21. geliefert hat, so konnte der persönliche Fehler und das Gewicht nicht bestimmt werden, was mich veranlasste, auch diese eine Beobachtung nicht ferner in Rechnung zu ziehen, sondern mich

damit zu begnügen, dass ich constatire, dass sie den übrigen Beobachtungen nicht widerspricht. Für die andern Beobachtungsorte fand ich:

	n_α	n_δ	p_α	p_δ	m_α	m_δ	G'_α	G'_δ
Göttingen	5	5	−0,24	+ 3,5	±0,39	±18,0	4	½
Bremen	24	23	+0,08	+ 9,2	1,20	22,6	½	½
Prag	17	17	−0,81	−15,8	0,73	32,1	1	¼
Mannheim	27	26	−0,17	0,0	0,79	7,1	1	3
Nimes	6	7	−1,25	−25,2	0,98	22,4	½	½
Speier	6	6	−0,21	− 8,6	0,14	7,1	34	3
Mailand	17	17	+0,53	+ 4,0	0,74	7,2	1	3
Kremsm.	11	11	−2,51	−24,1	2,17	30,3	¼	¼
Königsberg	21	21	−0,38	+ 2,1	0,10	1,6	70	60
Cracau	14	14	+1,65	+37,3	0,77	45,1	1	¼
Kensington	5	5	−1,39	+ 5,0	1,09	39,5	½	¼
Wien	40	40	−0,03	+ 7,2	0,40	7,7	4	3
Florenz	65	65	−0,25	− 5,7	1,45	21,5	½	½
Padua	36	36	+0,15	+ 5,6	0,81	14,0	1	1
Altona	19	19	+0,13	+ 6,4	0,77	14,6	1	1

V. Bildung der Normalörter.

Nachdem ich jede Beobachtung nach dem persönlichen Fehler corrigirt hatte, vereinigte ich alle Beobachtungen, die an einem Tage ausgeführt waren, mit Rücksicht auf ihre Gewichte zu einem mittleren Werthe, dem ich das Gewicht gleich der Summe der einzelnen Gewichte gab. Zugleich verwandelte ich $\Delta\alpha$ in Bogensecunden und multiplicirte es mit $\cos\delta$, wodurch ich folgende Resultate erhielt:

I.	$\Delta\alpha.\cos\delta$	G_α	$\Delta\delta$	G_δ	I.	$\Delta\alpha.\cos\delta$	G_α	$\Delta\delta$	G_δ
April 26.	− 0″3	4	+ 4″7	½	Mai 5.	+ 0″8	40½	+ 5″6	11
27.	+ 3,1	4	+34,8	½	6.	+ 1,9	40½	+ 3,6	10½
28.	− 6,3	4½	+23,3	1	II.				
29.	− 6,4	5½	+14,9	2	Mai 7.	+ 8,9	5	+ 0,7	4
30.	− 0,7	7	− 4,7	3½	8.	0,0	71	− 0,7	61
Mai 1.	+ 4,5	4	+ 8,7	5¾	9.	+ 4,5	4	+10,3	3
2.	+10,5	1½	+ 1,0	1¼	10.	+ 3,2	1½	− 5,6	1½
3.	+ 7,5	4½	− 3,2	6¼	11.	+ 4,7	2½	+ 6,7	3½
4.	− 4,6	35½	+10,8	5	12.	+ 1,5	76½	+ 0,6	64¾

II.	$\triangle\alpha.\cos\delta$	G_α	$\triangle\delta$	G_δ
Mai 13.	+ 3,5	2	− 5,0	1¾
15.	− 0,6	71½	− 0,9	61½
16.	+ 0,4	70½	− 2,7	60½
17.	− 0,3	109	− 2,9	66¼
18.	+ 1,0	78¼	− 2,4	68½
19.	+ 1,3	9¼	− 0,6	11½
20.	+ 0,3	115	− 3,6	75½
III.				
Mai 21.	− 8,7	2½	−14,5	1¾
22.	− 7,4	3½	− 2,6	7½
23.	− 2,3	8¼	−12,0	8½
24.	+ 0,8	78	− 5,6	65
25.	− 1,4	7	+ 1,3	5¼
26.	− 3,1	2½	−10,9	4½
27.	+ 1,6	35	− 2,8	6
28.	+ 0,7	74	− 5,0	62½
29.	+ 3,4	73	− 5,6	65¼
30.	− 0,2	7½	− 4,4	5
31.	+ 6,0	2½	− 5,9	6½
IV.				
Juni 1.	+ 3,0	9¼	−11,1	8½
2.	+ 6,5	3¾	− 6,2	5
3.	+ 3,0	6¼	− 3,4	4½
4.	+ 4,0	5½	− 6,4	3¾
5.	+ 4,0	76	− 5,1	67
6.	− 3,7	1	−25,7	1
7.	+ 3,7	74	− 5,7	63
8.	+ 4,7	70	− 3,5	60
9.	+ 1,5	2	−15,4	3¼
10.	+ 9,4	2½	− 5,1	4½
11.	+ 1,4	72	− 5,5	62
12.	− 1,7	3½	− 5,5	1¾
13.	− 0,4	2	+ 4,2	4
14.	+ 2,2	72	− 3,4	61¼
15.	+ 1,7	71	− 2,6	60¼
16.	+ 1,4	70½	− 4,0	60½
17.			+16,9	¼
18.	+17,8	1	+19,1	¼
V.				
Juni 19.	+ 2,1	76	− 3,2	65
20.	+14,3	1½	+11,2	¾
21.	+ 5,5	2	+ 4,4	4

V.	$\triangle\alpha.\cos\delta$	G_α	$\triangle\delta$	G_δ
Juni 22.	+ 6,4	2	− 6,8	4
23.	− 2,8	7¾	+ 2,9	8
24.	+ 2,7	77½	− 4,9	70½
25.	+ 7,6	8	−10,8	11
26.	+ 6,2	6¾	+ 4,5	5
27.	+ 5,7	74¼	− 2,8	63¼
28.	+ 7,5	73¾	− 1,6	65
29.	− 2,0	6½	− 0,9	7½
30.	− 5,1	1½	−10,7	1½
Juli 1.	−18,9	1½	+13,1	1½
2.	+12,4	½	+25,0	½
3.	+ 3,0	½	− 1,6	½
VI.				
Juli 8.	+30,7	1	−31,7	1
10.	+ 3,9	5½	− 2,1	6½
11.	− 4,2	6½	+ 0,5	7½
12.	+30,2	½	+24,6	½
13.	+ 4,4	5½	− 5,0	6½
14.	+ 6,4	5	+ 4,2	4
15.	+ 0,6	6½	+ 0,7	7½
16.	+19,2	4½	+16,4	3½
17.	+ 6,1	1½	+ 0,8	3½
18.	+ 5,0	5½	+ 8,2	6½
19.	+ 4,3	4½	+ 8,9	3½
20.	+37,5	1½	+13,4	3½
21.	−24,0	½	+10,1	½
22.	+ 5,0	5½	+ 0,8	6½
23.	+ 2,6	5½	+ 3,5	6½
24.	+25,0	½	+12,5	½
25.	+ 7,2	5½	+ 9,8	6½
26.	+ 9,6	5½	+ 1,9	4½
27.	+ 5,9	6	+ 7,3	7
28.	−11,4	1	+ 3,4	1
29.	+ 2,9	5	+ 4,4	4
30.	+ 8,6	5½	− 2,6	4½
31.	−62,2	½	−15,9	½
Aug. 1.	−32,4	½	− 6,3	½
VII.				
Aug. 8.	+20,0	½	− 7,0	½
9.	+ 9,8	½	+27,6	½
10.	−55,2	½	−12,4	½
11.	−15,1	½		
12.	+15,9	½	−33,7	½
13.	−17,6	½	− 7,0	½
14.	+23,9	½	+13,1	½
15.	+30,3	½	−61,5	½
16.	+21,3	½	−51,8	½

Die Fehler für jede dieser Gruppen suchte ich wieder durch Ausdrücke von parabolischer Form möglichst genau darzustellen und erhielt folgende Werthe, denen ich Gewichte gleich der Summe der Gewichte für die einzelnen Tage gab.

Normalort	Datum	$\Delta\alpha . \cos\delta$	G_α	$\Delta\delta$	G_δ
I.	Mai 3,5	$-1,979+0,705t+0,146t^2$	$151\frac{1}{2}$	$+2,816-0,189t+0,374t^2$	$47\frac{1}{4}$
II.	15,5	$+0,350-0,052+0,009$	616	$-1,199-0,382-0,027$	$483\frac{1}{4}$
III.	27,5	$+1,693+0,419-0,088$	$293\frac{3}{4}$	$-4,920-0,013-0,098$	$237\frac{3}{4}$
IV.	Juni 8,5	$+3,366-0,221-0,002$	$542\frac{1}{4}$	$-5,631+0,088+0,040$	$470\frac{3}{4}$
V.	24,5	$+4,167+0,388-0,015$	340	$-4,537+0,248+0,125$	308
VI.	Juli 18,5	$+7,717+0,145-0,059$	$89\frac{1}{2}$	$+0,013-0,007+0,073$	$96\frac{1}{2}$
VII.	Aug. 11,5	$-0,241-1,492+1,549$	$4\frac{1}{2}$	$-0,926-3,202-0,919$	4

Dadurch, dass ich die ersten Glieder dieser Ausdrücke mit umgekehrten Zeichen an die entsprechenden Positionen aus der Ephemeride in Abschnitt I. anbrachte, nachdem der Factor $\cos\delta$ zuvor entfernt war, erhielt ich folgende sieben Normalörter, deren Gewicht ich durch Division obiger Gewichte durch 30 abrunde:

Normalörter.

	Datum	AR.	G_α	Decl.	G_δ
I.	Mai 3,5	$21^h 15^m 18^s,25 = 318^0 49' 33'',75$	5	$+17^0 26' 2'',9$	2
II.	Mai 15,5	21. 18. 16,22 = 319. 34. 3,30	20	22. 16. 52,6	16
III.	Mai 27,5	21. 16. 35,73 = 319. 8. 55,95	10	25. 22. 56,9	8
IV.	Juni 8,5	21. 9. 24,03 = 317. 21. 0,45	18	27. 7. 4,7	16
V.	Juni 24,5	20. 52. 14,73 = 313. 3. 40,95	11	27. 21. 40,2	10
VI.	Juli 18,5	20. 20. 33,51 = 305. 8. 22,65	3	23. 24. 31,0	3
VII.	Aug. 11,5	19. 58. 38,91 = 299. 39. 43,65	0,1	16. 24. 2,7	0,1

VI. Verbesserung der Elemente.

Eine vorläufige Rechnung, die ich nicht im Einzelnen mittheile, da sie noch nicht die definitive ist, besonders auch noch

nicht die Störungen berücksichtigt, führte mich zu folgenden neuen parabolischen Elementen :

$$T = \text{April } 9{,}336156 \text{ m. Zt. Berlin.}$$
$$\left.\begin{array}{l}\pi = 212^\circ 11' 25{,}''95 \\ \Omega = 206.21.38{,}25\end{array}\right\} \text{m. Aeq. } 1830{,}0 \qquad \text{(II.)}$$
$$i = 21.16.28{,}29$$
$$\lg q = 9{,}9644605,$$

aus denen ich nachstehende ungestörte Positionen ableitete:

	AR.	Decl.
Mai 3,5	318°49′35″,87	+17°26′ 0″,96
Mai 15,5	319.34. 3,40	22.16.53,40
Mai 27,5	319. 8.54,73	25.22.56,32
Juni 8,5	317.21. 0,07	27. 7. 3,87
Juni 24,5	313. 3.40,73	27.21.40,16
Juli 18,5	305. 8.26,22	23,24.33,36
Aug. 11,5	299.39.42,12	16.24. 2,23

Nunmehr schritt ich zur Bestimmung der Störungen durch Erde, Mars, Jupiter und Saturn in rechtwinkligen Coordinaten, für welche ich die Ekliptik als *XY*-Ebene und die Richtungen nach dem Frühlingsäquinoctialpunkte, dem Sommersolstitialpunkte und dem nördlichen Pole der Ekliptik als positive Richtungen der *X*-, *Y*- und *Z*-Axe wählte. Ich beschränkte mich streng auf die Störungen der ersten Ordnung und nahm als Maass die Bogensecunde eines Kreises, dessen Radius gleich dem Radius der Erdbahn ist. Als Zeit der Osculation wählte ich Mai 1,5 und als Intervall den Zeitraum von 20 Tagen. Hierdurch fand ich:

Störungen.

	♁			♂			♃			♄			Summa		
	ξ	η	ζ	ξ	η	ζ	ξ	η	ζ	ξ	η	ζ	ξ	η	ζ
Mai 1,5	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Mai 21,5	−0,08	+0,08	−0,08	+0,01	−0,01	−0,00	+0,09	− 0,47	−0,04	+0,00	−0,00	−0,00	+0,02	−0,10	−0,12
Juni 10,5	−0,25	+0,29	−0,26	+0,02	−0,01	−0,02	+0,34	− 0,82	−0,21	+0,02	−0,00	−0,01	+0,13	−0,54	−0,50
Juni 30,5	−0,49	+0,61	−0,53	+0,05	−0,02	−0,07	+0,68	− 2,10	−0,57	+0,06	−0,01	−0,01	+0,30	−1,52	−1,18
Juli 20,5	−0,80	+1,04	−0,86	+0,08	−0,02	−0,12	+1,04	− 4,16	−1,20	+0,11	−0,03	−0,02	+0,43	−3,17	−2,20
Aug. 9,5	−1,16	+1,56	−1,23	+0,10	−0,01	−0,19	+1,31	− 7,11	−2,16	+0,18	−0,07	−0,04	+0,43	−5,63	−3,62
Aug. 29,5	−1,60	+2,15	−1,62	+0,12	+0,01	−0,26	+1,38	−11,02	−3,53	+0,28	−0,12	−0,06	+0,18	−8,98	−5,47

Diese Störungen übertrug ich zunächst auf die geocentrische Länge und Breite durch

$$dl = -\frac{\sin l}{\Delta \cos b} \cdot \xi + \frac{\cos l}{\Delta \cos b} \cdot \eta$$

$$db = -\frac{\sin b \, . \cos l}{\Delta} \cdot \xi - \frac{\sin b \, . \sin l}{\Delta} \cdot \eta + \frac{\cos b}{\Delta} \cdot \zeta,$$

und endlich mit Hülfe des Winkels p, für welchen

$$\sin p = \frac{\sin \varepsilon \, . \cos l}{\cos \delta} = \frac{\sin \varepsilon \, . \cos \alpha}{\cos b}$$

ist, auf Rectascension und Declination durch

$$d\alpha = \frac{\sin p \, . \cos b}{\cos \delta} \, . \, dl - \frac{\cos p}{\cos \delta} \, . \, db$$

$$d\delta = \cos p \, . \cos b \, . \, dl + \sin p \, . \, db,$$

und erhielt:

	$d\alpha$	$d\delta$
Mai 1,5	0",00	0",00
Mai 21,5	+0,17	−0,20
Juni 10,5	+0,63	−0,80
Juni 30,5	+1,48	−1,79
Juli 20,5	+2,72	−2,69
Aug. 9,5	+3,98	−3,42
Aug. 29,5	+4,77	−4,13

Durch Interpolation bestimmte ich hieraus die Störung für die Normalörter, addirte dieselben zu den aus (II.) berechneten Positionen und verglich nun mit den Normalörtern. Dadurch erhielt ich:

	$d\alpha$	$d\delta$	AR.	Decl.	$\Delta\alpha$	$\Delta\alpha \cos\delta$	$\Delta\delta$
Mai 3,5	0",00	0",00	318°49'35",87	+17°26' 0",96	+2",12	+2",02	−1",94
Mai 15,5	+0,09	−0,10	319.34. 3,49	22.16.53,30	+0,19	+0,18	+0,70
Mai 27,5	+0,27	−0,35	319. 8.55,00	25.22.55,97	−0,95	−0,86	−0,93
Juni 8,5	+0,56	−0,74	317.21. 0,63	27. 7. 3,13	+0,18	+0,16	−1,57
» 24,5	+1,18	−1,57	313. 3.41,91	27.21.38,59	+0,96	+0,85	−1,61
Juli 18,5	+2,59	−2,61	305. 8.28,81	23.24.30,75	+6,16	+5,65	−0,25
Aug. 11,5	+4,04	−3,49	299.39.46,16	16.23.58,74	+2,51	+2,41	−3,96

Nun schritt ich zur Bildung der Bedingungsgleichungen unter Benutzung der von *Oppolzer* (Entwickelung von Differentialformeln etc. Wien 1864) mitgetheilten Ausdrücke, musste also zuerst die Bahnelemente (II.) auf den Aequator übertragen und erhielt:

$$\Omega' = 294°18'24''03$$
$$\sigma = 270.\ 8.12,39$$
$$\omega' = 275.58.\ 0,09$$
$$i' = 10.10.55.50$$

und die Differentialformeln

$$d\Omega = +\ 7,06559\ d\Omega' + 0,44029\ di'$$
$$d\sigma = -\ 9,99263\ d\Omega' + 0,40964\ di'$$
$$di = -\ 9,24743\ d\Omega' + 7,37788\ di'$$
$$d\pi = d\Omega + d\omega' - d\sigma,$$

in welchen ich, wie überall im Folgenden statt der Zahlen deren Logarithmen gesetzt habe. Ferner setzte ich

$$1000\ .\ dT = x$$
$$100000\ .\ d\log q = y$$
$$1000\ .\ de = z$$
$$d\omega' = t$$
$$d\Omega' = u$$
$$di' = v,$$

und erhielt die Bedingungsgleichungen für

	AR.					
0 = +0,30535	+9,30227 *x*	−0,98424 *y*	−0,36217 *z*	+9,79821 *t*	+9,81428 *u*	+9,41979 *v*
0 = +9,25527	−9,87437	−0,94840	−0,51085	+9,98727	+0,00072	+9,24624
0 = −9,93450	−0,12333	−0,94189	−0,62358	+0,09474	+0,10497	+9,06591
0 = +9,20412	−0,24187	−0,94736	−0,70257	+0,16878	+0,17725	+8,84636
0 = +9,92942	−0,32918	−0,95404	−0,75299	+0,23274	+0,23993	+8,29369
0 = +0,75205	−0,35993	−0,92917	−0,71541	+0,25763	+0,26420	−8,60323
0 = +0,38202	−0,29527	−0,85466	−0,60222	+0,21365	+0,22021	−8,88509
	Decl.					
0 = −0,28780	+0,39271	−9,24194	−0,25100	−9,57824	−9,79163	−0,19613
0 = +9,84510	+0,38457	+9,56593	−0,44284	−9,56966	−9,80223	−0,01528
0 = −9,96848	+0,34036	+9,69852	−0,56776	−9,49501	−9,77088	−9,82494
0 = −0,19590	+0,27438	+9,51849	−0,66468	−9,33094	−9,70080	−9,59313
0 = −0,20683	+0,14274	−9,35414	−0,76050	−8,46921	−9,51491	−9,02431
0 = −9,39794	+9,79116	−0,06079	−0,80654	+9,40188	−8,67884	+9,32571
0 = −0,59770	+9,02966	−0,15115	−0,71272	+9,55190	+8,89083	+9,61676

Da unter den Fehlern der Normalörter keiner von bedeutender Grösse ist, so hielt ich es für gerechtfertigt, allen Bedingungsgleichungen dasselbe Gewicht beizulegen, wodurch ich folgende Normalgleichungen erhielt.

0 = −1,46654	+1,62056 x	+1,93234 y	+0,89213 z	−1,26995 t	−1,34059 u	−0,94044 v
0 = −1,91376	+1,93234	+2,72839	+2,42814	−1,91430	−1,92081	−0,80644
0 = −0,43147	+0,89213	+2,42814	+2,44818	−1,62630	−1,53852	+0,73670
0 = +1,20106	−1,26995	−1,91430	−1,62630	+1,16250	+1,17543	+0,27750
0 = +1,27478	−1,34059	−1,92081	−1,53852	+1,17543	+1,20317	+0,43325
0 = +0,32568	−0,94044	−0,80644	+0,73670	+0,27750	+0,43325	+0,65266

Hieraus erhielt ich zunächst folgende parabolische Elemente, indem ich die Glieder mit z und die dritte Normalgleichung unberücksichtigt liess:

$\log x = -0,87222$, $dT = -0,007451$, $T =$ April 9,328705 mittl. Berl. Zeit
$y = -0,12609$, $d\log q = -0,0000134$, $\log q = 9,9644471$
$t = +1,24885$, $d\pi = -16,809$, $\pi = 212°11'\ 9'',14$ (III.)
$u = -1,53680$, $d\Omega = -9,793$, $\Omega = 206.21.28,46$ m. Aeq. 1830,0
$v = -0,54883$, $di = +6,076$, $i = 21.16.34,37$

Durch Berücksichtigung von z dagegen erhielt ich folgende Ellipse:

$\log x = -0,90140$, $dT = -0,007969$, $T =$ April 9,328187
$y = -0,14096$, $d\log q = -0,0000138$, $\log q = 9,9644467$
$z = -9,45950$, $de = -0,0000288$, $e = 0,9999712$ (IV.)
$t = +1,10971$, $d\pi = -18,745$, $\pi = 212°11'\ 7'',21$
$u = -1,49618$, $d\Omega = -11,241$, $\Omega = 206.21.27,01$
$v = -0,60909$, $di = +5,532$, $i = 21.16.33,82$

Zum Schlusse theile ich noch die Fehler mit, welche die beiden Elementarsysteme (III. und IV.) laut Bedingungsgleichungen von den Normalörtern übrig lassen, indem ich noch die Fehler hinzuschreibe, wie sie eine directe Rechnung ergab.

Elemente III.				Elemente IV.			
$\Delta\alpha.\cos\delta$	$\Delta\delta$			$\Delta\alpha.\cos\delta$	$\Delta\delta$		
+1″05	+0″03	+1″1	+0″0	+0″91	+0″04	+0″9	+0″0
−0,25	+1,05	−0,4	+1,0	−0,25	+0,98	−0,3	+1,0
−1,45	−0,78	−1,3	−0,8	−1,34	−0,82	−1,4	−0,8
−0,85	−1,16	−0,8	−1,1	−0,67	−1,11	−0,7	−1,1
−0,79	−0,54	−0,7	−0,6	−0,61	−0,40	−0,7	−0,4
+3,07	+2,05	+3,1	+2,1	+3,02	+2,14	+2,5	+2,2
−1,19	−0,69	−1,1	−0,7	−1,49	−0,90	−1,5	−0,9

Für Elemente III. ist die Summe der Fehlerquadrate =23,48 und der mittlere Fehler = ± 1,71; für Elemente IV. betragen dieselben Grössen 23,26 und ± 1,70. Man sieht, dass durchaus kein Grund vorhanden ist von der Excentricität = 1 abzuweichen, und so möchte ich die Elemente III. für diejenigen halten, welche die grösste Wahrscheinlichkeit für sich haben.

Nachtrag.

Ausser den von mir im Vorstehenden benutzten sind noch verschiedene Beobachtungen vor dem Perihel im 4. und 8. Bande der Memoirs of the R. Astr. Soc., im 1. Bande der Monthly Notices und im 8. Bande der Astr. Nachrichten gegeben. Da dieselben meistens nur Distanzbeobachtungen des Cometen von helleren Sternen und mit dem Sextanten ausgeführt sind, so haben sie keine so grosse Genauigkeit, um mit den Beobachtungen der Sternwarten auf gleiche Stufe gestellt werden zu können. Nur im 19. Bande der Memoirs of the R. Astr. Soc. sind vom Cap der guten Hoffnung die folgenden Meridianbeobachtungen gegeben, welche noch Berücksichtigung finden müssen:

	AR.	NPD.
1830. März 22.	$22^h10^m21^s{,}33$	$164^\circ43'0''{,}46$
23.		160.33.4,11
24.	21.42.26,25	156. 9.7,06.

Obgleich diese Beobachtungen alles Zutrauen verdienen, so glaubte ich sie doch mit den übrigen nicht zusammen stellen zu dürfen, erstens, weil wegen der grossen südlichen Declination und starken scheinbaren Bewegung die Fehler bei der Beobachtung eines nicht scharf begrenzten Körpers nothwendig grösser ausfallen müssen, und zweitens, weil ihre Zahl zu gering ist und weil sie von der Reihe der übrigen Beobachtungen zu entfernt stehen, als dass ihr Gewicht und der persönliche Fehler des

Beobachters hätte ermittelt werden können. Dagegen, sie nachträglich mit vorstehenden Elementen zu vergleichen, und zu fragen, welche Aenderung der Elemente ihre Berücksichtigung herbeiführt, schien mir wichtig: und ich theile hier die Resultate dieser Untersuchung mit.

Zunächst berechnete ich nun die Störungen durch Erde und Jupiter, indem ich wegen der grossen Annäherung an die Erde nur zehntägige Intervalle wählte, und fand für den Osculationspunkt Mai 3,5:

	$d\alpha$	$d\delta$
März 22,5	+ 11″,04	— 5″,59
23,5	+ 10,07	— 4,71
24,5	+ 9,49	— 4,18.

Mit Rücksicht auf diese Störungen, wie auch auf Aberration und Parallaxe ergaben sich für die Culmination aus den Elementen (III.) folgende Positionen, welche beistehende Fehler übrig liessen:

	AR.	Decl.	$\Delta\alpha$	
März 22.	22^h 10^m 25^s,57	— 74°42′ 3″,4	+ 4^s,24	+ 57″,1
23.		— 70.32. 2,7		+ 61,4
24.	21.42. 30,40	— 66. 7.49,6	+ 4,15	+ 77,4

Dadurch, dass ich nun das Mittel dieser Fehler mit umgekehrten Zeichen zu den aus den Elementen berechneten Werthen hinzufügte, erhielt ich folgenden Normalort VIII.:

	AR.	Decl.	$\Delta\alpha.\cos\delta$	$\Delta\delta$
März 23,5	21^h 52^m 19^s,46 = 328°4′52″,0	—70°5′14″,0	+21″,45	+65″,3

Den Bedingungsgleichungen auf pag. 50 sind mithin noch die beiden folgenden beizufügen:

$$0 = +1{,}33143 + 1{,}34187x - 1{,}48548y + 0{,}81923z - 0{,}71074t - 0{,}70864u + 9{,}94920v$$

$$0 = +1{,}81491 - 1{,}37887x - 1{,}02757y - 1{,}08360z + 0{,}54261t + 0{,}54730u - 0{,}16742v$$

Setzt man das Gewicht derselben = 0,1, das Gewicht jeder der früheren Gleichungen = 1, so erhält man folgende Hyperbel:

$$\begin{array}{rlrll} dT = & +\ 0{,}003479 & T = & \text{April } 9{,}332184 \text{ mittl. Berl. Zeit.} & \\ d\log q = & +\ 0{,}0000110 & \log q = & 9{,}9644581 & \\ de = & +\ 0{,}0000607 & e = & 1{,}0000607 & \text{(V.)} \\ d\pi = & +\ 12''62 & \pi = & 212^{\circ}11'21''76 & \\ d\Omega = & +\ 5{,}59 & \Omega = & 206.21.34{,}05 & \text{m. Aeq. } 1830{,}0 \\ di = & -\ 0{,}31 & i = & 21.16{,}34{,}06 & \end{array}$$

Lässt man dagegen die Excentricität unberücksichtigt, so wird

$$\begin{array}{rlrll} dT = & +\ 0{,}003594 & T = & \text{April } 9{,}332299 & \\ d\log q = & +\ 0{,}0000123 & \log q = & 9{,}9644594 & \\ d\pi = & +\ 11''23 & \pi = & 212^{\circ}11'20''37 & \text{(VI.)} \\ d\Omega = & +\ 4{,}57 & \Omega = & 206.21.33{,}03 & \\ di = & -\ 2{,}27 & i = & 21.16.32{,}10. & \end{array}$$

Für die acht Normalörter bleiben nach den Bedingungsgleichungen, wie auch durch directe Rechnung, noch folgende Fehler:

Elemente V.		Elemente VI.	
$\Delta\alpha.\cos\delta$	$\Delta\delta$	$\Delta\alpha.\cos\delta$	$\Delta\delta$
−2″03	−0″89	−2″35	−1″18
−2,42	+1,03	−2,56	+0,94
−2,49	−0,57	−2,41	−0.60
−1,44	−0,99	−1,14	−0.70
−0,35	−0,64	−0,01	−0,23
+4,77	+2,05	+4,77	+2,17
+1,66	−0,35	+1,33	−1,02
+7,10	+2,86	+7,40	+3,02

Multiplicirt man die Quadrate der Fehler des achten Normalortes mit 0,1, so ergeben sich die Summen der Fehlerquadrate für Elemente V. = 57,48, für VI. dagegen = 58,50: es ist mithin auch hier ein Abweichen von der Parabel nicht indi-